Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Бабанский, Ю. А. Ситенко, Об индуцировании вакуумной энергии сингулярным магнитным вихрем, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 1, 72–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:03:17

ОБ ИНДУЦИРОВАНИИ ВАКУУМНОЙ ЭНЕРГИИ СИНГУЛЯРНЫМ МАГНИТНЫМ ВИХРЕМ

Конфигурация внешнего статического магнитного поля в виде сингулярного вихря поляризует вакуум квантованного заряженного скалярного поля в пространстве произвольной размерности. С использованием двух методов – дзета-функции и ядра теплопроводности – решена проблема регуляризации и устранения ультрафиолетовой расходимости и определена плотность индуцированной вакуумной энергии. Сформулировано достаточное условие применимости метода дзета-функции к задачам в пространствах произвольной размерности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос индуцирования вакуумной энергии внешними полями имеет достаточно длительную историю и освещается во многих монографиях (см., например, [1–3]). В настоящей работе ставится задача определения вакуумной энергии, индуцированной конфигурацией внешнего статического магнитного поля в виде сингулярного вихря (см. также [4]). Нами показано, что эта задача имеет решение в случае пространств произвольной размерности $d \geq 2$.

Оператор вторично квантованного комплексного скалярного поля представляется в виде

$$\psi(x^0, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2E_{\lambda}}} (e^{-iE_{\lambda}x^0} \langle \mathbf{x} | \lambda \rangle a_{\lambda} + e^{iE_{\lambda}x^0} \langle \mathbf{x} | -\lambda \rangle b_{\lambda}^{\dagger}), \quad (1)$$

где $a_{\lambda}^{\dagger}$ и a_{λ} ($b_{\lambda}^{\dagger}$ и b_{λ}) – операторы рождения и уничтожения скалярных частиц (античастиц), удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[a_{\lambda}, a_{\lambda'}^{\dagger}]_{-} = [b_{\lambda}, b_{\lambda'}^{\dagger}]_{-} = \langle \lambda | \lambda' \rangle, \quad (2)$$

$\langle \mathbf{x} | \lambda \rangle$ – решение стационарного уравнения Клейна–Гордона

$$(-\nabla^2 + m^2) \langle \mathbf{x} | \lambda \rangle = E_{\lambda}^2 \langle \mathbf{x} | \lambda \rangle, \quad (3)$$

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина

∇ – оператор ковариантного дифференцирования во внешнем (фоновом) поле, λ – набор параметров (квантовых чисел), от которых зависит состояние, $E_\lambda = E_{-\lambda} > 0$ – энергия состояния; в (1) подразумевается суммирование по дискретным и интегрирование (с определенной мерой) по непрерывным значениям λ .

Стандартным образом можно получить формальное выражение для плотности вакуумной энергии

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | (-\nabla^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} | \mathbf{x} \rangle. \quad (4)$$

Это выражение плохо определено, поскольку соответствующий ему интеграл расходится в импульсном пространстве как p^{d+1} при $p \rightarrow \infty$. Для регуляризации этой (ультрафиолетовой (УФ)) расходимости добавим под знак интеграла экспоненциально убывающий при $p \rightarrow \infty$ множитель и определим регуляризованную плотность вакуумной энергии

$$\varkappa_{\mathbf{x}}(t) = \langle \mathbf{x} | (-\nabla^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \exp[-t(-\nabla^2 + m^2)] | \mathbf{x} \rangle, \quad (5)$$

где $t > 0$. Нетрудно видеть, что выражение (5) расходится при $t \rightarrow 0_+$ даже в свободной теории, т.е. в отсутствие какого-либо взаимодействия квантованного скалярного поля. В свободной теории от вакуумных расходимостей избавляются с помощью требования нормального упорядочения произведения операторов (см., например, [1–3]). Поэтому физический интерес может представлять не сама величина $\varkappa_{\mathbf{x}}(t)$, а разность

$$\varkappa_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(t) = \varkappa_{\mathbf{x}}(t) - \varkappa_{\mathbf{x}}^{(0)}(t), \quad (6)$$

где $\varkappa_{\mathbf{x}}^{(0)}(t)$ – регуляризованная плотность вакуумной энергии в свободной теории, которая получается при замене в выражении (5) ковариантной производной на обычную: $\nabla \rightarrow \partial$.

Обладает ли величина $\varkappa_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(t)$ (6) конечным пределом при $t \rightarrow 0_+$? В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен, поскольку для получения конечного результата наряду с вычитанием (6) могут потребоваться также и бесконечная в пределе $t = 0_+$ перенормировка констант взаимодействия с внешними полями, и добавление в лагранжиан бесконечных в пределе $t = 0_+$ контрчленов. В частности, именно такая ситуация реализуется в случае индуцирования вакуумной энергии однородным электромагнитным полем [1] или кривизной пространства [3]. Более того, как подчеркивается в работе [5], ситуация изменяется кардинальным образом при изменении размерности пространства d : в случае $d = 3$ требуется перенормировка заряда (т.е. добавление контрчлена в виде инварианта второй степени по напряженности внешнего поля), в то время как в случаях $d = 2$ и $d = 4$ – не требуется, а при $d \geq 5$ одной перенормировки заряда недостаточно и необходимо добавление контрчленов в виде инвариантов третьей и выше степеней по напряженности внешнего поля. Однако в настоящей работе показано, что в случае индуцирования вакуумной энергии сингулярным магнитным вихрем предел величины $\varkappa_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(t)$ (6) при $t \rightarrow 0_+$ существует при любом значении $d \geq 2$.

Итак, в качестве внешнего выбирается статическое магнитное поле, и ковариантная производная принимает вид

$$\nabla = \partial - i\mathbf{V}(\mathbf{x}), \quad (7)$$

где $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ – векторный потенциал поля. Отметим, что в d -мерном пространстве напряженность магнитного поля является антисимметричным тензором ранга $d - 2$:

$$B^{\nu_1 \dots \nu_{d-2}}(\mathbf{x}) = [\partial_{\mu_1} V_{\mu_2}(\mathbf{x})] \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \nu_1 \dots \nu_{d-2}}, \quad (8)$$

$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_d}$ – полностью антисимметричный тензор, $\epsilon^{12 \dots d} = 1$. Конфигурация магнитного поля выбирается в виде сингулярного вихря (точка в случае $d = 2$, линия в случае $d = 3$, $(d - 2)$ -мерная гиперповерхность в случае $d > 3$):

$$V_1(\mathbf{x}) = -\Phi \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad V_2(\mathbf{x}) = \Phi \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad V_\nu(\mathbf{x}) = 0, \quad \nu = \overline{3, d}, \quad (9)$$

$$B^{3 \dots d}(\mathbf{x}) = 2\pi\Phi\delta(x^1)\delta(x^2), \quad (10)$$

Φ – поток вихря (в единицах 2π). Регулярное решение уравнения Клейна–Гордона (3) в поле вихря (9) с учетом (7) имеет вид

$$\langle \mathbf{x} | kn\mathbf{p} \rangle = (2\pi)^{\frac{1-d}{2}} J_{|n-\Phi|}(kr) e^{in\varphi} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}_{d-2}}, \quad (11)$$

где

$$0 < k < \infty, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad -\infty < p_\nu < \infty, \quad \nu = \overline{3, d}, \quad (12)$$

$J_\mu(z)$ – функция Бесселя порядка μ , $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$, $\varphi = \arctg(x^2/x^1)$, $\mathbf{x}_{d-2} = (0, 0, x^3, \dots, x^d)$, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

Как известно, в задаче об эффекте Казимира [6] для определения перенормированной вакуумной энергии достаточно лишь одного вычитания и нет необходимости в добавлении контрчленов (см., например, [2]). Поскольку согласно (10) напряженность внешнего магнитного поля обращается в нуль везде вне гиперповерхности $x^1 = x^2 = 0$, а известные до сих пор в задачах индуцирования вакуумной энергии внешними условиями контрчлены являются инвариантами, построенными из напряженности (из кривизны слоя и базы расслоенных многообразий в общем случае), то можно ожидать, что и в задаче, рассматриваемой в настоящей работе, достаточно лишь одного вычитания. Эти ожидания оправдываются, и, как будет показано ниже, действительно, никакие аномальные контрчлены не возникают.

Однако одной только конечности (согласованной с нормальным упорядочением произведения операторов в свободной теории) не достаточно для того, чтобы результату можно было придать физический смысл. Другим условием является независимость результата от способа регуляризации УФ-расходимости – ведь именно в однозначности определения конечного результата и состоит решение проблемы УФ-расходимости. В связи с этим рассмотрим функцию

$$\sigma_{\mathbf{x}}(s, t) = \langle \mathbf{x} | (-\nabla^2 + m^2)^{-s} \exp[-t(-\nabla^2 + m^2)] | \mathbf{x} \rangle \quad (13)$$

(где s – комплексный параметр), которая объединяет возможности экспоненциальной и степенной регуляризаций. Если в (13) перейти к пределу $t = 0_+$, то соответствующий интеграл оказывается сходящимся лишь при $\operatorname{Re} s > d/2$. Таким образом, использование степенной регуляризации (так называемый метод дзета-функции) с необходимостью предполагает некоторую процедуру аналитического продолжения, для того чтобы перейти к представляющим интерес значениям s ($s = -1/2$ в случае вакуумной энергии). Метод дзета-функции широко применяется к задачам индуцирования вакуумной энергии, в частности к задачам об эффекте Казимира и его обобщениях (см., например, [7]). Однако, как показано в работе [5], в случае пространств высшей размерности этот метод может приводить к результатам, не имеющим физического смысла, и поэтому использование экспоненциальной регуляризации (метод ядра теплопроводности) является предпочтительным. Нами будет показано, что к задаче индуцирования вакуумной энергии сингулярным магнитным вихрем в пространстве любой размерности $d \geq 2$ метод дзета-функции действительно применим и что оба указанных метода приводят к одному результату. Тем самым будет решена проблема регуляризации и устранения УФ-расходимости и однозначно определена конечная перенормированная плотность вакуумной энергии, имеющая физический смысл.

Отметим, что наряду с очевидным соотношением

$$\sigma_{\mathbf{x}}(-\tfrac{1}{2}, t) = \varkappa_{\mathbf{x}}(t) \quad (14)$$

мы будем пользоваться следующим выражением:

$$\sigma_{\mathbf{x}}(0, t) = \langle \mathbf{x} \mid \exp[-t(-\nabla^2 + m^2)] \mid \mathbf{x} \rangle, \quad (15)$$

определяющим ядро теплопроводности, в терминах которого и будет сформулировано достаточное условие применимости метода дзета-функции.

Используя явный вид решений уравнения Клейна–Гордона (11), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{x}}(s, t) = (2\pi)^{1-d} \int d^{d-2}p \int_0^\infty dk k (p^2 + k^2 + m^2)^{-s} \times \\ \times \exp[-t(p^2 + k^2 + m^2)] \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_{|n-\Phi|}^2(kr). \end{aligned} \quad (16)$$

Нами будет показано, что выражение (16) имеет степенную расходимость $t^{s-d/2}$ при $t \rightarrow 0_+$ в случае $\operatorname{Re} s < d/2$, в то время как перенормированная функция

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t) = \sigma_{\mathbf{x}}(s, t) - \sigma_{\mathbf{x}}^{(0)}(s, t) \quad (17)$$

(где $\sigma_{\mathbf{x}}^{(0)}(s, t)$ получается из (16) при $\Phi = 0$) разлагается в ряд Тейлора по степеням t :

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t) \underset{t \rightarrow 0_+}{\simeq} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\mathbf{x}}(s-n) \frac{(-t)^n}{n!}, \quad (18)$$

где $\chi_{\mathbf{x}}(s)$ – голоморфная функция на всей комплексной плоскости s , имеющая нули при целых неположительных вещественных значениях s . Тем самым будет доказано существование перенормированной плотности вакуумной энергии

$$\varepsilon^{\text{ren}}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(-\tfrac{1}{2}, t) = \chi_{\mathbf{x}}(-\tfrac{1}{2}). \quad (19)$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $\sigma_{\mathbf{x}}(s, t)$

Выполняя интегрирование по угловой части векторной переменной $\mathbf{r}$ и суммирование по n , представим выражение (16) в виде суммы двух слагаемых, из которых первое не зависит от расстояния до вихря:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{(0)}(s, t) = \frac{4}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)} \int_0^\infty dp p^{d-3} \int_0^\infty dk k \frac{\exp[-t(p^2 + k^2 + m^2)]}{(p^2 + k^2 + m^2)^s}, \quad (20)$$

а второе, как будет показано ниже, экспоненциально убывает на больших расстояниях от вихря:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t) = & -\frac{4}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)} \int_0^\infty dp p^{d-3} \int_0^\infty dk k \frac{\exp[-t(p^2 + k^2 + m^2)]}{(p^2 + k^2 + m^2)^s} \times \\ & \times \int_{kr}^\infty dy [J_F(y) J_{-1+F}(y) + J_{1-F}(y) J_{-F}(y)]; \end{aligned} \quad (21)$$

здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера и

$$F = \Phi - [[\Phi]], \quad 0 \leq F < 1, \quad (22)$$

$[[u]]$ обозначает целую часть величины u (ближайшее к u и не превышающее u целое число). Отметим, что из выражения (16) следует периодичность результатов по величине потока вихря Φ (т.е. зависимость только от величины F (22)), а также симметрия относительно замены $F \rightarrow 1 - F$.

Выполняя интегрирование по p и k в выражении (20), имеем

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{(0)}(s, t) = \frac{e^{-tm^2} m^{d-2s}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Psi\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - s + 1; tm^2\right), \quad (23)$$

где

$$\Psi(a, b; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty dy y^{a-1} (y+1)^{b-a-1} e^{-zy} \quad (24)$$

– вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми (см., например, [8]). Учитывая ее асимптотику при $z \rightarrow 0$, получим

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{(0)}(s, t) \underset{t \rightarrow 0+}{\sim} \frac{m^{d-2s}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(s - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(s)} + \dots, \quad \text{Re } s > \frac{d}{2}, \quad (25)$$

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{(0)}(s, t) \underset{t \rightarrow 0+}{\sim} \frac{\ln(tm^2)^{-1} - 2\gamma - \psi\left(\frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} + \dots, \quad s = \frac{d}{2}, \quad (26)$$

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{(0)}(s, t) \underset{t \rightarrow 0+}{\sim} \frac{t^{s-\frac{d}{2}}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} + \dots, \quad \text{Re } s < \frac{d}{2}, \quad (27)$$

где $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ – дигамма-функция и $\gamma = -\psi(1)$ – постоянная Эйлера.

Рассмотрим выражение (21). Используя интегральное представление

$$(p^2 + k^2 + m^2)^{-s} = \frac{(-1)^N}{\Gamma(s+N)} \int_t^\infty dw (w-t)^{s+N-1} \times \\ \times \frac{\partial^N}{\partial w^N} \exp[-(w-t)(p^2 + k^2 + m^2)], \\ \text{Re } s > -N, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

и выполняя интегрирование по p , находим

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t) = -\frac{2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{(-1)^N}{\Gamma(s+N)} \int_t^\infty dw (w-t)^{s+N-1} \times \\ \times \frac{\partial^N}{\partial w^N} \left\{ \frac{e^{-wm^2}}{w^{\frac{d}{2}-1}} \int_0^\infty dk k e^{-wk^2} \int_{kr}^\infty dy [J_F(y) J_{-1+F}(y) + J_{1-F}(y) J_{-F}(y)] \right\}. \quad (29)$$

Учитывая соотношение

$$\int_0^\infty dk k e^{-wk^2} \int_{kr}^\infty dy [J_F(y) J_{-1+F}(y) + J_{1-F}(y) J_{-F}(y)] = \\ = \frac{\sin(F\pi)}{2\pi w} \int_{\frac{r^2}{2w}}^\infty du e^{-u} [K_F(u) + K_{1-F}(u)], \quad (30)$$

где $K_\mu(z)$ – функция Макдональда порядка μ , получаем

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t) = -\frac{4 \sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}+1}} \frac{(-1)^N}{\Gamma(s+N)} \int_t^\infty dw (w-t)^{s+N-1} \times \\ \times \frac{d^N}{dw^N} \left\{ \frac{e^{-wm^2}}{w^{\frac{d}{2}}} \int_{\frac{r^2}{2w}}^\infty du e^{-u} [K_F(u) + K_{1-F}(u)] \right\}. \quad (31)$$

Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t) = -\frac{d}{dt} \sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s+1, t). \quad (32)$$

Переходя к пределу $t = 0_+$ в (31), получаем

$$\chi_{\mathbf{x}}(s) \equiv \lim_{t \rightarrow 0_+} \sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t) = -\frac{4 \sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}+1}} \frac{(-1)^N}{\Gamma(s+N)} \int_0^\infty dw w^{s+N-1} \times \\ \times \frac{d^N}{dw^N} \left\{ \frac{e^{-wm^2}}{w^{\frac{d}{2}}} \int_{\frac{r^2}{2w}}^\infty du e^{-u} [K_F(u) + K_{1-F}(u)] \right\}. \quad (33)$$

Интегрированием по частям можно привести последнее выражение к виду

$$\chi_{\mathbf{x}}(s) = -\frac{4 \sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}+1} \Gamma(s)} \int_0^\infty dw w^{s-\frac{d}{2}-1} e^{-wm^2} \int_{\frac{r^2}{2w}}^\infty du e^{-u} [K_F(u) + K_{1-F}(u)], \quad (34)$$

откуда, используя интегральное представление

$$e^{-u} [K_F(u) + K_{1-F}(u)] = 4 \int_1^\infty dv \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} \operatorname{ch}[(2F - 1) \operatorname{Arch} v] e^{-2uv^2}, \quad (35)$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{x}}(s) = & -\frac{16 \sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}+1} \Gamma(s)} \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{d}{2}-s} \times \\ & \times \int_1^\infty \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} \operatorname{ch}[(2F - 1) \operatorname{Arch} v] v^{s-\frac{d}{2}-1} K_{s-\frac{d}{2}}(2mrv). \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, мы получили соотношения (31), (32) и (36) в области $\operatorname{Re} s > -N$ (см. (28)), причем соотношения (32) и (36) не зависят от величины N . Выбирая значение N как угодно большим, получаем соотношения (32) и (36) фактически на всей комплексной плоскости s . Тем самым доказывается справедливость разложения (18), где функция $\chi_{\mathbf{x}}(s)$ определяется выражением (36). На больших расстояниях от вихря имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t) = & -\frac{\sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(s)} \frac{e^{-2mr}}{mr} \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{d}{2}-s} \left(1 - \frac{m}{r}t\right)^{s-1} \times \\ & \times \{1 + O[(mr)^{-1}]\}, \quad mr \gg 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Отметим также, что функция $\chi_{\mathbf{x}}(s)$ (36) и, следовательно, функция $\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t)$ (18) могут быть аналитически продолжены по переменной d как голоморфные функции на всю комплексную плоскость d .

3. ЯДРО ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Как видно из выражения (36), функция $\chi_{\mathbf{x}}(s)$ голоморфна на всей комплексной плоскости s и имеет простые нули при целых неположительных вещественных значениях s . Следовательно,

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(0, t) \underset{t \rightarrow 0_+}{\simeq} 0, \quad (38)$$

т.е. и функция $\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(0, t)$, и все ее производные обращаются в нуль в точке $t = 0_+$. Действительно, можно выписать точное выражение

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(0, t) = -\frac{4 \sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}+1}} t^{-\frac{d}{2}} e^{-tm^2} \int_{\frac{r^2}{2t}}^\infty du e^{-u} [K_F(u) + K_{1-F}(u)], \quad (39)$$

из которого в свою очередь получаем асимптотику

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(0, t) = & -\frac{2 \sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d+1}{2}}} t^{\frac{1-d}{2}} r^{-1} \exp[-tm^2 - t^{-1}r^2] [1 + O(tr^{-2})], \\ & 0 < t \ll r^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, учитывая, что в отсутствие вихря ($F = 0$)

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{(0)}(0, t) = \frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \quad (41)$$

(см. (23)), приходим к следующему асимптотическому выражению для ядра теплопроводности в присутствии вихря ($0 < F < 1$):

$$\sigma_{\mathbf{x}}(0, t) = \frac{e^{-tm^2}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \left\{ 1 - \sin(F\pi) \sqrt{\frac{t}{\pi}} r^{-1} e^{-t^{-1} r^2} [1 + O(tr^{-2})] \right\}, \quad 0 < t \ll r^2. \quad (42)$$

4. ПЛОТНОСТЬ ВАКУУМНОЙ ЭНЕРГИИ

Учитывая (14), (17), (18), (23) и (36), получаем следующее представление для регуляризованной плотности вакуумной энергии (5):

$$\varkappa_{\mathbf{x}}(t) = \frac{e^{-tm^2} m^{d+1}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Psi\left(\frac{d}{2}, \frac{d+3}{2}; tm^2\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\mathbf{x}}\left(-\frac{1}{2} - n\right) \frac{(-t)^n}{n!}, \quad \frac{r^2}{t} \gg 1, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{x}}\left(-\frac{1}{2} - n\right) &= \frac{64 \sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}+2}} (-1)^n \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{d+1}{2}+n} \int_1^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} \times \\ &\times \operatorname{ch}[(2F-1) \operatorname{Arch} v] v^{-\frac{d+1}{2}-n-1} K_{\frac{d+1}{2}+n}(2mrv). \end{aligned} \quad (44)$$

При $t \rightarrow 0_+$ выражение (43) имеет ведущую расходимость вида $t^{-(d+1)/2}$ и следующие за ней расходимости вида $t^{-(d+1)/2+l}$, где $0 < l < [(d+1)/2]$, причем в случае нечетных значений d имеется также логарифмическая расходимость $\ln(tm^2)^{-1}$ (см. (25)–(27)). Однако все расходимости сокращаются после вычитания (6):

$$\varkappa_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(t) \underset{t \rightarrow 0_+}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\mathbf{x}}\left(-\frac{1}{2} - n\right) \frac{(-t)^n}{n!}. \quad (45)$$

Таким образом, для перенормированной плотности вакуумной энергии получаем выражение (см. (19) и (44))

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{ren}}(\mathbf{x}) \equiv \lim_{t \rightarrow 0_+} \varkappa_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(t) &= \frac{16 \sin(F\pi)}{(4\pi)^{\frac{d+3}{2}}} \left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{d+1}{2}} \int_1^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} \times \\ &\times \operatorname{ch}[(2F-1) \operatorname{Arch} v] v^{-\frac{d+3}{2}} K_{\frac{d+1}{2}}(2mrv). \end{aligned} \quad (46)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что асимптотически при $t \rightarrow 0_+$ ядро теплопроводности в присутствии сингулярного магнитного вихря отличается от ядра теплопроводности в свободной теории на величину, которая меньше любой, как угодно большой степени t (см. (41) и (42)). В то же время разность регуляризованных плотностей вакуумной энергии в присутствии и в отсутствие сингулярного магнитного вихря (6) представляется в виде разложения Тейлора по степеням t (45), все коэффициенты которого отличаются от нуля при нецелых значениях потока вихря ($0 < F < 1$) (см. (44)). Переходом к предельному значению $t = 0_+$ определяется перенормированная плотность вакуумной энергии (46).

Отметим, что функция $\chi_{\mathbf{x}}(s)$ (36), через которую выражаются коэффициенты разложения функции $\sigma_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s, t)$ (18) в ряд Тейлора по степеням t , совпадает с перенормированной плотностью дзета-функции, полученной в работе [4],

$$\zeta_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s) = \langle \mathbf{x} | (-\nabla^2 + m^2)^{-s} | \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x} | (-\partial^2 + m^2)^{-s} | \mathbf{x} \rangle. \quad (47)$$

Последняя функция определена в области $\text{Re } s > d/2$ и затем аналитически продолжена на всю комплексную плоскость s . В отличие от этого в настоящей работе метод аналитического продолжения не используется, и функция $\chi_{\mathbf{x}}(s)$ определяется непосредственно на всей комплексной плоскости s . Совпадение функций $\chi_{\mathbf{x}}(s)$ и $\zeta_{\mathbf{x}}^{\text{ren}}(s)$ обусловлено отмеченным выше фактическим совпадением при $t \rightarrow 0_+$ ядер теплопроводности в присутствии и в отсутствие вихря. С этим, в частности, связано и то, что два разных способа регуляризации УФ-расходимости – с помощью экспоненциального множителя $\exp(-tE_{\lambda}^2)$ (используемый в настоящей работе) и с помощью степенного множителя E_{λ}^{-1-2s} (использованный в работе [4]) – приводят к одному и тому же результату для перенормированной плотности вакуумной энергии (46); подчеркнем еще раз, что способ [4] предполагает аналитическое продолжение по комплексной переменной s .

Как показано в работе [5], при индуцировании плотности вакуумной энергии регулярной конфигурацией напряженности внешнего статического магнитного поля разные способы регуляризации УФ-расходимости приводят к одному результату лишь в случае $d = 2$, в то время как в случае $d \geq 3$ результаты различаются. Обусловлено это различием коэффициентов асимптотического при $t \rightarrow 0_+$ разложения ядер теплопроводности в присутствии и в отсутствие внешнего поля. Было показано, что использование регуляризации УФ-расходимости с помощью экспоненциального множителя позволяет получить достаточно последовательным и самосогласованным образом перенормированную плотность вакуумной энергии, имеющую физический смысл. Тем самым поставлена под вопрос возможность использования в случае $d \geq 3$ способов, предполагающих аналитическое продолжение. В частности, было отмечено, что способ регуляризации с помощью степенного множителя приводит при $d = 3$ и $d = 4$ к совершенно неприемлемым результатам, которые в случае однородных внешних полей противоречат общепризнанным результатам более чем шестидесятилетней давности Гайзенберга и Ойлера [9] и Вайскопфа [10].

Поэтому в настоящей работе задача индуцирования вакуумной энергии сингулярным магнитным вихрем решена с использованием именно экспоненциальной регуляризации. В то же время показано, почему в данном случае к правильному результату приводит также и способ регуляризации, предполагающий аналитическое продолжение по аргументу дзета-функции.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Министерства науки Украины (проект 2.4/320).

Список литературы

- [1] *А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
- [2] *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980.
- [3] *Н. Бирелл, П. Девис.* Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
- [4] *Yu. A. Sitenko, A. Yu. Babansky.* Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 379.
- [5] *Ю. А. Ситенко, Д. Г. Ракутянский.* ЯФ. 1998. Т. 61. С. 876.
- [6] *H. B. G. Casimir.* Proc. K. Ned. Akad. Wetensc. 1948. V. 51. P. 793; Physica. 1953. V. 19. P. 846.
- [7] *E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko, C. Zerbini.* Zeta Regularization Techniques with Applications. Singapore: World Scientific, 1994.
- [8] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. М.: Наука, 1973.
- [9] *W. Heisenberg, H. Euler.* Z. Phys. 1936. V. 98. P. 714.
- [10] *V. Weisskopf.* Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd. 1936. V. 16. № 6. P. 1.

Поступила в редакцию 8.VI.1998 г.,
после доработки 30.X.1998 г.