Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Пронин, К. В. Степаньянц, Непертурбативное эффективное действие $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 1, 82–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:13:45

© 1999 г.

П. И. Пронин*, К. В. Степаньянц*

НЕПЕРТУРБАТИВНОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Исследуются непертурбативные эффекты в $N = 1$ суперсимметричных теориях Янга–Миллса с полями материи исходя из связи пертурбативных и точных аномалий. В общем случае показано, что суперпотенциал генерируется инстантонами и должен содержать конденсат глюино. Для суперпотенциала получено точное выражение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее интересных проблем теории поля является исследование ее непертурбативной динамики. Хорошо известно [1, 2], что, помимо пертурбативных поправок, существуют также и инстантонные вклады, которые представляют собой ряд по топологическому числу. С другой стороны, для $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в приближении постоянного поля в [3] был получен точный результат, верный вне рамок теории возмущений. Было показано [4, 5], что асимптотика данного результата действительно правильно воспроизводит одноинстантонную поправку, т.е. точный результат – это просто сумма ряда инстантонных поправок.

Попытки получения точных результатов для $N = 1$ суперсимметричных теорий предпринимались в работах [6, 7]. Однако данные результаты не согласуются при $N_f < N_c$ с инстантонными вычислениями [6]. (При $N_f = N_c - 1$ расхождения имеются начиная с двухинстантонной поправки.) Кроме того, способ проверки согласия с инстантонными вычислениями при $N_f \geq N_c$ не является красивым и естественным. При $N_f = N_c$ опять же неестественным образом возникает множитель Лагранжа. Как будет показано в настоящей работе, результаты Аффлека–Дайна–Зайберга также не воспроизводят квантовые аномалии.

В принципе на пертурбативном уровне аномалии правильно воспроизводит эффективный лагранжиан Венециано–Янкиеловича [8], содержащий конденсат глюино. Од-

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: pronin@theor.phys.msu.su; stepan@theor.phys.msu.su

нако он не применим вне рамок теории возмущений.

Целью настоящей работы является получение точного выражения для эффективного лагранжиана $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса вне рамок теории возмущений. Оно должно правильно воспроизводить аномалии, согласовываться с инстантонными вычислениями и иметь структуру, по крайней мере, напоминающую эффективное действие $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (поскольку последняя также имеет и $N = 1$ суперсимметрию). Достигнуть данной цели позволяет подход, основанный на связи точных и пертурбативных аномалий.

Наша статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем основные сведения о $N = 1$ суперсимметрии и вводим необходимые обозначения. В разделе 3 исследуется структура инстантонных вкладов в аномалии на основе изучения закона преобразования меры интегрирования по коллективным координатам. Затем в разделе 4 упоминается вывод упомянутого выше соотношения между точными и пертурбативными аномалиями, которое используется в разделе 5 для получения точного эффективного действия. Краткий обзор результатов дается в заключении. В приложения вынесен ряд вспомогательных фактов.

2. $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Безмассовая $N = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(N_c)$ и N_f мультиплетами материи описывается действием

$$S = \frac{1}{16\pi} \text{tr} \text{Im} \left(\tau \int d^4x d^2\theta W^2 \right) + \frac{1}{4} \int d^4x d^4\theta \sum_{A=1}^{N_f} (\phi_A^+ e^{-2V} \phi^A + \tilde{\phi}^{+A} e^{2V} \tilde{\phi}_A), \quad (1)$$

где суперполя материи ϕ и $\tilde{\phi}$ принадлежат фундаментальному и антифундаментальному представлениям калибровочной группы $SU(N_c)$.

Здесь были использованы следующие обозначения:

$$A_\mu = e A_\mu^a T^a \quad \text{и т.д.,} \quad \text{tr } T^a T^b = \delta^{ab},$$

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{e^2} \quad (2)$$

и

$$V(x, \theta) = -\frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta A_\mu(x) + i\sqrt{2}(\bar{\theta}\theta)(\bar{\theta}\gamma_5\psi_2(x)) + \frac{i}{4}(\bar{\theta}\theta)^2 D,$$

$$W(y, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \left(i\sqrt{2}\psi_2(y) + i\theta D(y) + \frac{1}{2} \Sigma_{\mu\nu} \theta F_{\mu\nu}(y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\theta}(1 + \gamma_5) \theta \gamma^\mu D_\mu \psi_2(y) \right), \quad (3)$$

$$\phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2} \bar{\theta}(1 + \gamma_5) \psi_1(y) + \frac{1}{2} \bar{\theta}_1(1 + \gamma_5) \theta f(y),$$

$$y^\mu = x^\mu + \frac{i}{2} \bar{\theta} \gamma^\mu \gamma_5 \theta.$$

Исключая вспомогательные поля, мы получаем, что в компонентах действие (1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{e^2} \text{Re tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i\bar{\lambda}(1 + \gamma_5)\gamma^\mu D_\mu \lambda + \frac{\theta e^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \right) + \\
& + \sum_A \int d^4x \left\{ D_\mu \varphi_A^+ D^\mu \varphi^A + D_\mu \tilde{\varphi}^{+A} D^\mu \tilde{\varphi}_A + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu \Psi - \right. \\
& - i\bar{\Psi}_A(1 - \gamma_5)\lambda\varphi^A + i\varphi_A^+\bar{\lambda}(1 - \gamma_5)\Psi^A - i\tilde{\varphi}^{+A}\bar{\Psi}_A(1 + \gamma_5)\lambda + i\bar{\lambda}(1 - \gamma_5)\Psi^A\tilde{\varphi}_A + \\
& \left. + \frac{1}{2}(\varphi_A^+ T^a \varphi^A - \tilde{\varphi}^{+A} T^a \tilde{\varphi}_A)^2 \right\}, \tag{4}
\end{aligned}$$

где мы ввели дираковский спинор

$$\Psi \equiv \frac{1}{2} [(1 + \gamma_5)\psi_1 + (1 - \gamma_5)\tilde{\psi}_1]. \tag{5}$$

В безмассовом случае действие инвариантно относительно преобразований

$$\begin{aligned}
U(1)_1 : \quad W(\theta) &\rightarrow e^{i\alpha} W(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta), \quad \phi(\theta) \rightarrow \phi(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta), \quad \tilde{\phi}(\theta) \rightarrow \tilde{\phi}(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta), \\
U(1)_2 : \quad W(\theta) &\rightarrow W(\theta), \quad \phi(\theta) \rightarrow e^{i\beta} \phi(\theta), \quad \tilde{\phi}(\theta) \rightarrow e^{i\beta} \tilde{\phi}(\theta), \tag{6}
\end{aligned}$$

что в терминах компонентных полей записывается как

$$\begin{aligned}
U(1)_1 : \quad A_\mu &\rightarrow A_\mu, \quad \varphi \rightarrow \varphi, \quad \tilde{\varphi} \rightarrow \tilde{\varphi}, \\
\lambda &\rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \lambda, \quad \Psi \rightarrow e^{-i\alpha\gamma_5} \Psi; \\
U(1)_2 : \quad A_\mu &\rightarrow A_\mu, \quad \varphi \rightarrow e^{i\beta} \varphi, \quad \tilde{\varphi} \rightarrow e^{i\beta} \tilde{\varphi}, \\
\lambda &\rightarrow \lambda, \quad \Psi \rightarrow e^{i\beta\gamma_5} \Psi. \tag{7}
\end{aligned}$$

Сохранение соответствующих токов

$$\begin{aligned}
J_1^\mu &= \bar{\lambda}^a(1 + \gamma_5)\gamma^\mu \lambda^a + \sum_A \bar{\Psi}_A \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_A, \\
J_2^\mu &= -\sum_A \bar{\Psi}_A \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_A - i \sum_A (\varphi_A^* D^\mu \varphi_A - D^\mu \varphi_A^* \varphi_A + \tilde{\varphi}_A^* D^\mu \tilde{\varphi}_A - D^\mu \tilde{\varphi}_A^* \tilde{\varphi}_A) \tag{8}
\end{aligned}$$

нарушается на квантовом уровне из-за наличия аномалий. В рамках теории возмущений имеем

$$\begin{aligned}
\partial_\mu J_1^\mu &= (-N_f + N_c) \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = (N_f - N_c) \frac{1}{16\pi^2} \text{Im tr} \int d^2\theta W^2, \\
\partial_\mu J_2^\mu &= N_f \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = -N_f \frac{1}{16\pi^2} \text{Im tr} \int d^2\theta W^2. \tag{9}
\end{aligned}$$

Однако существует возможность построить безаномальную симметрию. Действительно, из (9) следует, что ток

$$J_R^\mu \equiv J_1^\mu + \frac{N_f - N_c}{N_f} J_2^\mu = \bar{\lambda}^a (1 + \gamma_5) \gamma^\mu \lambda^a + \frac{N_c}{N_f} \sum_A \bar{\Psi}_A \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_A - \\ - i \sum_A \left(1 - \frac{N_c}{N_f} \right) (\varphi_A^* D^\mu \varphi_A - D^\mu \varphi_A^* \varphi_A + \tilde{\varphi}_A^* D^\mu \tilde{\varphi}_A - D^\mu \tilde{\varphi}_A^* \tilde{\varphi}_A) \quad (10)$$

сохраняется даже на квантовом уровне.

Этот ток генерируется следующими преобразованиями:

$$U(1)_R : \quad W(\theta) \rightarrow e^{i\alpha_R} W(e^{-i\alpha_R \gamma_5} \theta), \\ \phi(\theta) \rightarrow \exp\left(i\alpha_R \frac{N_f - N_c}{N_f}\right) \phi(e^{-i\alpha_R \gamma_5} \theta), \\ \tilde{\phi}(\theta) \rightarrow \exp\left(i\alpha_R \frac{N_f - N_c}{N_f}\right) \tilde{\phi}(e^{-i\alpha_R \gamma_5} \theta). \quad (11)$$

Далее нам также потребуется произвольная комбинация $U(1)_1$ и $U(1)_2$, которая получается при $\beta = x\alpha$ в (7), т.е.

$$U(1)_x : \quad W(\theta) \rightarrow e^{i\alpha} W(e^{-i\alpha \gamma_5} \theta), \\ \phi(\theta) \rightarrow e^{ix\alpha} \phi(e^{-i\alpha \gamma_5} \theta), \\ \tilde{\phi}(\theta) \rightarrow e^{ix\alpha} \tilde{\phi}(e^{-i\alpha \gamma_5} \theta), \quad (12)$$

где x – произвольная постоянная.

В частности, при $x = (N_f - N_c)/N_f$ мы получаем $U(1)_R$ -преобразования, при $x = 0$ – $U(1)_1$ -преобразования и при $x \rightarrow \infty$ (после переопределения $\alpha \rightarrow \alpha/x$) – $U(1)_2$ -преобразования.

Соответствующий ток есть

$$J_x^\mu \equiv J_1^\mu + x J_2^\mu = \bar{\lambda}^a (1 + \gamma_5) \gamma^\mu \lambda^a + (1 - x) \sum_A \bar{\Psi}_A \gamma^\mu \gamma_5 \Psi_A - \\ - i \sum_A x (\varphi_A^* D^\mu \varphi_A - D^\mu \varphi_A^* \varphi_A + \tilde{\varphi}_A^* D^\mu \tilde{\varphi}_A - D^\mu \tilde{\varphi}_A^* \tilde{\varphi}_A). \quad (13)$$

В рамках теории возмущений

$$\partial_\mu J_x^\mu = (-N_f + N_c + xN_f) \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = \\ = (N_f - N_c - xN_f) \frac{1}{16\pi^2} \text{Im tr} \int d^2\theta W^2. \quad (14)$$

3. ИНСТАНТОННЫЕ ВКЛАДЫ В АНОМАЛИИ И СТРУКТУРА ЭФФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Найдем наиболее общую возможную структуру инстантонных поправок к аномалиям и суперпотенциалу в $N = 1$ суперсимметричной $SU(N_c)$ -теории Янга–Миллса с N_f супермультиплетами материи.

Эффективный лагранжиан может быть представлен как сумма следующих частей [8]:

$$L_{\text{eff}} = L_k + L_a + L_m, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} L_k &= \int d^4\theta K(S, S^*, \Phi, \Phi^*), \\ L_a &= \text{Re} \int d^2\theta w(S, \Phi) \end{aligned} \quad (16)$$

и $S \equiv \text{tr } W^2$. Здесь L_k обозначает кинетический член, который не дает вклада в аномалию, L_a – голоморфная часть суперпотенциала, а L_m – массовый член. Далее мы будем рассматривать только безмассовый случай ($L_m = 0$). Следовательно, нетривиальный вклад в аномалии дает только L_a , и это единственная часть, которая может быть исследована в рамках предлагаемого подхода. (Наш метод не может дать никакой информации о возможном кинетическом члене.)

Суть предлагаемого подхода заключается в том, что мы будем вычислять аномалии двумя различными способами и сравнивать результаты. Действие инвариантно относительно группы $U(1)_1 \times U(1)_2$. Однако более удобно исследовать аномалию $U(1)_x$ -симметрии, построенной в разделе 2.

Совершая $U(1)_x$ -преобразования в эффективном действии, мы получаем, что

$$\Gamma \rightarrow \Gamma' = \text{Re} \int d^4x d^2\theta w \left(e^{2i\alpha} S(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta), e^{ix\alpha} \phi(e^{-i\alpha\gamma_5}\theta) \right). \quad (17)$$

Производя замену $\theta \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\theta$ и учитывая, что

$$\int d^2\theta = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\theta} (1 + \gamma_5) \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}, \quad (18)$$

имеем

$$\Gamma' = \text{Re} \int d^4x d^2\theta e^{-2i\alpha} w \left(e^{2i\alpha} S(\theta), e^{ix\alpha} \phi(\theta) \right). \quad (19)$$

Аномалия получается дифференцированием эффективного действия по параметру преобразования α , что немедленно дает

$$\langle \partial_\mu J_x^\mu \rangle = - \frac{\partial \Gamma'}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = - \text{Im} \int d^2\theta \left(2w - 2 \frac{\partial w}{\partial S} S - x \frac{\partial w}{\partial v} v \right), \quad (20)$$

где поля ϕ и $\tilde{\phi}$ были заменены их вакуумным средним v . (Для простоты мы предположили, что все v_i равны; краткий обзор основных сведений о структуре пространства модулей дан в приложении А.)

С другой стороны, аномалия может быть найдена из закона преобразования меры интегрирования по коллективным координатам [9].

На одноинстантонном уровне в данном случае существует ряд бозонных нулевых мод (четыре трансляции a^μ , масштабное преобразование ρ и $N_c^2 - 1$ калибровочных преобразований), $2N_c$ нулевых мод для глюино (соответствующих суперсимметричным (ϵ_a) и суперконформным (β_a) преобразованиям) и $2N_f$ нулевых мод для мультиплетов материи (суперсимметрия ϵ_A). Каждая нулевая мода должна удаляться интегрированием по соответствующей коллективной координате. Окончательное выражение для меры интегрирования по коллективным координатам имеет вид [10]

$$\begin{aligned} d\mu &= \text{const} \int d^4a \frac{d\rho}{\rho^5} (M\rho)^{4N_c} d(\mathcal{G}) \frac{1}{M^{N_c+N_f} \rho^{N_c}} \prod_{a=1}^{N_c} d\epsilon_a d\bar{\beta}_a \prod_{A=1}^{N_f} \frac{d\epsilon_A d\tilde{\epsilon}_A}{\rho^2 v^2} \exp\left(-\frac{8\pi^2}{e^2}\right) = \\ &= \text{const} \Lambda^{3N_c-N_f} \int d^4a d\rho \rho^{3N_c-2N_f-5} \frac{1}{v^{2N_f}} d(\mathcal{G}) \prod_{a=1}^{N_c} d\epsilon_a d\bar{\beta}_a \prod_{A=1}^{N_f} d\epsilon_A d\tilde{\epsilon}_A, \end{aligned} \quad (21)$$

где учтены нормировки всех нулевых мод. Интегралы по калибровочным нулевым модам $d\mathcal{G}$ и постоянные множители выписаны чисто схематически, т.к. они несущественны для дальнейшего рассмотрения. Знание конкретного выражения для действия в пределе постоянного поля [11] не является обязательным, достаточно помнить, что это некоторая безразмерная функция коллективных координат ϕ и, возможно, W . Это действие не инвариантно относительно $U(1)_x$ -преобразований

$$\begin{aligned} W &\rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} W, & \theta &\rightarrow e^{-i\alpha\gamma_5} \theta, \\ \phi &\rightarrow e^{ix\alpha} \phi, & \tilde{\phi} &\rightarrow e^{ix\alpha} \tilde{\phi}, \\ \epsilon_a &\rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \epsilon_a, & \beta_a &\rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \beta_a, \\ \epsilon_A &\rightarrow e^{i(x-1)\alpha\gamma_5} \epsilon_A, & \tilde{\epsilon}_A &\rightarrow e^{i(x-1)\alpha\gamma_5} \tilde{\epsilon}_A, \\ \rho &\rightarrow \rho, & a^\mu &\rightarrow a^\mu, \end{aligned} \quad (22)$$

в чем в принципе несложно убедиться, подставив конкретные выражения из [2].

Аналогично $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [12] мы совершаем дополнительную замену

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow e^{-i\alpha\gamma_5} \theta, & x^\mu &\rightarrow e^{-2i\alpha} x^\mu, \\ \epsilon_A &\rightarrow e^{-ix\alpha\gamma_5} \epsilon_A, & \tilde{\epsilon}_A &\rightarrow e^{-ix\alpha\gamma_5} \tilde{\epsilon}_A, \\ \rho &\rightarrow e^{-2i\alpha} \rho, & a^\mu &\rightarrow e^{-2i\alpha} a^\mu, \end{aligned} \quad (23)$$

так что окончательные преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_5)\epsilon_a &\rightarrow e^{i\alpha}(1 + \gamma_5)\epsilon_a, & (1 - \gamma_5)\beta_a &\rightarrow e^{-i\alpha}(1 - \gamma_5)\beta_a, \\ (1 + \gamma_5)\epsilon_A &\rightarrow e^{-i\alpha}(1 + \gamma_5)\epsilon_A, & (1 + \gamma_5)\tilde{\epsilon}_A &\rightarrow e^{-i\alpha}(1 + \gamma_5)\tilde{\epsilon}_A, \\ \rho &\rightarrow e^{-2i\alpha}\rho, & a^\mu &\rightarrow e^{-2i\alpha}a^\mu, \quad \theta \rightarrow e^{-2i\alpha\gamma_5}\theta \end{aligned} \quad (24)$$

и (за исключением θ) находятся в соответствии с размерностью полей. Безразмерное действие было бы инвариантно, если бы мы дополнительно совершили вращения

$$v \rightarrow e^{i(2-x)\alpha}v, \quad W \rightarrow e^{2i\alpha\gamma_5}W. \quad (25)$$

Однако этого делать нельзя, поскольку v и W не являются коллективными координатами (и, следовательно, переменными интегрирования). Это означает, что при преобразованиях (24)

$$\begin{aligned} S(v, W) &\rightarrow S(e^{i(x-2)\alpha}v, e^{-2i\alpha\gamma_5}W), \\ d\mu(v) &\rightarrow \exp[i\alpha(-2(3N_c - 2N_f) - 2N_f x + 2N_f(x - 2) - 2N_f)] d\mu(e^{i(x-2)\alpha}v) = \\ &= \exp[i\alpha(-2(3N_c - N_f))] d\mu(e^{i(x-2)\alpha}v). \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично n -инстантонная мера преобразуется как

$$d\mu(v) \rightarrow \exp[i\alpha(-2n(3N_c - N_f))] d\mu(e^{i(x-2)\alpha}v). \quad (27)$$

Кроме того, необходимо совершить обратную замену в оставшемся интеграле, присутствующем в определении суперпотенциала,

$$\int d^4x d^2\theta \rightarrow e^{4i\alpha} \int d^4x d^2\theta, \quad (28)$$

так что из (25), (27) и (28) мы заключаем, что

$$w(v, W) \rightarrow \exp[i\alpha(-2n(3N_c - N_f) + 4)] w(e^{i(x-2)\alpha}v, e^{-2i\alpha\gamma_5}W). \quad (29)$$

Так как в действие входит только комбинация $(1 + \gamma_5)W$, для аномалии мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu J_R^\mu \rangle &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \text{Im} \int d^2\theta \left(-2n(3N_c - N_f) + (-2 + x)v \frac{\partial}{\partial v} - 2W \frac{\partial}{\partial W} + 4 \right) w. \end{aligned} \quad (30)$$

Сравнивая (20) и (30), получаем следующее уравнение для n -инстантонного вклада в суперпотенциал:

$$\left(2v \frac{\partial}{\partial v} + 3W \frac{\partial}{\partial W} - 6\right) w^{(n)} = -2n(3N_c - N_f) w^{(n)}. \quad (31)$$

Его решение имеет вид

$$w^{(n)} = W^2 g_n \left(\frac{v^3}{W^2} \right) \left(\frac{\Lambda}{v} \right)^{n(3N_c - N_f)} = S g_n \left(\frac{v^3}{S} \right) \left(\frac{\Lambda}{v} \right)^{n(3N_c - N_f)}, \quad (32)$$

где g_n – произвольная функция. Ее явная форма будет найдена далее исходя из связи пертурбативных и точных аномалий.

Конечно, результат (32) находится в полном соответствии с размерными аргументами и не зависит от конкретного выбора симметрии (т.е. x).

4. СВЯЗЬ ПЕРТУРБАТИВНЫХ И ТОЧНЫХ АНОМАЛИЙ

Нашей задачей является получение точных результатов исходя из аномалий. Известно, что вне рамок теории возмущений пертурбативное выражение для аномалий не применимо. Однако, как оказалось, точная аномалия – это просто вакуумное среднее от пертурбативной. Для доказательства удобно использовать метод, аналогичный методу Фуджикавы [13].

Заметим, что при киральных преобразованиях классическое действие меняется как

$$S \rightarrow S + \int d^4x \partial_\mu \alpha j_5^\mu, \quad (33)$$

где j_5^μ – соответствующий ток. Поэтому, совершая киральное преобразование в производящем функционале

$$Z[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int DA D\bar{\psi} D\psi \exp \left(iS + i \int d^4x (A_\mu J^\mu + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi) \right), \quad (34)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{Z} \frac{\delta}{\delta \alpha} \int DA D\bar{\psi}' D\psi' \times \\ &\times \exp \left(iS + i \int d^4x \partial_\mu \alpha j_5^\mu + i \int d^4x (A_\mu J^\mu + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi) \right) \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (35)$$

Следует учесть, что мера интегрирования по фермионным координатам может нетривиально меняться при киральных преобразованиях. При вычислении соответствующего детерминанта мы приходим к плохо определенному выражению, которое должно быть

специальным образом регуляризовано. Подробно данное исследование выполнено в [13], где было показано, что

$$D\bar{\psi}' D\psi' = D\bar{\psi} D\psi \exp \left(i \int d^4x \alpha \mathbf{A} \right), \quad (36)$$

здесь $\mathbf{A}$ – пертурбативная аномалия. Поэтому из (35) мы получаем, что

$$\begin{aligned} 0 = \frac{i}{Z} \frac{\delta}{\delta \alpha} \int DA D\bar{\psi} D\psi \exp \left(iS + i \int d^4x \partial_\mu \alpha j_5^\mu + i \int d^4x \alpha \mathbf{A} + \right. \\ \left. + i \int d^4x (A_\mu J^\mu + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi) \right) \Big|_{\alpha=0} = \langle \partial_\mu j_5^\mu - \mathbf{A} \rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

благодаря чему окончательно имеем

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = \langle \mathbf{A} \rangle. \quad (38)$$

Конечно, данное выражение зависит от источников, которые изначально присутствовали в производящем функционале. Однако, поскольку далее мы будем работать с эффективным действием, то данные источники удобно выразить стандартным образом через вакуумные средние полей:

$$A_\mu = \frac{\delta W}{\delta J^\mu}, \quad \psi = \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}}, \quad \bar{\psi} = \frac{\delta W}{\delta \eta}, \quad (39)$$

где $W = -i \ln Z$.

Как несложно убедиться, это приводит к тому, что аномалия (38) оказывается равной вариации эффективного действия по параметру кирального преобразования:

$$\langle \partial_\mu j_5^\mu \rangle = - \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}, \quad (40)$$

что уже было использовано ранее.

Преобразования $U(1)_R$ могут быть рассмотрены совершенно аналогично.

Далее исходя из соотношения (38) между аномалиями мы получаем точные результаты.

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Эффективный лагранжиан для $N = 1$ суперсимметричных теорий.

Общая структура. Применим (38) к $N = 1$ суперсимметричной $SU(N_c)$ -теории Янга–Миллса с N_f супермультиплетами материи. Вакуумное среднее пертурбативной аномалии (14) имеет вид

$$\langle \partial_\mu J_x^\mu \rangle = (N_f - N_c - xN_f) \frac{1}{16\pi^2} \text{Im} \int d^2\theta u, \quad (41)$$

где $u \equiv \langle \text{tr } W^2 \rangle$. Следовательно, эффективный лагранжиан должен зависеть, в частности, и от $S = \text{tr } W^2$. Этот результат новым не является. Аналогичное исследование на пертурбативном уровне проводилось в [8]. Однако в данной работе мы не собираемся ограничивать себя рамками теории возмущений и, следовательно, предполагать, что $u = \text{tr } W^2$.

Сравнивая (41) с (20) и принимая во внимание, что равенство должно иметь место при всех x , мы получаем

$$\begin{aligned} 2w - 2 \frac{\partial w}{\partial S} S &= - \frac{1}{16\pi^2} (N_f - N_c) u, \\ \frac{\partial w}{\partial v} v &= - \frac{1}{16\pi^2} N_f u. \end{aligned} \quad (42)$$

Данная система уравнений очень близка к результатам [8], однако существует принципиальное отличие: $u \neq S$. Следовательно, мы можем только исключить неизвестную u и прийти к уравнению

$$2w - 2 \frac{\partial w}{\partial S} S - \frac{N_f - N_c}{N_f} \frac{\partial w}{\partial v} v = 0. \quad (43)$$

Это уравнение соответствует точному сохранению R -симметрии на непертурбативном уровне. Аналогичное условие было использовано в [6, 7], но зависимость $w = w(S)$ была там утеряна. Совершенно ясно, что, исключив суперполе S , мы получим суперпотенциал Аффлека–Дайна–Зайберга [14]. Это фактически соответствует наложению условия

$$\frac{\partial w}{\partial S} = 0. \quad (44)$$

В настоящей работе мы не хотим обсуждать законность такой операции и отсылаем читателя к статье [14], хотя по нашему мнению ситуация в данном случае более сложная. Для полного анализа необходимо знание кинетической части эффективного действия, о которой в настоящий момент мы не имеем никакой информации, за исключением некоторых предположений [8]. Необходимо отметить, что в случае $N_c > N_f$ калибровочная группа не является полностью нарушенной и, следовательно, низкоэнергетическая теория содержит безмассовые степени свободы на пертурбативном уровне. Мы полагаем, что в этом случае устранение калибровочно-инвариантного суперполя должно быть обосновано более тщательно.

Однако данное важное обсуждение выходит далеко за рамки настоящей работы. Мы хотели бы только подчеркнуть, что присутствие суперполя S является обязательным следствием уравнений (42).

Решение (43) должно быть согласовано с инстантонными вычислениями. Несложно проверить, что единственное решение (43), согласующееся с (32)¹⁾, есть

$$w = \frac{1}{32\pi^2} S f(z), \quad f(z) = f_{\text{pert}}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad (45)$$

где

$$z \equiv \frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{v^{2N_f} S^{N_c - N_f}} \quad (46)$$

– безразмерный параметр.

В окончательном результате z должен быть выражен через калибровочно-инвариантные переменные. Конечно, результат будет зависеть от структуры пространства модулей, которая кратко упоминается в приложении А. В приложении Б показано, что

$$z = \begin{cases} \frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M S^{N_c - N_f}}, & N_f < N_c, \\ \frac{\Lambda^{3N_c - N_f} S^{N_f - N_c}}{\det M - (\tilde{B}^{A_1 A_2 \dots A_{N_f - N_c}} M_{A_1}^{B_1} M_{A_2}^{B_2} \dots M_{A_{N_f - N_c}}^{B_{N_f - N_c}} B_{B_1 B_2 \dots B_{N_f - N_c}})}, & N_f \geq N_c. \end{cases} \quad (47)$$

Для определения f_{pert} заметим, что на пертурбативном уровне $u = S$. Следовательно, в данном случае (42) дает

$$\frac{\partial f_{\text{pert}}}{\partial z} z = 1, \quad (48)$$

так что

$$w = \frac{1}{32\pi^2} S \left(\ln z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right). \quad (49)$$

Подставляя w в (42), получаем

$$u = S \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n \right), \quad (50)$$

что определяет все аномалии теории в соответствии с (41). На пертурбативном уровне оба выражения (49) и (50), конечно же, находятся в согласии с работами [8].

¹⁾ Оно соответствует

$$g_n(x) = \frac{1}{32\pi^2} c_n x^{n(N_c - N_f)}, \quad n \geq 1,$$

в (32).

5.2. Эффективный лагранжиан для $N = 1$ суперсимметричных теорий.

Точный результат. Найдем точное выражение для функции f . Общая структура суперпотенциала, найденная в п. 5.1, напоминает структуру непертурбативного препотенциала в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [15]. Возможно ли и насколько использовать такую аналогию?

Начнем с подстановки (45) в (42), что дает

$$S \frac{df}{dz} z = u \quad (51)$$

(а следовательно, u/S зависит только от z).

Данное уравнение решается по аналогии с $N = 2$ суперсимметричной $SU(2)$ -теорией Янга–Миллса. В терминах $N = 1$ суперполей ее действие записывается следующим образом:

$$\frac{1}{16\pi} \operatorname{Im} \int d^4x d^2\theta \left(\frac{d^2 F}{d\phi^2} W^2 + \frac{1}{2} \int d^2\bar{\theta} \frac{dF}{d\phi} \phi^+ \right). \quad (52)$$

Сравним его с выражением

$$S_a = \frac{1}{32\pi^2} \operatorname{Re} \int d^4x d^2\theta S f(z), \quad (53)$$

вводя $a \equiv z^{-1/4}$ (данный выбор степени будет объяснен далее). Первое слагаемое в (52) совпадет с (53), если

$$-2\pi i \frac{d^2 F}{da^2} \equiv f, \quad \frac{d^2 U}{da^2} \equiv \frac{u}{S}. \quad (54)$$

После такой замены уравнение (51) примет вид

$$F + F_D = \frac{2i}{\pi} U, \quad (55)$$

где

$$F_D = F - a a_D, \quad a_D = \frac{dF}{da}. \quad (56)$$

Дважды дифференцируя уравнение (55) по параметру U , мы получаем уравнение Пикарда–Фуша

$$\left(\frac{d^2}{dU^2} + L(U) \right) \begin{pmatrix} a \\ a_D \end{pmatrix} = 0, \quad (57)$$

где $L(U)$ – пока произвольная функция.

На пертурбативном уровне (см. (48))

$$\begin{cases} f_{\text{pert}} = -4 \ln a, \\ u_{\text{pert}} = W^2 = S, \end{cases}$$

так что

$$\begin{cases} F = \frac{i}{\pi} a^2 \left(\frac{3}{2} - \ln a \right), \\ U = \frac{a^2}{2} \end{cases} \quad (58)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2U}, \\ a_D &= -\frac{2i}{\pi} (a \ln a - a) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{2U} (\ln(2U) - 2) \end{aligned} \quad (59)$$

являются двумя линейно независимыми решениями уравнения Пикарда–Фуша:

$$\left(\frac{d^2}{dU^2} + \frac{1}{4U^2} \right) \begin{pmatrix} a \\ a_D \end{pmatrix} = 0. \quad (60)$$

Однако пертурбативное решение не удовлетворяет условию [3, 16]

$$\text{Im } \tau > 0,$$

где

$$\tau = \frac{d^2 F}{da^2} = \frac{da_D}{da} = \frac{i}{2\pi} f, \quad (61)$$

которое получается точно так же, как и в случае $N = 2$. Следовательно, две сингулярности (в точках $U = 0$ и $U = \infty$) невозможны.

Для нахождения числа сингулярностей заметим, что решение (49) должно содержать все положительные степени z и, следовательно, будет инвариантно относительно Z_4 преобразований $a \rightarrow e^{i\pi k/2} a$. Принимая во внимание (54) и (50), мы заключаем, что соответствующими преобразованиями в плоскости U будут отображения $U \rightarrow e^{i\pi k} U$. Таким образом, сингулярности $L(U)$ в уравнении Пикарда–Фуша (57) должны появляться парами: любой сингулярности при $U = U_0$ соответствует сингулярность при $U = -U_0$.

Следовательно, рассматриваемая модель полностью эквивалентна $N = 2$ суперсимметричной $SU(2)$ -теории Янга–Миллса без материи и единственно возможной формой уравнения Пикарда–Фуша (с точностью до переопределения Λ) является следующая:

$$\left(\frac{d^2}{dU^2} + \frac{1}{4(U^2 - 1)} \right) \begin{pmatrix} a \\ a_D \end{pmatrix} = 0 \quad (62)$$

с решением [3, 16]

$$\begin{aligned} a(U) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{\sqrt{x-U}}{\sqrt{x^2-1}}, \\ a_D(U) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_1^U dx \frac{\sqrt{x-U}}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Его единственность и, следовательно, единственность выбора (62) доказаны в [17].

Функция F может быть найдена при помощи уравнения

$$\frac{dF}{dU} = a_D \frac{da}{dU} \quad (64)$$

и представляется в виде

$$F = -\frac{i}{\pi} a^2 \left(\ln a + \sum_{n=0}^{\infty} F_n a^{-4n} \right), \quad (65)$$

так что

$$f = -2\pi i \frac{d^2 F}{da^2} = -4 \ln a + \sum_{n=0}^{\infty} f_n a^{-4n} = \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n. \quad (66)$$

Теперь уже становится ясно, что выбор $a = z^{-1/4}$ был сделан для получения правильной структуры инстантонных поправок (45).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы применили метод получения точных результатов, основанный на связи пертурбативных и точных аномалий, к $N = 1$ суперсимметричным теориям. При этом оказалось возможным решить проблему согласования результатов инстантонных вычислений и точного суперпотенциала (расхождения имелись при $N_c > N_f$). Предложенный подход автоматически приводит к зависимости эффективного действия от конденсата глюино, которая игнорировалась во всех работах, посвященных как точным результатам, так и инстантонным вычислениям в $N = 1$ суперсимметричных теориях. Именно эта зависимость и гарантирует согласие с инстантонными вычислениями, которое доказано при помощи исследования закона преобразования меры интегрирования по коллективным координатам.

Благодарности. Авторы благодарят проф. С.В. Кетова и своих коллег из Математического института им. В.А. Стеклова за полезные обсуждения, а также проф. А.А. Славнова за внимание к работе. Особенно мы хотели бы поблагодарить В.В. Асатова за финансовую поддержку исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Классические пространства модулей $N = 1$ суперсимметричных теорий

Для описания вакуумных состояний удобно ввести две $N_f \times N_c$ -матрицы следующего вида:

$$\phi \equiv (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^{N_f}), \quad \tilde{\phi} \equiv (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_{N_f}) \quad (67)$$

(их столбцы соответствуют различным значениям цветового индекса). Энергия минимальна в случае $\phi = \tilde{\phi} \equiv v$. Совершая вращения в пространствах цвета и аромата, мы всегда можем привести матрицу v к виду

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & v_{N_f} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (68)$$

если $N_f < N_c$, и

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & v_2 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & v_{N_c} & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad (69)$$

если $N_f > N_c$.

1. $N_f < N_c$. В общем случае калибровочная группа $SU(N_c)$ нарушается до $SU(N_f - N_c)$. Следовательно, киральные суперполя в количестве

$$(N_c^2 - 1) - ((N_c - N_f)^2 - 1) = 2N_cN_f - N_f^2 \quad (70)$$

устраняются суперсимметричным механизмом Хиггса. Принимая во внимание, что исходно имелось $2N_cN_f$ киральных суперполей материи, мы получаем, что

$$2N_cN_f - (2N_cN_f - N_f^2) = N_f^2 \quad (71)$$

из них остаются безмассовыми.

Плоские направления суперпотенциала описываются калибровочно-инвариантным образом при помощи N_f^2 составных киральных суперполей

$$M_A^B = \tilde{\phi}_{Aa} \phi^{Ba}, \quad (72)$$

где a обозначает цветовой индекс.

2. $N_f \geq N_c$. Если число ароматов равно или же превышает число цветов, то исходная калибровочная группа в общем случае полностью нарушена. Следовательно, количество остающихся безмассовых суперполей составляет

$$2N_cN_f - (N_c^2 - 1) = 2N_cN_f - N_c^2 + 1. \quad (73)$$

В данном случае калибровочно-инвариантное описание пространства модулей проводится при помощи “мезонов”

$$M_A{}^B = \tilde{\phi}_{Aa} \phi^{Ba} \quad (74)$$

и “барионов”

$$\begin{aligned} B_{A_{N_c+1} A_{N_c+2} \dots A_{N_f}} &= \frac{1}{N_c!} \varepsilon_{A_1 A_2 \dots A_{N_f}} \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_{N_c}} \phi^{A_1 a_1} \phi^{A_2 a_2} \dots \phi^{A_{N_c} a_{N_c}}, \\ \tilde{B}^{A_{N_c+1} A_{N_c+2} \dots A_{N_f}} &= \frac{1}{N_c!} \varepsilon^{A_1 A_2 \dots A_{N_f}} \varepsilon_{a_1 a_2 \dots a_{N_c}} \phi_{A_1 a_1} \phi_{A_2 a_2} \dots \phi_{A_{N_c} a_{N_c}}. \end{aligned} \quad (75)$$

Однако их полное число больше чем $2N_c N_f - N_c^2 + 1$. Дело в том, что на классическом уровне данные поля не являются независимыми и удовлетворяют определенным связям. Например, в случае $N_f = N_c$ число безмассовых суперполей есть $N_f^2 + 1$, тогда как суммарное число мезонов и барионов равно $N_M + N_B = N_f^2 + 2$. Лишняя степень свободы устраняется связью

$$\det M = \tilde{B} B. \quad (76)$$

Аналогично для $N_f = N_c + 1$ имеем

$$\begin{aligned} B_A M_A{}^B &= M_B{}^A \tilde{B}_A = 0, \\ \det M (M^{-1})_A{}^B &= B_A \tilde{B}^B. \end{aligned} \quad (77)$$

Однако на квантовом уровне эти связи нарушаются инстантонными поправками [7].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Калибровочно-инвариантная форма параметра z

1. $N_f < N_c$. В данном случае единственной калибровочно-инвариантной величиной порядка v^{2N_f} является $\det M$ и, следовательно,

$$z = \frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det M S^{N_c - N_f}}. \quad (78)$$

2. $N_f \geq N_c$. В этом случае пространство модулей параметризуется мезонами $M_A{}^B$ и барионами $B_{B_1 \dots B_{N_f - N_c}}, \tilde{B}^{A_1 \dots A_{N_f - N_c}}$, связанными некоторыми условиями на классическом уровне. Данные связи нарушаются инстантонными поправками. Соответствующие модификации должны автоматически получаться из эффективного действия. Для этого необходимо исключить суперполе S . (В частности, для $N_f = N_c$ суперполе S

является естественным множителем Лагранжа.) Результат должен иметь следующий вид [18]:

$$\det M - \tilde{B}B = \text{const} \Lambda^{2N_f}, \quad N_f = N_c,$$

$$w_{\text{eff}} = \text{const} \Lambda^{-\frac{3N_c - N_f}{N_f - N_c}} \left(\det M - \left(\tilde{B}^{A_1 A_2 \dots A_{N_f - N_c}} M_{A_1}^{B_1} M_{A_2}^{B_2} \dots M_{A_{N_f - N_c}}^{B_{N_f - N_c}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times B_{B_1 B_2 \dots B_{N_f - N_c}} \right) \right)^{-\frac{1}{N_f - N_c}} + \text{э.с.}, \quad N_f > N_c. \quad (79)$$

Это может быть достигнуто тогда и только тогда, когда v^{2N_f} заменяется на

$$\det M - \left(\tilde{B}^{A_1 A_2 \dots A_{N_f - N_c}} M_{A_1}^{B_1} M_{A_2}^{B_2} \dots M_{A_{N_f - N_c}}^{B_{N_f - N_c}} B_{B_1 B_2 \dots B_{N_f - N_c}} \right), \quad (80)$$

так что окончательно имеем

$$z = \frac{\Lambda^{3N_c - N_f} S^{N_f - N_c}}{\det M - \left(\tilde{B}^{A_1 A_2 \dots A_{N_f - N_c}} M_{A_1}^{B_1} M_{A_2}^{B_2} \dots M_{A_{N_f - N_c}}^{B_{N_f - N_c}} B_{B_1 B_2 \dots B_{N_f - N_c}} \right)}. \quad (81)$$

Список литературы

- [1] *G. 't Hooft*. Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 8; Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 3432.
- [2] *M. Shifman, A. Vainstein, V. Zakharov*. Nucl. Phys. B. 1980. V. 165. P. 45; *V. Novikov, M. Shifman, A. Vainstein, V. Zakharov*. Nucl. Phys. B. 1983. V. 229. P. 407; 1985. V. 260. P. 157.
- [3] *N. Seiberg, E. Witten*. Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19.
- [4] *D. Finnell, P. Pouliot*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 453. P. 225.
- [5] *A. Yung*. Nucl. Phys. B. 1997. V. 485. P. 38.
- [6] *I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg*. Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 493.
- [7] *N. Seiberg*. Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 6857.
- [8] *G. Veneziano, S. Yankielowicz*. Phys. Lett. B. 1982. V. 113. P. 231; *T. Taylor, G. Veneziano, S. Yankielowicz*. Nucl. Phys. B. 1983. V. 218. P. 493.
- [9] *V. Novikov, M. Shifman, A. Vainstein, V. Zakharov*. Nucl. Phys. B. 1983. V. 229. P. 394.
- [10] *S. Cordes*. Nucl. Phys. B. 1986. V. 273. P. 629.
- [11] *C. Callan, R. Dashen, D. Gross*. Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 2717.
- [12] *П. И. Пронин, К. В. Степаньянц*. ТМФ. 1998. Т. 115. С. 402.
- [13] *K. Fujikawa*. Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1195; 1980. V. 44. P. 1733.
- [14] *K. Intriligator, R. Leigh, N. Seiberg*. Phys. Rev. D. 1994. V. 50. P. 1092.
- [15] *N. Seiberg*. Phys. Lett. B. 1988. V. 206. P. 75.
- [16] *A. Bilal*. Duality in $N = 2$ SUSY $SU(2)$ Yang–Mills theory: A pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten. hep-th/9601007.
- [17] *G. Bonelli, M. Matone, M. Tonin*. Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 6466; *R. Flume, M. Magro, L. O'Rai feartaigh, I. Sachs, O. Schnetz*. Nucl. Phys. B. 1997. V. 494. P. 331.
- [18] *M. Peskin*. Duality in supersymmetric Yang–Mills theory. hep-th/9702094.

Поступила в редакцию 29.XII.1998 г.,
после доработки 3.II.1999 г.