Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Горжини, Д. П. Санкович, Н. И. Танака, Об одной модели неидеального бозе-газа, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 1, 130–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf765>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 06:47:22

© 1999 г. М. Горжини*, Д. П. Санкович†, Н. И. Танака‡

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

Рассмотрено полиномиальное обобщение модели Хуанга–Дэвиса в теории неидеального бозе-газа. Доказана выполнимость условия гауссовой доминантности для всех значений химического потенциала. Показано, что нижняя граница критической температуры модели Хуанга–Дэвиса, полученная методом инфракрасных оценок, совпадает с точным значением этой величины в теории Дэвиса. С помощью метода больших отклонений доказана возможность обобщенной бозе-конденсации в полиномиальной модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении системы взаимодействующих бозонов в приближении среднего поля энергия взаимодействия описывается слагаемым $a\hat{N}^2/(2V)$, добавляемым к свободному гамильтониану. Положительный параметр a задает интенсивность взаимодействия, $\hat{N}$ – оператор числа частиц, V – объем ограниченной измеримой области ν -мерного пространства R^ν (или решетки Z^ν), в которой расположены бозоны. Смысл слагаемого $a\hat{N}^2/(2V)$ может быть понят в рамках классической оптики, когда движение каждой частицы в системе рассматривается как распространение света в однородной оптической среде (так называемая аппроксимация с помощью показателя преломления). При этом добавка к энергии пропорциональна плотности. Такая модель взаимодействующих бозонов обычно называется моделью Хуанга–Дэвиса [1, 2].

В работах [3, 4] было показано, как данная модель описывает парное отталкивание бозонов в пределе слабого дальнего действия. При малых плотностях модель Хуанга–Дэвиса иногда рассматривается в качестве приближения для парного взаимодействия с двухчастичным потенциалом $U(x - y) = a\delta(x - y)$.

В статье [2] с помощью вероятностных методов, включающих, в частности, центральную предельную теорему, было проведено строгое изучение обобщенной модели Хуанга–Дэвиса в бесконечном объеме. В данной модели взаимодействие имеет вид $Vf(\hat{n})$, где $\hat{n} = \hat{N}/V$. Функция f предполагается непрерывно дифференцируемой на полуоси $[0, \infty)$ и удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$. Было

*Университет Ла-Серены, Ла-Серена, Чили

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

‡Университет Сан-Паулу, Сан-Паулу, Бразилия

получено точное выражение для средней плотности числа частиц как функции химического потенциала и показано наличие сингулярности у функции плотности в точке бозе-эйнштейновской конденсации при определенных условиях на вид функции f . Было также доказано, что, в отличие от идеального бозонного газа, неидеальный бозе-газ Хуанга–Дэвиса имеет (в бесконечном объеме) одни и те же свойства как в большом каноническом ансамбле, так и в каноническом ансамбле. Рассматриваемая модель оказалась устойчивой при малых возмущениях. В этой модели имеет место обычная бозе-эйнштейновская конденсация.

В работах [5, 6] детально изучалась проблема конденсации Бозе–Эйнштейна в газе невзаимодействующих бозонов. В этих работах установлено различие между макроскопическим заполнением основного состояния (обычная бозе-эйнштейновская конденсация) и так называемой обобщенной конденсацией. Макроскопическое заполнение основного состояния происходит тогда, когда число частиц в этом состоянии становится пропорциональным объему. Обобщенная же конденсация возникает, когда число частиц с энергиями, лежащими в малой окрестности нуля, становится пропорциональным объему. Величина макроскопического заполнения сильно зависит от формы сосуда, в котором расположен бозонный газ. Наличие обобщенной конденсации связано только с условием, что плотность ρ принимает критическое значение ρ_c . Обобщенная конденсация оказалась устойчивой при возмущении свободного гамильтониана средним полем.

Изучение некоторых модельных систем неидеального бозе-газа с помощью метода больших уклонений [7] проведено в работах [8–11]. В статьях [12, 13] для исследования подобных моделей применялся метод инфракрасных оценок и было доказано существование при конечной температуре макроскопического заполнения основного состояния.

2. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ХУАНГА–ДЭВИСА

Пусть $\Lambda \subset R^{\nu}$ – открытая область с гладкой границей $\partial\Lambda$ и единичным объемом и пусть $L \geq 1$. Определим область $\Lambda_L = \{Lx | x \in \Lambda\}$ и пространство комплексных квадратично-интегрируемых функций на ней $\mathcal{H}^L = L^2(\Lambda_L)$. Объем области Λ_L обозначим как $|\Lambda_L| \equiv V_L$. Оператор $\hat{S}^L = -\Delta$ самосопряжен на пространстве $\mathcal{H}^L$, имеет дискретный спектр

$$0 = E_L(0) < E_L(1) \leq E_L(2) \leq \dots$$

и собственные функции $\{\phi_k(x)\}$, удовлетворяющие одночастичной задаче

$$-\frac{1}{2}\Delta\phi_k(x) = E_L(k)\phi_k(x)$$

с некоторыми заданными на $\partial\Lambda$ граничными условиями. Набор функций $\{\phi_k(x)\}$ образует базис в пространстве $L^2(\Lambda_L)$.

Любая функция $\psi(x_1, \dots, x_N) \in L^2(\Lambda_L^N)$ может быть разложена по базису

$$\left\{ \prod_{j=1}^N \phi_{k_j}(x_j) \right\}.$$

Функции

$$\psi_k(x_1, \dots, x_N) = \bigotimes_{j=1}^N \phi_{k_j}(x_j),$$

где $k = \{k_1, k_2, \dots, k_N\}$, образуют в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}^{N,L} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}^L$$

полный ортонормированный базис со скалярным произведением

$$(\psi_k, \psi_l) = \prod_{j=1}^N (\phi_{k_j}, \phi_{l_j}).$$

Будем рассматривать подпространство $\mathcal{H}_+^{N,L}$, являющееся сужением пространства $\mathcal{H}^{N,L}$ до симметричных относительно перестановки аргументов функций (бозе-статистика). Функции из подпространства $\mathcal{H}_+^{N,L}$ однозначно разлагаются по базису симметризованных функций $\{\psi_k^+\}$, построенному на основе базиса $\{\psi_k\}$ с помощью симметризации

$$(S_+^N \psi_k)(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \sum_p P \psi_k(x_1, \dots, x_N) = \psi_k^+(x_1, \dots, x_N),$$

где S_+^N – оператор симметризации и P – оператор перестановки аргументов, $P\psi(x_1, \dots, x_N) = \psi(x_{p_1}, \dots, x_{p_N})$. Оператор симметризации является ортогональным проектором пространства $\mathcal{H}^{N,L}$ на пространство $\mathcal{H}_+^{N,L}$. Набор функций $\{\psi_k^+(x_1, \dots, x_N)\}$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}_+^{N,L}$.

Положим $\mathcal{H}_+^{0,L} = C$. Тогда симметричное пространство Фока $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}^L)$ является прямой ортогональной суммой

$$\mathcal{F}_+(\mathcal{H}^L) = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_+^{N,L}.$$

Определим модельный гамильтониан неидеального бозе-газа соотношением

$$\hat{H}^L = \hat{H}_0 + \frac{a}{rV_L^{r-1}} \hat{N}^r. \quad (1)$$

Оператор $\hat{H}_0$ действует в пространстве $\mathcal{F}_+(\mathcal{H}^L)$ и отвечает свободному гамильтониану, построенному соответствующим образом [14] из оператора $\hat{S}^L$. Оператор $\hat{N}$ задает оператор числа частиц,

$$\hat{N} \psi_k^+(x_1, \dots, x_N) = N \psi_k^+(x_1, \dots, x_N).$$

В формуле (1) целое число $r \geq 2$. В дальнейшем будем использовать бозе-операторы рождения и уничтожения [14, 15], удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] \equiv \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i = \delta_{i,j}.$$

Модель бозе-газа с гамильтонианом (1) назовем полиномиальным обобщением модели Хуанга–Дэвиса. Используя описанную в разделе 1 оптическую аналогию, можно сказать, что данная полиномиальная модель соответствует учету дисперсии показателя преломления.

Зададим состояние термодинамического равновесия соотношением

$$\langle \dots \rangle_{\hat{H}^L} = \frac{\text{Tr} \dots e^{-\beta(\hat{H}^L - \mu \hat{N})}}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H}^L - \mu \hat{N})}}.$$

Средняя плотность в конечном объеме V_L есть $\rho_{V_L} = \langle \hat{n} \rangle_{\hat{H}^L}$. При переходе к термодинамическому пределу

$$\rho = \lim_{L \rightarrow \infty} \rho_{V_L}.$$

Оператор $\hat{n}$ называется оператором плотности, μ и β представляют собой химический потенциал и обратную температуру, соответственно.

Определим в фокковском пространстве множество финитных векторов

$$\mathcal{M} = \{ \phi = \{ \phi^{(N)} \}_{N=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_+(\mathcal{H}^L) \mid \exists N_\phi : \phi^{(N)} = 0 \text{ для всех } N > N_\phi \}.$$

Очевидно, что замыкание $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{F}_+(\mathcal{H}^L)$. Операторы $\hat{H}_0$ и $\hat{N}$ не ограничены на $\mathcal{M}$.

3. ГАУССОВА ДОМИНАНТНОСТЬ

Большая статистическая сумма системы с гамильтонианом (1) задается соотношением

$$\begin{aligned} Z_{\beta, \mu}[\hat{H}^L] &= \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}^L - \mu \hat{N})}] = \sum_{N=0}^{\infty} \text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}}[e^{-\beta(\hat{H}^L - \mu \hat{N})}] = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}}[e^{-\beta \hat{H}^{N,L}}], \end{aligned}$$

где $\hat{H}^{N,L} = \hat{H}^L|_{\mathcal{H}_+^{N,L}}$, $Z_{\beta, \mu}[\hat{H}^L]_{N=0} = 1$, $[\hat{H}^L]_{N=1} = \hat{H}_0$ и след $\text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}}(\cdot)$ обозначает ограничение следа на пространство $\mathcal{H}_+^{N,L}$.

Рассмотрим семейство операторов

$$\begin{aligned} \hat{H}^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) &= \sum_{j \geq 1} \lambda(j) \left(\hat{a}_j^\dagger - \frac{h_j^*}{\sqrt{V_L}} \right) \left(\hat{a}_j - \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right) + \frac{a}{r V_L^{r-1}} \hat{N}^r \equiv \\ &\equiv \hat{H}_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) + \frac{a}{r V_L^{r-1}} \hat{N}^r, \end{aligned}$$

где $\lambda(j) = E_L(j)$ и только конечное число параметров $h_j \in C$ отлично от нуля. Для каждого N существует такой унитарный оператор $\hat{U}_N$, что

$$\text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}} \left[\exp \left\{ -\beta \hat{H}_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right\} \right] = \text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}} [\hat{U}_N^\dagger e^{-\beta \hat{H}_0} \hat{U}_N] = \text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}} [e^{-\beta \hat{H}_0}]. \quad (2)$$

Можно записать, что

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\exp \left\{ -\beta \left(\widehat{H}^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) - \mu \widehat{N} \right) \right\} \right] = \\ = \exp \left(\frac{\beta \mu^2 r V_L^{r-1}}{4a} \right) \text{Tr} \left[\exp \left\{ -\beta \left(\widehat{H}_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) + \frac{a}{r V_L^{r-1}} \widehat{W} \right) \right\} \right], \end{aligned}$$

где

$$\widehat{W} = \left(\frac{\mu r V_L^{r-1}}{2a} - \widehat{N} \right)^2 + \widehat{N}^r - \widehat{N}^2.$$

Ясно, что оператор $\widehat{W}|_{\mathcal{H}_+^{N,L}}$ положителен и самосопряжен при $r \geq 2$.

Воспользуемся теперь неравенством Голдена–Томпсона [16], справедливым для самосопряженных операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$,

$$\text{Tr}(e^{\widehat{A}+\widehat{B}}) \leq \text{Tr}(e^{\widehat{A}} e^{\widehat{B}}).$$

Применяя его в нашем случае, для любых μ имеем

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\exp \left\{ -\beta \left(\widehat{H}^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) - \mu \widehat{N} \right) \right\} \right] \leq \\ \leq \exp \left(\frac{\beta \mu^2 r V_L^{r-1}}{4a} \right) \text{Tr} \left[\exp \left\{ -\beta \widehat{H}_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta a}{r V_L^{r-1}} \widehat{W} \right\} \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Вспомнив определение следа, находим

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}} \left[\exp \left\{ -\beta \widehat{H}_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{\beta a}{r V_L^{r-1}} \widehat{W} \right\} \right] = \\ = \sum_{k=\{k_1, \dots, k_N\}} \left(\psi_k^+(x_1, \dots, x_N), \left[\exp \left\{ -\beta \widehat{H}_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right\} \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -\frac{\beta a}{r V_L^{r-1}} \widehat{W} \right\} \right) \psi_k^+(x_1, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Заметив теперь, что

$$\begin{aligned} \exp \left(-\beta \frac{a}{r V_L^{r-1}} \widehat{W} \right) \psi_k^+(x_1, \dots, x_N) = \\ = \exp \left\{ -\beta \frac{a}{r V_L^{r-1}} \left[\left(\frac{\mu r V_L^{r-1}}{2a} - N \right)^2 + N^r - N^2 \right] \right\} \psi_k^+(x_1, \dots, x_N), \end{aligned}$$

перепишем неравенство (3) в виде

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\exp \left\{ -\beta \left(\widehat{H}^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) - \mu \widehat{N} \right) \right\} \right] \leq \exp \left(\frac{\beta \mu^2 r V_L^{r-1}}{4a} \right) \times \\ \times \sum_{N=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\beta a}{r V_L^{r-1}} \left[\left(\frac{\mu r V_L^{r-1}}{2a} - N \right)^2 + N^r - N^2 \right] \right\} \times \\ \times \text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}} \left[\exp \left\{ -\beta \widehat{H}_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right\} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Учитывая равенства (2) и факт коммутативности операторов $\hat{N}$ и $\hat{H}_0$ между собой, находим из неравенства (4), что

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\exp \left\{ -\beta \left(\hat{H}^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) - \mu \hat{N} \right) \right\} \right] &\leq \exp \left(\frac{\beta \mu^2 r V_L^{r-1}}{4a} \right) \times \\ &\times \sum_{N=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\beta a}{r V_L^{r-1}} \left[\left(\frac{\mu r V_L^{r-1}}{2a} - N \right)^2 + N^r - N^2 \right] \right\} \text{Tr}_{\mathcal{H}_+^{N,L}} [e^{-\beta \hat{H}_0}] = \\ &= \text{Tr} [e^{-\beta(\hat{H}^L - \mu \hat{N})}]. \end{aligned}$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для полиномиального обобщения модели Хуанга–Дэвиса (1) при любых $\beta \geq 0$ и μ имеет место условие гауссовой доминантности*

$$Z_{\beta, \mu} \left[\hat{H}^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right] \leq Z_{\beta, \mu} [\hat{H}^L]. \quad (5)$$

В большом каноническом ансамбле термодинамический потенциал (давление) для системы с гамильтонианом $\hat{S}$ определяется соотношением

$$P_{\beta, \mu}[\hat{S}] = \frac{1}{\beta V_L} \ln \text{Tr} e^{-\beta(\hat{S} - \mu \hat{N})}.$$

Рассмотрим оператор $\hat{S}_\lambda = \hat{S} + \lambda \hat{U}$, где $\lambda \in R^1$. При соответствующих предположениях о виде операторов $\hat{S}$ и $\hat{U}$ [15] имеют место неравенства Боголюбова

$$\frac{\lambda}{V_L} \langle \hat{U} \rangle_{\hat{S}_\lambda} \leq P_{\beta, \mu}[\hat{S}] - P_{\beta, \mu}[\hat{S}_\lambda] \leq \frac{\lambda}{V_L} \langle \hat{U} \rangle_{\hat{S}}. \quad (6)$$

Пусть $\hat{H}_\alpha^L = \hat{H}^L - \alpha \hat{N}$, где гамильтониан $\hat{H}^L$ задан соотношением (1) и параметр $\alpha > 0$ будет фиксирован ниже. Соотношение (6) приводит к неравенствам

$$-\alpha \langle \hat{n} \rangle_{\hat{H}_\alpha^L} + \frac{a}{r} \langle \hat{n}^r \rangle_{\hat{H}_\alpha^L} \leq P_{\beta, \mu}[\hat{H}_0] - P_{\beta, \mu}[\hat{H}_\alpha^L] \leq -\alpha \langle \hat{n} \rangle_{\hat{H}_0} + \frac{a}{r} \langle \hat{n}^r \rangle_{\hat{H}_0}. \quad (7)$$

Рассмотрим эти неравенства в области $\mu < 0$. В этом случае $\langle \hat{n}^r \rangle_{\hat{H}_0} = \langle \hat{n} \rangle_{\hat{H}_0}^r$. Поскольку для произвольного $r \geq 2$ функция $s(x) = x^r$ при $x > 0$ непрерывно дифференцируема и выпукла вниз, то в силу неравенства Иенсена [17]

$$\langle \hat{n}^r \rangle_{\hat{H}_\alpha^L} \geq \langle \hat{n} \rangle_{\hat{H}_\alpha^L}^r.$$

Тогда неравенства (7) после предельного перехода $L \rightarrow \infty$ примут вид

$$-\alpha \rho + \frac{a}{r} \rho^r \leq \lim_{L \rightarrow \infty} (P_{\beta, \mu}[\hat{H}_0] - P_{\beta, \mu}[\hat{H}_\alpha^L]) \leq -\alpha \rho_0 + \frac{a}{r} \rho_0^r,$$

где ρ_0 обозначает среднюю плотность идеального бозе-газа в бесконечном объеме при $\mu < 0$.

Выберем теперь параметр α из условия

$$\alpha(\rho) = \frac{a}{r} \left(\frac{\rho^r - \rho_0^r}{\rho - \rho_0} \right).$$

Тогда

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu} [\hat{H}_\alpha^L] = \lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu} [\hat{H}_0] + \frac{a}{r} \left(\frac{\rho^r - \rho_0^r}{\rho - \rho_0} \right) \rho_0 - \frac{a}{r} \rho_0^r.$$

Рассмотрим предел $\rho \rightarrow \rho_0$, при этом

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \alpha(\rho) = a \rho_0^{r-1} \equiv \tilde{\alpha}$$

и

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu} [\hat{H}_{\tilde{\alpha}}^L] = \lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu} [\hat{H}_0] + a \frac{r-1}{r} \rho_0^r. \quad (8)$$

Кроме того, очевидно, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu} [\hat{H}_{\tilde{\alpha}}^L] = \lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu'} [\hat{H}^L],$$

где $\mu' = \mu + \tilde{\alpha}$.

Взяв гамильтониан

$$\hat{H}_\alpha^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right)$$

вместо гамильтониана $\hat{H}_\alpha^L$ в соотношении (8), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu'} \left[\hat{H}^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right] &= \lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu} \left[\hat{H}_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right] + a \frac{r-1}{r} \rho_0^r \leq \\ &\leq \lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu} [\hat{H}_0] + a \frac{r-1}{r} \rho_0^r = \lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \mu'} [\hat{H}^L]. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства Боголюбова (6) позволяют при $\mu < 0$ получить соотношение

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \tilde{\alpha} + \mu} \left[\hat{H}^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V_L}} \right\} \right) \right] \leq \lim_{L \rightarrow \infty} P_{\beta, \tilde{\alpha} + \mu} [\hat{H}^L],$$

являющееся следствием условия гауссовой доминантности, доказанного выше при произвольных μ .

4. БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ В МОДЕЛИ ХУАНГА–ДЭВИСА

В работах [12,13] изучалась модель неидеального бозе-газа Хуанга–Дэвиса в импульсном представлении вторичного квантования, гамильтониан которой имеет вид

$$\hat{H} = \sum_p (\lambda(p) - \mu) \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{H}_1, \quad (9)$$

где $\lambda(p)$ – неотрицательная функция, $p \in R^\nu$ и

$$\hat{H}_1 = \frac{a}{2V_L} \hat{N}^2, \quad \hat{N} = \sum_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \equiv \sum_p \hat{n}_p.$$

Макроскопическое заполнение основного состояния (бозе-конденсация) имеет место в данной системе при выполнении условия

$$\Delta \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{V_L} \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle_{\hat{H}} \neq 0. \quad (10)$$

В этом разделе мы, используя неравенство Репсторфа [18], получим точное значение критической температуры в модели (9), тем самым уточнив результаты работы [12].

В работе [12] при условии $\mu \leq a\rho$ была найдена верхняя оценка для внутреннего произведения Боголюбова

$$(\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_p) \leq \frac{1}{\beta(\lambda(p) + a\rho - \mu)}, \quad (11)$$

где по определению

$$(\hat{A}, \hat{B}) = Z^{-1} \int_0^1 \text{Tr} [\hat{A} e^{-\beta(1-x)\hat{H}} \hat{B} e^{-\beta x \hat{H}}]$$

для произвольных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Оценка (11) является непосредственным следствием тождества

$$1 = \langle [\hat{a}_p, \hat{a}_p^\dagger] \rangle = (\hat{a}_p, [\beta \hat{H}, \hat{a}_p^\dagger])$$

и неравенства

$$(\hat{a}_p^\dagger, \hat{n} \hat{a}_p) \geq \langle \hat{n} \rangle (\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_p).$$

Заметим, что неравенство (11) сильнее неравенства

$$(\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_p) \leq \frac{1}{\beta \lambda(p)},$$

следующего из условия гауссовой доминантности (5).

Используя стандартную процедуру, описанную в работе [12], можно получить следующее неравенство для температурного среднего:

$$\langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle_{\hat{H}^L} \leq \frac{1}{e^{\beta(\lambda(p) + a\rho - \mu)} - 1}, \quad (12)$$

где $p \neq 0$, $\mu \leq a\rho$.

Воспользуемся теперь неравенством Репсторфа, являющимся уточнением известного неравенства Боголюбова,

$$\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle \geq \langle [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] \rangle \left[\exp \left(\frac{\beta \langle [\hat{A}^\dagger, [\hat{H}, \hat{A}]] \rangle \langle [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] \rangle}{|\langle [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] \rangle|^2} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (13)$$

Выбрав $\hat{A} = \hat{a}_p$ в неравенстве (13), находим

$$\langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle_{\hat{H}^L} \geq \frac{1}{e^{\beta(\lambda(p) + a\rho - \mu)} - 1}, \quad (14)$$

где $p \neq 0$, $\mu \leq a\rho$. Сравнивая соотношения (12) и (14), видим, что в термодинамическом пределе нами получено точное значение среднего $\langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle$.

ТЕОРЕМА 2 [12]. В модели Хуанга–Дэвиса условие (10) выполняется при $\nu \geq 3$ и $\beta > \beta_c$, где β_c есть единственное решение уравнения

$$\rho_c = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int \frac{d^\nu p}{e^{\beta_c \lambda(p)} - 1} \quad (15)$$

и $\mu_c = a\rho_c$.

Поскольку выше значение парного коррелятора $\langle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \rangle$ было найдено точно, можно утверждать, что величина β_c в уравнении (15) дает точное значение критической температуры модели. Таким образом, при $\mu_c = a\rho_c$ и $\rho > \rho_c$ имеем для плотности конденсата

$$\Delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta \leq \beta_c, \\ \rho - \rho_c, & \text{если } \beta > \beta_c. \end{cases}$$

При $\lambda(p) = p^2/2$ и $\nu = 3$ уравнение (15) принимает вид

$$\rho_c = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{(2\pi\beta_c)^{\frac{3}{2}}},$$

где дзета-функция Римана

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Данный результат совпадает с соответствующим точным результатом работы [2].

5. МЕТОД БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ХУАНГА–ДЭВИСА

Применим метод больших уклонений [7, 19] для изучения введенной в разделе 2 обобщенной модели Хуанга–Дэвиса. Этот метод был использован ранее при рассмотрении стандартной модели Хуанга–Дэвиса [9, 10].

Гамильтониан рассматриваемой модели неидеального бозе-газа диагонален по операторам чисел заполнения $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$. Поэтому можно рассматривать эти числа как случайные переменные, а не как операторы. В этом и состоит основная идея применения методов теории вероятностей при изучении данного типа моделей.

Следуя работе [10], рассмотрим вероятностное пространство Ω , элементами которого $\omega \in \Omega$ являются последовательности $\{\omega(j) \in N \mid j = 1, 2, \dots\}$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j \geq 1} \omega(j) < \infty.$$

Основными случайными величинами в развиваемом подходе являются числа заполнения $\{\sigma_j \mid j = 1, 2, \dots\}$, задаваемые отображением $\sigma_j: \Omega \rightarrow N$, которое определено как $\sigma_j(\omega) = \omega(j)$ для каждого $\omega \in \Omega$. Полное число частиц в конфигурации ω есть

$$N(\omega) = \sum_{j \geq 1} \sigma_j(\omega).$$

Гамильтониан идеального бозе-газа в этих обозначениях для каждого $L \geq 1$ принимает вид

$$H_L^0(\omega) = \sum_{j \geq 1} \lambda_L(j) \sigma_j(\omega),$$

где $0 = \lambda_L(1) < \lambda_L(2) \leq \dots$ и $\lambda_L(j) = E_L(j) - E_L(1)$. Система, как и ранее, заключена в области Λ_L конечного объема V_L .

Обобщенная полиномиальная модель Хуанга–Дэвиса задается гамильтонианом

$$\tilde{H}_L(\omega) = H_L^0(\omega) + a \frac{N_L^r(\omega)}{r V_L^{r-1}},$$

где $r \geq 1$, $N_L(\omega) = \sum_j \sigma_j(\omega)$. В работах [9, 10] был рассмотрен случай $r = 2$.

Введем плотность числа частиц $X_L = N_L/V_L$ и функцию

$$u_\alpha(x) = (\mu - \alpha)x - \frac{ax^r}{r}.$$

Так же, как и в статье [10], получаем

$$\tilde{p}_L(\mu) = p_L(\alpha) + \frac{1}{\beta V_L} \ln \int_{[0, \infty)} \exp(\beta V_L (u_\alpha \circ X_\Lambda)(x)) K_L^\alpha(dx) \quad (16)$$

для любого фиксированного $\alpha < 0$ и для любого действительного μ . Здесь $K_L^\alpha = P_L^\alpha \circ X_L^{-1}$ есть вероятностная мера на полуоси $[0, \infty)$, а $P_L^\alpha[\cdot]$ — мера идеального бозе-газа в большом каноническом ансамбле,

$$P_L^\alpha[\omega] = \exp \{ \beta [\alpha N(\omega) - H_L^0(\omega) - V_L p_L(\alpha)] \}.$$

Функция $p_L(\mu)$ — давление идеального бозе-газа,

$$p_L(\mu) = (\beta V_L)^{-1} \sum_{j \geq 1} \ln \{ 1 - \exp[\beta(\mu - \lambda_L(j))] \}^{-1}, \quad \mu < 0.$$

Заметим, что отображение $x \rightarrow u_\alpha(x)$ непрерывно и ограничено сверху на полуоси $[0, \infty)$ и что множество мер $\{K_L^\alpha, L = 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет принципу больших уклонений с весовой функцией

$$I^\alpha(x) = p(\alpha) + f(x) - \alpha x,$$

где

$$f(x) = \sup_b \{ bx - p(b) \}$$

есть преобразование Лежандра функции $p(\mu)$, а

$$p(\alpha) = \lim_{L \rightarrow \infty} p_L(\alpha)$$

(см. теорему 1 в работе [11]). Следовательно, по первой теореме Варадана предел

$$\tilde{p}(\mu) = \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{p}_L(\mu)$$

существует при следующих предположениях:

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Предел $\phi(\beta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \phi_L(\beta)$ существует при всех $\beta \in (0, \infty)$, где функция распределения $F_L(\lambda) = (V_L)^{-1} \max\{j : \lambda_L(j) \leq \lambda\}$ и $\phi_L(\beta) = \int_{[0, \infty)} \exp(-\beta\lambda) dF_L(\lambda)$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Предел $\phi(\beta)$ отличен от нуля хотя бы для одного значения $\beta \in (0, \infty)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда для конечной критической плотности ρ_c имеют место равенства

$$\tilde{p}(\mu) = a \frac{r-1}{r} (p'(a_0))^r + p(a_0), \quad (17)$$

$$\lim_{\delta \searrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{E}_L^\mu[X_L(\delta)] = (\rho - \rho_c)^+, \quad (18)$$

где $\tilde{E}_L^\mu[\cdot]$ — математическое ожидание по отношению к большому каноническому ансамблю с гамильтонианом $\tilde{H}_L$ обобщенной плотности

$$X_L(\delta) = (V_L)^{-1} \sum_{\{j: \lambda_L(j) \leq \delta\}} \sigma_j(\omega),$$

$\rho = (\tilde{p})'(\mu)$ и точка $a_0 = a_0(\mu)$ определена соотношением $a[p'(a_0)]^{r-1} = \mu - a_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (16) по теореме Варадана имеем для предельного давления

$$\begin{aligned}\tilde{p}(\mu) &= p(\alpha) + \sup_x \{u_\alpha(x) - I^\alpha(x)\} = \\ &= p(\alpha) + \sup_x \left\{ (\mu - \alpha)x - a \frac{x^r}{r} - p(\alpha) - f(x) + \alpha x \right\} = \\ &= \sup_x \left\{ \mu x - f(x) - a \frac{x^r}{r} \right\} = \sup_x \{ \mu x - \tilde{f}(x) \},\end{aligned}\quad (19)$$

где $\tilde{f}(x) = f(x) + ax^r/r$.

Можно записать, что

$$\begin{aligned}\sup_x \left\{ \mu x - \sup_b \{bx - p(b)\} - a \frac{x^r}{r} \right\} &= \sup_x \left\{ \mu x - a_0 x + p(a_0) - a \frac{x^r}{r} \right\} = \\ &= \sup_x \left\{ (\mu - a_0)x - a \frac{x^r}{r} \right\} + p(a_0),\end{aligned}\quad (20)$$

где $a_0 x - p(a_0) = \sup_b \{bx - p(b)\}$. Точка экстремума в соотношении (20) определяется равенством

$$x_0 = \left(\frac{\mu - a_0}{a} \right)^{\frac{1}{r-1}}.$$

Следовательно, имеем

$$\tilde{p}(\mu) = a \left(\frac{\mu - a_0}{a} \right)^{1 + \frac{1}{r-1}} - \frac{a}{r} \left(\frac{\mu - a_0}{a} \right)^{\frac{r}{r-1}} + p(a_0) = a \frac{r-1}{r} \left(\frac{\mu - a_0}{a} \right)^{\frac{r}{r-1}} + p(a_0).$$

Однако точка a_0 такова, что $x_0 = p'(a_0)$, т.е. $p'(a_0) = ((\mu - a_0)/a)^{1/(r-1)}$. Поэтому давление в нашей модели следующим образом выражается через давление идеального бозе-газа (ср. эту формулу с формулой (8), полученной ранее другим методом):

$$\tilde{p}(\mu) = a \frac{r-1}{r} (p'(a_0))^r + p(a_0).$$

Таким образом, соотношение (17) доказано.

Докажем теперь наличие обобщенной конденсации (18). Запишем выражение для обобщенной плотности в виде

$$V_L X_L(\delta) = V_L X_L - \sum_{\{j: \lambda_L(j) > \delta\}} \sigma_j(\omega).$$

Тогда

$$\tilde{E}_L^\mu [\exp\{\beta s V_L X_L(\delta)\}] = \exp\{\beta V_L [\tilde{p}_L(\mu; s, \delta) - \tilde{p}_L(\mu)]\}, \quad (21)$$

где $\tilde{p}_L(\mu; s, \delta)$ — давление, соответствующее гамильтониану

$$\tilde{H}_L(s, \delta) = \tilde{H}_L - sV_L X_L(\delta).$$

Из соотношения (21) следует, что

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{E}_L^\mu[X_L(\delta)] = \left. \frac{\partial \tilde{p}(\mu; s, \delta)}{\partial s} \right|_{s=0}.$$

Воспользуемся формулой (17) и соотношением

$$p(\mu; s, \delta) = \int_{[0, \delta]} p(\mu|\lambda) dF(\lambda) + \int_{[\delta, \infty)} p(\mu|\lambda + s) dF(\lambda),$$

где $p(\mu|s)$ — условное давление идеального газа, определенное равенством

$$\beta p(\mu|\lambda) = -\ln[1 - \exp(\beta(\mu - \lambda))].$$

Получим, что

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}(\mu; s, \delta)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left(\frac{\mu - a_0}{a} \right)^{\frac{1}{r-1}} - \int_{[\delta, \infty)} p'(a_0|\lambda) dF(\lambda), \quad (22)$$

где точка a_0 определена в формулировке теоремы 3. Из формулы (22) следует требуемое утверждение, т.к.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left. \frac{\partial \tilde{p}(\mu; s, \delta)}{\partial s} \right|_{s=0} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < a\rho_c^{r-1}, \\ \rho - \rho_c, & \text{если } \mu \geq a\rho_c^{r-1}, \end{cases}$$

где

$$\rho_c = \int_{[0, \infty)} p'(0|\lambda) dF(\lambda)$$

совпадает с критической плотностью идеального бозе-газа. Теорема 3 доказана.

Анализ полученных результатов позволяет установить, что давление в исследуемой модели при данной плотности является возрастающей функцией как параметра r , так и константы взаимодействия a . Количество же конденсата не зависит ни от a , ни от r и совпадает с количеством конденсата идеального бозе-газа при той же плотности.

Благодарности. Данная работа частично финансировалась кафедрой математики (Стохастический анализ и математическая физика, Чили), фондом Fapesp 1997/11508-0 (Бразилия) и РФФИ, проект 99-01-00887 (Россия).

Список литературы

- [1] К. Хуанг. Статистическая механика. М.: Мир, 1966.
- [2] E. B. Davies. Commun. Math. Phys. 1972. V. 28. P. 69.
- [3] А. С. Шварц. Тр. Моск. мат. общ-ва. 1970. Т. 22. С. 165.
- [4] J. L. Lebowitz, O. Penrose. J. Math. Phys. 1966. V. 7. P. 98.
- [5] L. J. Landau, I. E. Wilde. Commun. Math. Phys. 1970. V. 70. P. 43.
- [6] M. van den Berg, J. T. Lewis, J. V. Pulé. Helv. Phys. Acta. 1986. V. 59. P. 1271.
- [7] S. R. S. Varadhan. Commun. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. P. 261.
- [8] M. van den Berg, J. T. Lewis, J. V. Pulé. Commun. Math. Phys. 1988. V. 116. P. 1.
- [9] M. van den Berg, J. T. Lewis. Limit Theorems for Stochastic Processes associated with a Boson Gas. In: Lect. Notes in Math. V. 1325. Stochastic Mechanics and Stochastic Processes. Proc. Conf., Swansea/UK, 1986. Eds. A. Truman, I. M. Davies. Berlin: Springer, 1988. P. 16.
- [10] M. van den Berg, J. T. Lewis, P. J. Smedt. J. Stat. Phys. 1984. V. 37. P. 697.
- [11] M. van den Berg, J. T. Lewis, J. V. Pulé. Large Deviations and the Boson Gas. In: Lect. Notes in Math. V. 1325. Stochastic Mechanics and Stochastic Processes. Proc. Conf., Swansea/UK, 1986. Eds. A. Truman, I. M. Davies. Berlin: Springer, 1988. P. 24.
- [12] М. Корджини¹⁾, Д. П. Санкович. ТМФ. 1996. Т. 108. С. 421.
- [13] M. Corgini, D. P. Sankovich. Int. J. Mod. Phys. B. 1997. V. 11. P. 3329.
- [14] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [15] Н. Н. Боголюбов (мл.), Й. Г. Бранков, В. А. Загребнов, А. М. Курбатов, Н. С. Тончев. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. София: Изд-во БАН, 1981.
- [16] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.
- [17] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Г. Полиа. Неравенства. М.: ГИИЛ, 1948.
- [18] G. Roepstorff. Commun. Math. Phys. 1977. V. 53. P. 143.
- [19] R. Ellis. Entropy, large deviations and statistical mechanics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1985.

Поступила в редакцию 10.XII.1998 г.,
после доработки 3.II.1999 г.

¹⁾M. Corgini