Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Р. Алабердин, А. А. Вихорева, А. М. Савченко, М. Б. Садовникова, Применение метода компенсации “опасных” диаграмм Боголюбова для исследования магнитных сверхпроводников, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 1, 144–167

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 07:50:02

© 1999 г.

Е. Р. Алабердин*, А. А. Вихорев*,
А. М. Савченко*, М. Б. Садовникова*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОМПЕНСАЦИИ “ОПАСНЫХ” ДИАГРАММ БОГОЛЮБОВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Рассматривается калибровочная модель в теории сверхпроводимости. Модель описывает динамическую систему многих частиц, находящуюся во внешнем постоянном поле векторного (электромагнитного) потенциала. Гамильтониан исследуемой динамической системы моделирует сверхпроводящий антиферромагнетик и содержит электрон-бозонные взаимодействия второго (гамильтониан Фрелиха) и четвертого (обменное взаимодействие) порядков по электронным операторам. Данный гамильтониан учитывает взаимодействие магнитных моментов электронов проводимости. Бозонный спектр системы составляют нормальные моды связанных фонон-магнонных колебаний. Получена система уравнений совместной компенсации “опасных” (приводящих к расходимости в энергетической теории возмущений) диаграмм, соответствующих рождению из вакуума двух (бивершины) и четырех (тетравершины) электронных возбуждений. Найдено решение указанной системы уравнений, отвечающее сверхпроводящему состоянию.

1. ГАМИЛЬТониАН МОДЕЛИ

В теории сверхпроводимости известно разрушительное влияние магнонов на сверхпроводящее состояние. Тем не менее, неоднократно проводились исследования с целью выявления каких-либо возможностей того, что влияние магнонов способствует образованию сверхпроводимости. Интерес к проблеме усиливался в связи с открытием широкого класса кристаллических соединений с высокотемпературной сверхпроводимостью (ВТСП), обладающих магнитной подсистемой.

Для того чтобы выяснить, какова действительная роль магнонного спектра в образовании фермионного конденсата и при каких условиях эта роль будет положительна, в данной работе на основе метода Боголюбова в теории сверхпроводимости исследуется фермион-бозонная система многих частиц, локализованная в неодносвязном пространстве. Неодносвязность обусловлена наличием внешнего калибровочного поля.

---

*Московский государственный университет, Москва, Россия.

Созданный Боголюбовым в 1957 г. метод компенсации “опасных” диаграмм [1] в теории сверхпроводимости позволил дать математическое обоснование феноменологических предпосылок предшествующих теорий сверхпроводимости [2,3], а также привел к появлению важной концепции коллективных электронных возбуждений, имеющих положительно-определенный спектр энергий. Такие возбуждения представляют собой реальные формы движения сверхпроводящей системы и описываются посредством канонического преобразования электронных операторов. Каноническое преобразование в данном случае определяет коллективное фермионное возбуждение как квазичастицу.

Для получения характерных результатов теории сверхпроводимости, согласующихся с результатами теории БКШ [2], достаточно компенсировать “опасные” диаграммы, соответствующие рождению из вакуума двух электронных возбуждений с противоположными импульсами и спинами, т.е. “опасные” электронные бивершины [1]. При этом используется модельный гамильтониан Фрелиха [4], содержащий электрон-фононное взаимодействие второго порядка по фермионным операторам. Если в исследуемой фермион-бозонной системе преобладает магнотонный спектр, то в гамильтониане Фрелиха мы будем иметь не сумму, как это имело место для фононного спектра, а разность электронных плотностей с различными равновесными направлениями спинов. Изучение фермион-бозонной системы с преобладающим магнотонным спектром, описываемой гамильтонианом Фрелиха, приводит к выводу о невозможности сверхпроводящего состояния в такой системе независимо от внешних полей и связанных с ними свойств пространства локализации.

Гамильтониан Фрелиха учитывает только взаимодействие бозонных возбуждений с суммарной плотностью электронов проводимости. Таким образом, из двух фундаментальных свойств электрона (заряда и связанного со спином магнитного момента) модель Фрелиха учитывает только одно свойство – наличие заряда. Магнитная подсистема при этом из рассмотрения исключается.

Для того чтобы учесть магнитный момент электрона, необходимо дополнить модель Фрелиха электрон-бозонным взаимодействием четвертого порядка по фермионным операторам, что будет соответствовать взаимодействию полей электронной намагниченности. Плотность магнитных моментов – электронная намагниченность – пропорциональна плотности электронов с фиксированным равновесным направлением спина. Поэтому обменное взаимодействие между полями электронной намагниченности в сочетании с фонон-магнотонными (бозонными) возбуждениями порождает в сверхпроводящей системе электрон-бозонную связь четвертого порядка по фермионным операторам. Бозонный спектр системы составляют нормальные моды связанных фонон-магнотонных колебаний.

При этом необходимо компенсировать “опасные” диаграммы, описывающие рождение из вакуума не только двух, но также и четырех электронных квазичастиц. Вместо одного уравнения компенсации бивершин, решение которого привело в 1957 г. к теоретическому обоснованию модели БКШ, мы будем иметь систему из двух уравнений. Второе уравнение названной системы – уравнение компенсации тетравершин – связано, с одной стороны, со взаимодействием магнитных моментов электронов проводимости, а с другой стороны, с наличием калибровочного поля вектор-потенциала, т.е. с неодно-

связностью пространства локализации фермион-бозонной системы.

В свое время Боголюбов указал на необходимость учета взаимодействия между электронными парами с рассогласованными импульсами и спинами, а также рассмотрения сверхпроводящей системы во внешнем постоянном поле вектор-потенциала $\vec{A}$. Этот вывод подтверждается тем, что каноническое $(u - v)$ -преобразование, обеспечивающее компенсацию опасных бивершин, в общем случае не может обеспечить необходимой положительной определенности энергии электронных квазичастиц при всех значениях импульса. После $(u - v)$ -преобразования знакопеременная энергия электронов проводимости

$$\mathcal{E}(\vec{k}) = \frac{(\vec{k} - e\vec{A})^2}{2m} - \mathcal{E}_f,$$

где параметр $\mathcal{E}_f$ определяет уровень Ферми, трансформируется в энергию электронных квазичастиц

$$\xi(\vec{k}) = \mathcal{E}(\vec{k})(u_k^2 - v_k^2).$$

В последнем выражении корни обоих сомножителей совпадают только при специальном выборе верхней границы диапазона импульсов. В общем случае энергия задаваемых $(u - v)$ -преобразованием электронных квазичастиц при некоторых значениях импульса становится отрицательной и компенсируемые “опасные” бивершины не перестают быть “опасными”, т.е. сохраняется принципиальная возможность расходимости в используемых разложениях энергетической теории возмущений.

С точки зрения метода компенсации упомянутое выше взаимодействие между электронными парами может быть обусловлено только электрон-бозонным взаимодействием четвертого порядка по фермионным операторам, в то время как аналогичные взаимодействия второго порядка, описываемые гамильтонианом Фрелиха, обуславливают взаимодействие внутри пар. Данный вывод приводит нас к необходимости обобщения канонического преобразования электронных операторов. Обобщенное каноническое преобразование должно обеспечивать возможность совместной компенсации “опасных” электронных диаграмм, соответствующих рождению из вакуума не только двух (бивершины), но также и четырех (тетравершины) фермионных возбуждений с попарно противоположными спинами и нулевым суммарным импульсом.

Таким образом, ставится задача совместной компенсации “опасных” электронных диаграмм, соответствующих рождению из вакуума двух (бивершины) и четырех (тетравершины) фермионных возбуждений. В дальнейшем изложении будем для краткости говорить о совместной компенсации бивершин и тетравершин, подразумевая, что это “опасные”, приводящие к расходимостям в теории возмущений, квазичастичные электронные вершины.

Гамильтониан исследуемой модели запишем в виде

$$H = H_0 + H_1 + H_2, \quad (1)$$

где

$$H_0 = \sum_k [\mathcal{E}(k)(a_k^{0+}a_k^0 + a_{-k}^{1+}a_{-k}^1) + \omega_s(k)b_{k,s}^+b_{k,s}] \quad (2)$$

– спектр невзаимодействующих фермионных и бозонных возбуждений,

$$H_1 = \sum_{\substack{k,q \\ l=k-q}} \Psi_s(l) \left(\sum_{\sigma=0,1} \tau_s^\sigma a_k^{\sigma+} a_q^\sigma \right) b_{-l,s}^+ + \text{э.с.} \quad (3)$$

– гамильтониан Фрелиха,

$$H_2 = \sum_{\substack{k,q,h,p \\ l=k-q+h-p}} \Omega_s(l) a_k^{0+} a_q^0 a_h^{1+} a_p^1 b_{-l,s}^+ + \text{э.с.} \quad (4)$$

– гамильтониан четвертого порядка по фермионным операторам, описывающий обменное взаимодействие полей электронной намагниченности в сочетании со спиновыми волнами и фононами.

Фермионные операторы $a_k^{\sigma+}$, a_k^σ описывают электронные возбуждения, σ – спиновый индекс ($\sigma = 0, 1$). Бозонные операторы $b_{k,s}^+$, $b_{k,s}$ описывают нормальные моды связанных фонон-магнонных колебаний, s – номер дисперсионной ветви, $\Psi_s(k)$, $\Omega_s(k)$ – коэффициенты взаимодействия. Фактор τ_s^σ определяет сигнатуру взаимодействия нормальной магнон-фононной моды типа “ s ” с плотностью электронов проводимости, имеющих фиксированное направление спина. Так, для чистых фононов

$$\tau_s^0 = \tau_s^1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а для чистых магнонов

$$\tau_s^0 = -\tau_s^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ранее считалось, что взаимодействие (4) мало по величине и не приводит к существенным эффектам. Однако (см. работы [5, 6]) в магнитных высокотемпературных сверхпроводниках¹⁾ наблюдается эффект обменного усиления электрон-бозонного взаимодействия, который распространяется на все четырехфермионные взаимодействия с любым количеством бозонов. Вклады от указанных взаимодействий в уравнение компенсации тетравершин образуют сходящуюся геометрическую прогрессию с положительным знаменателем. Следовательно суммарный вклад может оказаться значительным. Данная ситуация реализуется в случае, если дисперсионная зависимость электронов анизотропна, а именно, направления импульсов $\vec{k}$ и $-\vec{k}$ неэквивалентны:

$$\mathcal{E}(\vec{k}) \neq \mathcal{E}(-\vec{k}).$$

В противном случае правая часть уравнения компенсации тетравершин может быть отлична от нуля только за счет дисперсионной зависимости бозонов $\omega(\vec{k})$, но данный эффект очень мал.

¹⁾Магнитными сверхпроводниками называются сверхпроводящие антиферромагнетики. Характерным представителем этого класса высокотемпературных сверхпроводников являются так называемые перовскитовые структуры типа $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$.

Используемое в дальнейшем обобщенное каноническое преобразование показывает, что в сверхпроводящих системах со взаимодействиями типа (4) фермионные квазичастицы представляют собой коллективные возбуждения всего электронного конденсата как целостной системы. Именно этот коллективный эффект обеспечивает существенное влияние четырехфермионных электрон-бозонных взаимодействий на сверхпроводимость в исследуемой системе. Указанное влияние в зависимости от определенной согласованности параметров системы может как способствовать, так и препятствовать сверхпроводимости. Наиболее полно взаимодействие (4) проявляет себя при наличии постоянного поля векторного потенциала $\vec{A}$.

2. ОБОБЩЕННОЕ КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФЕРМИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для решения поставленной задачи необходимо перейти к коллективным электронным возбуждениям (квазичастицам) с помощью канонического (унитарного) преобразования электронных операторов, отвечающего аналогичному преобразованию гамильтониана.

С помощью ряда Хаусдорфа соответствующее унитарное преобразование можно представить в виде

$$e^{iS} A e^{-iS} = 1 + i[S, A] + \frac{i^2}{2!} [S[S, A]] + \frac{i^3}{3!} [S[S[S, A]]] + \dots,$$

где A – преобразуемый оператор, S – генератор преобразования.

Преобразованием с квадратичным генератором (преобразование Боголюбова) можно компенсировать только двухфермионные диаграммы, а для компенсации четырехфермионных диаграмм необходимо осуществить унитарное преобразование, генератор которого содержит четвертые степени фермионных операторов рождения и уничтожения. При нахождении такого четырехфермионного преобразования возникают математические трудности, связанные с нарастанием порядка фермионных операторов при вычислении коммутаторов в разложении Хаусдорфа.

Оказывается, что указанные математические трудности можно преодолеть, если искать преобразования не для самих одиночных фермионных операторов, а преобразовывать непосредственно билинейные комбинации фермионных операторов, входящие в гамильтониан после преобразования Боголюбова. Тогда могут быть выделены основные линейные циклы коммутирования, содержащие квадратичные и кубические суммы весовой функции генератора преобразования.

Будем исходить из общего определения:

$$A' = U A U^{-1}, \quad U = U_1 U_2,$$

где A – преобразуемый оператор, $U_1 = \exp(iS_1)$, $U_2 = \exp(iS_2)$. Оператор U_1 соответствует преобразованию Боголюбова и обеспечивает возможность компенсации бивершин [7,8], оператор U_2 обеспечивает возможность компенсации тетравершин. Эрмитовы

операторы S_1 и S_2 представляют собой генераторы преобразования и имеют вид

$$S_1 = i \sum_k \gamma_k (a_{-k}^{1+} a_k^{0+} - a_k^0 a_{-k}^1),$$

$$S_2 = \frac{i}{4} \sum_{k,q} X_{kq} (a_q^{1+} a_{-k}^{0+} a_{-q}^{1+} a_k^{0+} - a_k^0 a_{-q}^1 a_{-k}^0 a_q^1).$$

Для практических вычислений удобнее другая форма записи канонического преобразования:

$$A' = U_1 U_2 A U_2^{-1} U_1^{-1} = U_1 U_2 U_1^{-1} (U_1 A U_1^{-1}) U_1 U_2^{-1} U_1^{-1},$$

где вначале совершается преобразование Боголюбова, а затем преобразование, обеспечивающее возможность компенсации тетравершин, но при этом в оператор $U_{12} = U_1 U_2 U_1^{-1}$ входят уже однократно преобразованные электронные операторы вида $U_1 a_k^{\sigma+} U_1^{-1}$ и $U_1 a_k^{\sigma} U_1^{-1}$. Воспользовавшись формулой Хаусдорфа, получим известные соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_k^0 &= U_1 a_k^0 U_1^{-1} = u_k a_k^0 - v_k a_{-k}^{1+}, \\ \alpha_k^1 &= U_1 a_k^1 U_1^{-1} = u_{-k} a_k^1 + v_{-k} a_{-k}^{0+}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$u_k = \cos \gamma_k, \quad v_k = \sin \gamma_k.$$

Тогда оператор $U_{12} = U_1 U_2 U_1^{-1}$ можно представить в виде $U_{12} = \exp(iS_{12})$, где эрмитов оператор имеет вид

$$S_{12} = \frac{i}{4} \sum_{k,q} X_{kq} (\alpha_q^{1+} \alpha_{-k}^{0+} \alpha_{-q}^{1+} \alpha_k^{0+} - \alpha_k^0 \alpha_{-q}^1 \alpha_{-k}^0 \alpha_q^1).$$

Новые операторы β_k^0, β_k^1 определяются равенствами

$$\begin{aligned} \beta_k^0 &= U_{12} U_1 a_k^0 U_1^{-1} U_{12}^{-1} = U_{12} \alpha_k^0 U_{12}^{-1}, \\ \beta_k^1 &= U_{12} U_1 a_k^1 U_1^{-1} U_{12}^{-1} = U_{12} \alpha_k^1 U_{12}^{-1}. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем преобразовывать непосредственно билинейные комбинации операторов $\alpha_k^{\sigma+}, \alpha_k^{\sigma}$, входящие в гамильтониан после преобразования Боголюбова.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{k,q}^0 &= \alpha_k^{0+} \alpha_q^0, & \mathcal{N}_{k,q}^1 &= \alpha_{-q}^{1+} \alpha_{-k}^1, & \mathcal{C}_{k,q} &= \alpha_k^0 \alpha_{-q}^1, \\ \mathcal{N}_{k,q}^0 &= \beta_k^{0+} \beta_q^0, & \mathcal{N}_{k,q}^1 &= \beta_{-q}^{1+} \beta_{-k}^1, & \mathcal{C}_{k,q} &= \beta_k^0 \beta_{-q}^1. \end{aligned}$$

Для вычисления искомого преобразования нам потребуется алгебра Ли $\mathcal{L} \equiv \{\mathcal{N}_{k,q}^0, \mathcal{N}_{k,q}^1, \mathcal{C}_{k,q}, \mathcal{C}_{k,q}^+\}$ билинейных форм фермионных операторов.

Генератор $S_{12} = S$ может быть записан в виде

$$S = \frac{i}{4} \sum_l X_{kl} (\mathcal{C}_{k,q}^+ \mathcal{C}_{-k,-q}^+ - \mathcal{C}_{-k,-q} \mathcal{C}_{k,q}).$$

Используя алгебру $\mathcal{L}$, легко вычислить коммутаторы между элементами данной алгебры и генератором S . Коммутаторы между любым произведением элементов алгебры $\mathcal{L}$ и генератором S вычисляются по формуле Лейбница.

Коммутаторы второго и третьего порядков, входящие в разложение Хаусдорфа, имеют довольно громоздкий вид, но в них может быть выделена преобладающая линейная часть, которая содержит соответственно квадратичные и кубические интеграции весовой функции.

В коммутаторах для $\mathcal{C}_{kq}$ более высокого порядка преобладающие коэффициенты при операторах будут представлять собой полиномы от трех (базисных) переменных X_{kq} , A_{kq} , B_{kq} . Кроме квадратичной A_{kq} и кубической B_{kq} , других степенных интеграций весовой функции не возникнет.

Итак, существуют три основных цикла коммутирования:

$$\begin{aligned} [S, \mathcal{C}_{k,q}] &= -X_{kq} \mathcal{C}_{-k,-q}^+ + \mathcal{R}_1(X), \\ [S[S, \mathcal{C}_{k,q}]] &= (-A_{kq}^2 + X_{kq}^2) \mathcal{C}_{k,q} + \mathcal{R}_2(X^2), \\ [S[S[S, \mathcal{C}_{k,q}]]] &= (-B_{kq}^3 + 3A_{kq}^2 X_{kq} - X_{kq}^3) \mathcal{C}_{-k,-q}^+ + \mathcal{R}_3(X^3), \end{aligned}$$

здесь

$$A_{kq} = \left(\frac{1}{2} \sum_s (X_{ks}^2 + X_{sq}^2) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad B_{kq} = \left(\frac{1}{2} \sum_{s,l} X_{kl} X_{ls} X_{sq} \right)^{\frac{1}{3}},$$

а через $\mathcal{R}_n(X^n)$ ($n = 2, 3$) обозначены нормально упорядоченные слагаемые по фермионным операторам, имеющие порядок величины $O(X^n)$ и обусловленные спецификой коммутационных соотношений алгебры $\mathcal{L}$. При вычислении коммутаторов более высокого порядка указанные слагаемые также играют роль. После нормального упорядочения на каждом следующем шаге коммутации они дают вклад в линейную часть коммутатора.

Для операторов $\mathcal{N}_{kq}^\sigma$ основные циклы коммутирования составляют коммутаторы первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} [S, \mathcal{N}_{k,q}^0] &= -\frac{1}{4} \sum_l X_{ql} \{ \mathcal{C}_{-q,-l}^+, \mathcal{C}_{k,l}^+ \}_+ - \frac{1}{4} \sum_l X_{k,l} \{ \mathcal{C}_{-k,-l}, \mathcal{C}_{q,l} \}_+, \\ [S[S, \mathcal{N}_{k,q}^0]] &= -\frac{1}{2} \sum_s (X_{ks}^2 + X_{sq}^2) \mathcal{N}_{kq}^0 - \sum_s X_{ks} X_{qs} \mathcal{N}_{-q,-k}^0 - \delta_{k,q} \sum_l X_{kl}^2 \mathcal{N}_{l,l}^1 + \Lambda, \end{aligned}$$

где Λ – нормально упорядоченные слагаемые четвертого и шестого порядков по фермионным операторам с коэффициентами, имеющими порядок величины $O(X^2)$ и не содержащими внутреннего суммирования.

Коэффициенты аналогичных коммутаторов более высокого порядка представляют собой полиномы от переменных, являющихся коэффициентами в линейной части основных циклов коммутирования.

Суммируя ряд Хаусдорфа и удерживая только преобладающие циклы коммутирования, получим

$$\begin{aligned}
 N_{k,q}^0 &= W_{kq} \mathcal{N}_{k,q}^0 - T_{kq} \mathcal{N}_{-q,-k}^0 - 2\delta_{k,q} \sum_l (v_k \epsilon_k^l)^2 \mathcal{N}_{l,l}^1 - \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_l \{ \delta_{kq} (\epsilon_k^l u_k v_k + \epsilon_l^k u_l v_l + O(X_{kq}^3)) + (1 - \delta_{kq}) O(N_\Omega^{-\frac{1}{2}}) \} \times \\
 &\quad \times (\mathcal{C}_{-q,-l}^+ \mathcal{C}_{k,l}^+ + \mathcal{C}_{q,l} \mathcal{C}_{-k,-l}) + \Lambda_1;
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 N_{k,q}^1 &= W_{kq} \mathcal{N}_{k,q}^1 - T_{kq} \mathcal{N}_{-q,-k}^1 - 2\delta_{k,q} \sum_l (v_k \epsilon_k^l)^2 \mathcal{N}_{l,l}^0 - \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_l \{ \delta_{kq} (\epsilon_q^l u_q v_q + \epsilon_l^q u_l v_l + O(X_{kq}^3)) + (1 - \delta_{kq}) O(N_\Omega^{-\frac{1}{2}}) \} \times \\
 &\quad \times (\mathcal{C}_{l,q}^+ \mathcal{C}_{-l,-k}^+ + \mathcal{C}_{l,k} \mathcal{C}_{-l,-q}) + \Lambda_1;
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$C_{k,q} = w_{kq} \mathcal{C}_{k,q} - t_{kq} \mathcal{C}_{-k,-q} + \Lambda_1. \tag{8}$$

В формулах (6)–(8) Λ_1 – нормально упорядоченные слагаемые четвертого и более высоких порядков, имеющие нулевое среднее по вакууму и по всем одночастичным состояниям, там же введены обозначения

$$\begin{aligned}
 W_{kq} &= u_{kq}^+ u_{kq}^-, & T_{kq} &= v_{kq}^+ v_{kq}^-, \\
 u_{kq}^\pm &= \cos x_{kq}^\pm, & u_k &= u_{kk}^+ = u_{kk}^-, & v_{kq}^\pm &= \sin x_{kq}^\pm, & v_k &= v_{kk}^+ = v_{kk}^-, \\
 x_{kq}^\pm &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \sum_l (X_{kl} + X_{ql})^2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sum_l (X_{kl} - X_{ql})^2} \right), \\
 x_k &= x_{kk}^+ = x_{kk}^-, & \epsilon_k^q &= \frac{X_{kq}}{x_k}, \\
 w_{kq} &= \cos A_{kq} \left\{ (\operatorname{ch} X_{kq}) (\operatorname{ch}_{\frac{1}{3}} B_{kq}) + (\operatorname{sh} X_{kq}) (\operatorname{sh}_{\frac{1}{3}} B_{kq}) \right\}, \\
 t_{kq} &= \cos A_{kq} \left\{ (\operatorname{ch} X_{kq}) (\operatorname{sh}_{\frac{1}{3}} B_{kq}) + (\operatorname{sh} X_{kq}) (\operatorname{ch}_{\frac{1}{3}} B_{kq}) \right\}, \\
 \operatorname{ch}_{\frac{1}{3}} y &\equiv \frac{1}{3} \operatorname{ch} y + \frac{2}{3} \left(\operatorname{ch} \frac{y}{2} \right) \left(\cos \frac{y\sqrt{3}}{2} \right), \\
 \operatorname{sh}_{\frac{1}{3}} y &\equiv \frac{1}{3} \operatorname{sh} y - \frac{2}{3} \left(\operatorname{sh} \frac{y}{2} \right) \left(\cos \frac{y\sqrt{3}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Возникающее здесь обобщение гиперболических функций естественным образом получается из характерного для данной задачи обобщения экспоненты:

$$\exp_{\frac{1}{n}} y \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \{ (\sqrt[n]{y^n})_i \},$$

где проведено суммирование по всем комплексным значениям корня степени n из действительной величины y^n , n – натуральное число. При $n = 1$ мы имеем обычную показательную функцию. В случае, если n – нечетное число, обобщенные гиперболические косинус и синус имеют стандартное определение через обобщенную экспоненту:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}_{\frac{1}{n}} y &\equiv \frac{1}{2}(\exp_{\frac{1}{n}} y + \exp_{\frac{1}{n}}(-y)), \\ \operatorname{sh}_{\frac{1}{n}} y &\equiv \frac{1}{2}(\exp_{\frac{1}{n}} y - \exp_{\frac{1}{n}}(-y)).\end{aligned}$$

При формальном обращении знака генератора S в формуле Хаусдорфа получим преобразования, обратные к преобразованиям (6)–(8).

В приведенных выше формулах преобразований (6), (7) точный коэффициент при операторах “опасной” тетравершины в случае несовпадающих импульсов $\vec{k}$ и $\vec{q}$ имеет довольно громоздкий вид, но нигде в дальнейшем не используется. Поэтому он обозначен через порядок величины как $O(N_{\Omega}^{-\frac{1}{2}})$, где N_{Ω} – число значений импульса в области Ω импульсного пространства, являющейся носителем функции X_{kq} (весовой функции генератора S). Таким образом, величина N_{Ω} представляет собой число элементов множества Ω , определенного соотношением $\Omega = \operatorname{supp}(X_{kq})$. В дальнейшем мы увидим, что полученные преобразования становятся актуальными в том случае, когда весовая функция генератора имеет порядок величины

$$O(X_{kq}) = \frac{1}{\sqrt{N_{\Omega}}}, \quad N_{\Omega} \gg 1.$$

Таким образом, при нахождении преобразования мы можем учитывать только коэффициенты с порядком величины, большим либо равным единице. Коэффициенты, удовлетворяющие названному условию, будем считать преобладающими.

Теперь, когда нам известен вид четырехфермионного преобразования, можно перейти к получению преобразованного гамильтониана и выводу уравнений компенсации “опасных” электронных диаграмм, соответствующих рождению из вакуума двух и четырех электронных квазичастиц.

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНОЙ КОМПЕНСАЦИИ “ОПАСНЫХ” ЭЛЕКТРОННЫХ ДИАГРАММ

Преобразование исходного гамильтониана (1) с помощью подстановки найденных выше преобразований (6)–(8) осуществляется по формуле

$$\mathcal{H} = U_2^{-1} U_1^{-1} H U_1 U_2,$$

где вначале совершается преобразование Боголюбова, а затем преобразование, обеспечивающее возможность компенсации тетравершин. Преобразованный гамильтониан $\mathcal{H}$ содержит все слагаемые, необходимые для решения поставленной задачи компенсации “опасных” диаграмм:

$$\mathcal{H} = U_0 + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{0,1} + \mathcal{H}_{1,1} + \mathcal{H}_{1,2} + \mathcal{H}_{2,1} + \mathcal{H}_{2,2}. \quad (9)$$

В формуле (9) отдельные слагаемые имеют следующий вид:

– гамильтониан, описывающий невзаимодействующие электронные квазичастицы и бозоны:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_k \{Q(k)(N_{kk}^0 + N_{kk}^1) + \omega_s(k)b_{k,s}^+ b_{k,s}\};$$

– гамильтониан, порождающий опасные (компенсируемые) электронные вершины второго и четвертого порядков [9]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{01} = & \sum_k 2(\mathcal{E}(k)u_k v_k w_{kk} - \mathcal{E}(-k)u_{-k} v_{-k} t_{kk})(C_{kk}^+ + C_{kk}) + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{k,q} [\xi(k) + \xi(q)] (\epsilon_k^q u_k v_k + \epsilon_q^k u_q v_q + O(X_{kq}^3)) (C_{-k,-q}^+ C_{k,q}^+ + C_{k,q} C_{-k,-q}); \end{aligned}$$

– гамильтонианы фермион-бозонного взаимодействия, образующие компенсирующие двухфермионные диаграммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1,1} = & \sum_{\substack{k,q \\ l=k-q}} \sum_{\sigma=0,1} \Psi_l(s) \tilde{f}_{k,q}^\sigma N_{k,q}^\sigma b_{-l,s}^+ + \text{э.с.}, \\ \mathcal{H}_{1,2} = & \sum_{\substack{k,q \\ l=k-q}} \Psi_l(s) (\tilde{g}_{k,q} C_{k,q}^+ + \tilde{g}_{-k,-q} C_{-k,-q}) b_{-l,s}^+ + \text{э.с.}; \end{aligned}$$

– гамильтонианы фермион-бозонного взаимодействия, образующие компенсирующие четырехфермионные диаграммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2,1} = & \sum_{\substack{k,q,h,p \\ l=k-q+h-p}} \sum_{\mu=0,1} \Omega_l(s) \tilde{f}_{k,q}^{(\mu)} \tilde{f}_{h,p}^{(1-\mu)} (N_{k,q}^0 N_{h,p}^0 + N_{k,q}^1 N_{h,p}^1) b_{-l,s}^+ + \\ & + \sum_{\substack{k,q,h,p \\ l=k-q+h-p}} \sum_{\mu=0,1} \Omega_l(s) 2(\tilde{f}_{k,-h}^{(\mu)} \tilde{f}_{-p,q}^{(\mu)} + \tilde{g}_{k,q}^{(\mu)} \tilde{g}_{-h,-p}^{(1-\mu)}) C_{k,q}^+ C_{-h,-p} b_{-l,s}^+ + \text{э.с.}, \\ \mathcal{H}_{2,2} = & \sum_{\substack{k,q,h,p \\ l=k-q+h-p}} \sum_{\mu=0,1} \Omega_l(s) \tilde{g}_{k,q}^{(\mu)} \tilde{g}_{h,p}^{(1-\mu)} C_{k,q}^+ C_{h,p}^+ b_{-l,s}^+ + \text{э.с.}; \end{aligned}$$

– постоянная отрицательная составляющая, возникающая в результате проведенного преобразования, после нормального упорядочения новых фермионных операторов:

$$U_0 = \sum_k \left[2\mathcal{E}(k)v_k^2 + 2 \sum_l (v_k \epsilon_k^l)^2 \xi(l) \right].$$

В перечисленных выше слагаемых гамильтониана (9) использованы обозначения (12), (13) (см. ниже).

Условие совместной компенсации “опасных” электронных бивершин и тетравершин выражается равенством

$$(\mathcal{H}_{0,1} - \mathcal{H}_{\text{int}} \mathcal{H}_0^{-1} \mathcal{H}_{\text{int}}) |\text{vacuum}\rangle = 0$$

и представляет собой систему связанных нелинейных интегральных уравнений. В нашей модели это условие компенсации распадается на два связанных уравнения, выражающих условие компенсации бивершин:

$$(\mathcal{H}_{0,1}^{\text{be}} - \mathcal{H}_{1,1}\mathcal{H}_0^{-1}\mathcal{H}_{1,2})|\text{vacuum}\rangle = 0$$

и условие компенсации тетравершин

$$(\mathcal{H}_{0,1}^{\text{tetra}} - \mathcal{H}_{2,1}\mathcal{H}_0^{-1}\mathcal{H}_{2,2})|\text{vacuum}\rangle = 0.$$

Выписывая согласно теории возмущений соответствующие коэффициенты в комбинациях гамильтонианов взаимодействия и в гамильтониане $\mathcal{H}_{0,1}$ и приравнявая нулю сумму энергетических вкладов “опасных” и компенсирующих диаграмм, получим искомую систему уравнений

$$\begin{aligned} & w_{kk}2u_kv_k\mathcal{E}_k - t_{kk}2u_kv_k\mathcal{E}_k = \\ & = \sum_{\substack{q,s \\ l=k-q}} G_k^q(s) \sum_{\mu=0,1} \left(\{(\tau_s^0)^2 + (\tau_s^1)^2\} \tilde{f}_{kq}^{(\mu)} \tilde{g}_{kq}^{(1-\mu)} + 2\tau_s^0 \tau_s^1 \tilde{f}_{kq}^{(\mu)} \tilde{g}_{kq}^{(\mu)} \right), \quad (10) \\ & \frac{1}{4} (\epsilon_k^q u_k v_k + \epsilon_q^k u_q v_q + O(X_{kq}^3)) \{ \xi(\vec{k}) + \xi(\vec{q}) \}_{kq} = \sum_{\substack{h,p;s \\ l=k-q+h-p}} G_{kq}^{hp}(s) \times \\ & \times \sum_{\mu,\nu=0,1} \left[2(\tilde{f}_{-k,h}^{(\mu)} \tilde{f}_{p,-q}^{(\mu)} + \tilde{g}_{-k,-q}^{(\mu)} \tilde{g}_{h,p}^{(1-\mu)}) (\tilde{g}_{k,q}^{(\nu)} \tilde{g}_{h,p}^{(1-\nu)} - \tilde{g}_{k,p}^{(\nu)} \tilde{g}_{h,q}^{(1-\nu)}) + \right. \\ & + \tilde{f}_{-k,p}^{(\mu)} \tilde{g}_{h,-q}^{(\nu)} (\tilde{g}_{k,q}^{(1-\nu)} \tilde{f}_{h,p}^{(1-\mu)} - \tilde{g}_{p,q}^{(1-\nu)} \tilde{f}_{k,h}^{(1-\mu)}) + \\ & \left. + \tilde{f}_{h,-q}^{(\mu)} \tilde{g}_{-k,p}^{(\nu)} (\tilde{g}_{k,q}^{(1-\nu)} \tilde{f}_{h,p}^{(1-\mu)} - \tilde{g}_{k,h}^{(1-\nu)} \tilde{f}_{p,q}^{(1-\mu)}) \right]_{kq}, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{k,q}^{(\mu)} &= W_{kq} f_{k,q}^{(\mu)} - T_{kq} f_{-k,-q}^{(\mu)}, & f_{k,q}^{(0)} &= u_k u_q, & f_{k,q}^{(1)} &= -v_k v_q, \\ \tilde{g}_{k,q}^{(\mu)} &= w_{kq} g_{k,q}^{(\mu)} + t_{kq} g_{-k,-q}^{(\mu)}, & g_{k,q}^{(0)} &= u_k v_q, & g_{k,q}^{(1)} &= v_k u_q, \\ \tilde{f}_{k,q}^\sigma &= \tau_s^\sigma \tilde{f}_{k,q}^{(0)} + \tau_s^{1-\sigma} \tilde{f}_{k,q}^{(1)}, \\ \tilde{g}_{k,q} &= \tau_s^0 \tilde{g}_{k,q}^{(0)} + \tau_s^1 \tilde{g}_{k,q}^{(1)}, \\ \xi(\vec{k}) &= \mathcal{E}(\vec{k}) (u_k^2 - v_k^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Энергия новых электронных квазичастиц в нулевом порядке стационарной теории возмущений определяется выражением

$$Q(k) = (u_k^2 - v_k^2) \xi_s(k) + \xi_a(k) - 2(v_k \epsilon_k^l)^2 \xi(l), \quad (13)$$

где

$$\xi_s(k) = \frac{1}{2} (\xi(k) + \xi(-k)), \quad \xi_a(k) = \frac{1}{2} (\xi(k) - \xi(-k)).$$

Для произвольной функции $f(k, q)$ различными видами скобок с индексами обозначены следующие линейные комбинации:

$$\begin{aligned}\{f(k, q)\}_{kq} &= f(k, q) + f(-k, -q) + f(-k, q) + f(k, -q), \\ [f(k, q)]_{kq} &= f(k, q) + f(-k, -q) - f(-k, q) - f(k, -q).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что в отсутствие внешнего поля $\vec{A}$ подынтегральное выражение в правой части уравнения (11) может быть отлично от нуля только благодаря дисперсионной зависимости бозонов. При учете взаимодействий с бóльшим количеством бозонов в ядрах уравнений (10), (11) появляется кратное числу бозонов внутреннее интегрирование, приводящее к фактическому усреднению закона дисперсии, так что функция $\omega(\vec{k})$ может быть заменена константой, имеющей смысл средней энергии бозонов. При конечных значениях вектор-потенциала решение системы (10), (11) существенно видоизменяется.

Ядра уравнений (10), (11) для взаимодействия с одним бозоном имеют вид

$$\begin{aligned}G_k^q(s) &= \frac{|\Psi_s(\vec{k} - \vec{q})|^2}{\omega_s(\vec{k} - \vec{q}) + Q(\vec{k}) + Q(\vec{q})}, \\ G_{kq}^{hp}(s) &= \frac{|\Omega_s(\vec{k} - \vec{q} + \vec{h} - \vec{p})|^2}{\omega_s(\vec{k} - \vec{q} + \vec{h} - \vec{p}) + Q(\vec{k}) + Q(\vec{q}) + Q(\vec{h}) + Q(\vec{p})}.\end{aligned}$$

Уравнение компенсации бивершин (10) можно привести к канонической форме, выделив симметричную и антисимметричную части функции γ_k . Введем вместо исходных функций u_k, v_k функции

$$\begin{aligned}U_k &= \cos \frac{\gamma_k + \gamma_{-k}}{2}, & V_k &= \sin \frac{\gamma_k + \gamma_{-k}}{2}, \\ \alpha_k &= \cos \frac{\gamma_k - \gamma_{-k}}{2}, & \beta_k &= \sin \frac{\gamma_k - \gamma_{-k}}{2}.\end{aligned}$$

Выделим симметричную и антисимметричную по аргументу $\vec{k}$ части уравнения (10). Введем вместо $U_k, V_k, \alpha_k, \beta_k$ новые функции C_k, E_k, D_k, F_k по формулам

$$2U_k V_k = \frac{C_k}{\sqrt{E_k^2 + C_k^2}}, \quad U_k^2 - V_k^2 = \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 + C_k^2}}, \quad (14)$$

$$2\alpha_k \beta_k = \frac{D_k}{\sqrt{F_k^2 + D_k^2}}, \quad \alpha_k^2 - \beta_k^2 = \frac{F_k}{\sqrt{F_k^2 + D_k^2}}, \quad (15)$$

где функции E_k, C_k, F_k симметричны, а функция D_k антисимметрична по аргументу $\vec{k}$.

Тогда уравнение компенсации бивершин (10) эквивалентно следующей системе четырех уравнений (по индексу s проводится суммирование):

$$E_k = (\alpha_k^2 - \beta_k^2)(w_{kk} + t_{kk})\mathcal{E}_s(k) - \{(\tau_s^0)^2 + (\tau_s^1)^2\} \times \\ \times \sum_q \{W_{kq}w_{kq} - T_{kq}t_{kq}\}G_k^q(s)(\alpha_k^2 - \beta_k^2)(\alpha_q^2 - \beta_q^2)(U_q^2 - V_q^2), \quad (16)$$

$$F_k = (U_k^2 - V_k^2)(w_{kk} - t_{kk})\mathcal{E}_s(k) + 2\tau_s^0\tau_s^1 \sum_q \{W_{kq}w_{kq} + T_{kq}t_{kq}\} \times \\ \times G_k^q(s)2U_kV_k2U_qV_q(\alpha_q^2 - \beta_q^2) - \{(\tau_s^0)^2 + (\tau_s^1)^2\} \times \\ \times \sum_q \{W_{kq}w_{kq} + T_{kq}t_{kq}\}G_k^q(s)(U_k^2 - V_k^2)(U_q^2 - V_q^2)(\alpha_q^2 - \beta_q^2), \quad (17)$$

$$C_k = -2\alpha_k\beta_k(w_{kk} + t_{kk})\mathcal{E}_a(k) + \\ + 2\tau_s^0\tau_s^1 \sum_q \{W_{kq}w_{kq} - T_{kq}t_{kq}\}G_k^q(s)(\alpha_k^2 - \beta_k^2)(\alpha_q^2 - \beta_q^2)2U_qV_q, \quad (18)$$

$$D_k = -2U_kV_k(w_{kk} - t_{kk})\mathcal{E}_a(k) - \\ - 2\tau_s^0\tau_s^1 \sum_q \{W_{kq}t_{kq} + T_{kq}w_{kq}\}G_k^q(s)2\alpha_q\beta_q. \quad (19)$$

Уравнения для функций C_k , E_k переходят в уравнения, полученные Боголюбовым в работе [1], при $X_{kq} \rightarrow 0$, т.е. в случае, когда решение уравнения компенсации тетравершин стремится к тривиальному решению. Но последнее имеет место при стремлении к нулю вектор-потенциала $\vec{A}$, определяющего смещение ферми-сферы в импульсном пространстве.

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНОЙ КОМПЕНСАЦИИ “ОПАСНЫХ” ЭЛЕКТРОННЫХ БИВЕРШИН И ТЕТРАВЕРШИН

4.1. Концепция неодносвязного пространства и сверхпроводящие антиферромагнетики. Решение полученной системы уравнений совместной компенсации бивершин и тетравершин позволяет с точки зрения метода Боголюбова сделать вывод о роли обменного взаимодействия в ВТСП-соединениях, содержащих магнитную подсистему. Одним из ключевых моментов исследования является концепция неодносвязного пространства.

Внутрикристаллическое пространство соединения, обладающего магнитной подсистемой, в терминах геометрии калибровочных (в данном случае электромагнитных) полей является неодносвязным пространством. Магнитные подрешетки названных соединений представляют собой упорядоченный набор цепочек, выстроенных из сонаправленных магнитных моментов. Последние обусловлены орбитальными токами в электронных оболочках атомов данного кристаллического соединения. Выстроенные в цепочку атомные орбитальные токи совпадают с образующими окружностями некоторой

воображаемой цилиндрической поверхности, на осевой линии которой расположены ядра атомов, составляющих цепочку. Весь кристалл может быть построен из совокупности указанных цепочек. Ассоциированная с каждой из цепочек цилиндрическая поверхность, соединяющая сонаправленные орбитальные токи, представляет собой трубку магнитного потока, т.е. ограничивает магнитный поток, обусловленный орбитальными токами. Описанную цепочку атомов с сонаправленными магнитными моментами можно сравнить с соленоидом, создающим магнитный поток определенной величины.

Каждый замкнутый путь, охватывающий магнитный поток, неомотопен нулю, т.к. циркуляция калибровочного вектор-потенциала $\vec{A}$ по этому замкнутому пути постоянна и равна величине охватываемого магнитного потока. Следовательно, динамику электронов проводимости, взаимодействующих с бозонными возбуждениями, т.е. с фононами и магнонами, мы должны рассматривать с учетом неодносвязности пространства, обусловленной указанным полем вектор-потенциала $\vec{A}$. Вторичное квантование в представлении момента импульса является в рассматриваемом случае вращательного движения наиболее естественным и не требует фиксированной калибровки. Однако, если неоднозначность поля вектор-потенциала, обусловленная калибровочной инвариантностью магнитного поля, устранена требованиями конечности и непрерывности поля $\vec{A}$, то мы можем использовать стандартную эквивалентную процедуру вторичного квантования в импульсном представлении, полагая, что энергия электронов проводимости определяется выражением

$$E(\vec{k}) = \frac{(\vec{k} - e\vec{A}_0)^2}{2m}, \quad (20)$$

где $\vec{A}_0$ – значение вектор-потенциала в указанной выделенной калибровке.

Приведем пример максимально идеализированной модели. Пусть, например, Γ – круговой контур с радиусом R , охватывающий соосный ему магнитный поток величины Φ_0 . Циркуляция поля $\vec{A}$ по контуру Γ равна магнитному потоку:

$$\Phi_0 = \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{x} = |\vec{A}_0| 2\pi R, \quad \vec{A}_0 = \vec{\tau} \langle A_{\tau} \rangle_{\Gamma},$$

$\vec{A}_0$ – среднее значение тангенциальной составляющей поля $\vec{A}$ по контуру Γ , $\vec{\tau}$ – касательный орт. Таким образом, энергия электронов, движущихся по контуру Γ , с импульсом $\vec{k}$, направленным по касательной к названному контуру, определяется равенством (20). Среднее поле $\vec{A}_0$, а следовательно, и энергия $E(k)$ не зависят от выбора калибровки.

Значение среднего поля $\vec{A}_0$ определяет также смещение ферми-сферы в импульсном пространстве. Физическая реализация такой простейшей модели – круговое сверхпроводящее кольцо (в качестве фермион-бозонной системы) с малым поперечным сечением, охватывающее соосный ему длинный соленоид, создающий внешний магнитный поток заданной величины, который обуславливает неодносвязность пространства локализации фермион-бозонной системы (сверхпроводника).

Значение магнитного потока Φ_0 есть мера топологического дефекта неодносвязного пространства. При этом геометрический размер контура Γ – его радиус R – оказывается наряду со средним полем $\vec{A}_0$ весьма существенным параметром модели. Кроме того,

если фермион-бозонная система (сверхпроводник) локализована в ϵ -окрестности контура Γ , то реально число электронов проводимости N_F пропорционально объему системы, а при фиксированном ϵ (поперечном сечении) число N_F пропорционально радиусу контура Γ .

4.2. Решение системы уравнений совместной компенсации “опасных” электронных бивершин и тетравершин. Пусть Ω – область импульсного пространства P , ограниченная сферой Ферми $\mathcal{E}(\vec{k}) = 0$ и зеркально отраженной (относительно плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{A}_0$) сферой $\mathcal{E}(-\vec{k}) = 0$. Будем считать, что при $|\vec{A}_0| \rightarrow 0$, когда в пределе сферы $\mathcal{E}(\pm\vec{k}) = 0$ совпадают, область Ω исчезает.

Пусть далее N_Ω – число значений импульса в области Ω . При конечных значениях $\vec{A}_0$ решение системы (11), (16)–(19) удобно искать с помощью разбиения импульсного пространства P на области усреднения Ω и $P \setminus \Omega$. Возможность такого усреднения обоснована подтверждающимся впоследствии предположением о том, что все искомые функции можно считать постоянными в областях усреднения Ω и $P \setminus \Omega$.

Введем обозначения для областей пространства $P \otimes P$, точками которого являются значения пары импульсов $\{\vec{k}, \vec{q}\} \in P \otimes P$:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &\equiv \Omega \otimes \Omega = \{\vec{k}, \vec{q} : \vec{k} \in \Omega, \vec{q} \in \Omega\}, \\ \Omega_1 &\equiv (\Omega \otimes (P \setminus \Omega)) \cup ((P \setminus \Omega) \otimes \Omega) = \\ &= \{\vec{k}, \vec{q} : (\vec{k} \in \Omega, \vec{q} \in P \setminus \Omega) \cup (\vec{k} \in P \setminus \Omega, \vec{q} \in \Omega)\}, \\ \Omega_2 &\equiv (P \setminus \Omega) \otimes (P \setminus \Omega) = \{\vec{k}, \vec{q} : \vec{k} \in P \setminus \Omega, \vec{q} \in P \setminus \Omega\}.\end{aligned}$$

При этом объединение введенных областей совпадает с пространством $P \otimes P$.

Будем искать решение системы (11), (16)–(19), представив искомые функции в виде

$$E_k = \begin{cases} E & \text{при } \vec{k} \in \Omega, \\ \mathcal{E}_s(k) & \text{при } \vec{k} \in P \setminus \Omega, \end{cases} \quad C_k = \begin{cases} C & \text{при } \vec{k} \in \Omega, \\ \epsilon_C(k) \rightarrow 0 & \text{при } \vec{k} \in P \setminus \Omega, \end{cases} \quad (21)$$

$$F_k = \begin{cases} F & \text{при } \vec{k} \in \Omega, \\ |\mathcal{E}_s(k)| & \text{при } \vec{k} \in P \setminus \Omega, \end{cases} \quad D_k = \begin{cases} D \operatorname{sign}(\mathcal{E}_a(k)) & \text{при } \vec{k} \in \Omega, \\ \epsilon_D(k) \rightarrow 0 & \text{при } \vec{k} \in P \setminus \Omega, \end{cases} \quad (22)$$

$$X_{kq} = \begin{cases} x_0 \sqrt{\frac{2}{N_\Omega}} \operatorname{sign}(\mathcal{E}_a(k)) \operatorname{sign}(\mathcal{E}_a(q)) & \text{при } \{\vec{k}, \vec{q}\} \in \Omega_0, \\ \epsilon_X(k, q) \rightarrow 0 & \text{при } \{\vec{k}, \vec{q}\} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \end{cases} \quad (23)$$

где E, C, F, D, x_0 – некоторые постоянные, подлежащие определению в ходе решения.

Энергия одночастичного фермионного возбуждения $Q(\vec{k})$ должна быть неотрицательна во всем импульсном пространстве,

$$Q(\vec{k}) = (u_k^2 - v_k^2) \xi_s(\vec{k}) + \xi_a(\vec{k}) - 2 \sum_l (v_k \epsilon_k^l)^2 \xi(l).$$

Таким образом, из требования неотрицательности $Q(\vec{k})$ можно сделать вывод о характере решения уравнений (16)–(19), определяющих коэффициенты (u, v) -преобразования

Боголюбова в том случае, когда решение уравнения (11) отлично от тривиального, т.е. при $x_0 \neq 0$.

А именно, решение u_k, v_k уравнения компенсации бивершин, представленного системой (16)–(19), должно быть асинхронным. И, следовательно, функция

$$\xi(\vec{k}) = (u_k^2 - v_k^2)\mathcal{E}(\vec{k})$$

отрицательна в области Ω и положительна в области $P \setminus \Omega$, т.е. сферы $(u_k^2 - v_k^2) = 0$ и $\mathcal{E}(\vec{k}) = 0$ смещаются асинхронно при изменении вектора $\vec{A}_0$ и переходят друг в друга при зеркальном отражении относительно плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{A}_0$. Иными словами, для любого вектора $\vec{A}_0$ сферы $(u_k^2 - v_k^2) = 0$ и $\mathcal{E}(-\vec{k}) = 0$ совпадают. Функции u_k, v_k , удовлетворяющие названному условию, будем называть асинхронным решением уравнения компенсации бивершин в отличие от синхронного решения, для которого совпадают сферы $(u_k^2 - v_k^2) = 0$ и $\mathcal{E}(\vec{k}) = 0$ и функция $\xi(\vec{k}) \geq 0$ для любого $\vec{k} \in P$.

Можно показать, что для неотрицательности энергии одночастичного возбуждения $Q(\vec{k})$ постоянная x_0 , введенная в представлении (23) для функции X_{kq} , должна принимать значения

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad \text{где} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad \text{и} \quad m \ll \sqrt{N_\Omega}. \quad (24)$$

В этом случае будем иметь

$$u_k^2 - v_k^2 = \begin{cases} -1 + o(\epsilon_x^\pm) & \text{при } \vec{k} \in \Omega, \\ 1 - o(\epsilon_x^\pm) & \text{при } \vec{k} \in P \setminus \Omega. \end{cases}$$

Нормальное решение для функций u_k, v_k , являющихся коэффициентами преобразования Боголюбова, идентифицируется равенством $F = 0$ при $\vec{k} \in \Omega$.

Подставляя функции (21)–(23) в уравнения (16)–(19), заметим, что последние слагаемые в правых частях уравнений (16), (17) равны нулю, т.к. функция $(U_k^2 - V_k^2)$ меняет знак при переходе через поверхность Ферми и через границу $\partial\Omega$, а ее среднее значение по области Ω равно нулю. Если x_0 определено равенством (24), то в области $P \setminus \Omega$ функции (21)–(23) удовлетворяют уравнениям (16)–(19), т.к. в этом случае все слагаемые, содержащие интеграцию в правых частях уравнений (16)–(19), стремятся к нулю из-за стремления к нулю в области $P \setminus \Omega$ функции t_{kk} и подынтегральных сомножителей вида

$$(W_{kq}w_{kq} \pm T_{kq}t_{kq}) \Big|_{\substack{\vec{k} \in P \setminus \Omega \\ \vec{q} \in \Omega}} \rightarrow 0, \quad (W_{kq}t_{kq} + T_{kq}w_{kq}) \Big|_{\substack{\vec{k} \in P \setminus \Omega \\ \vec{q} \in \Omega}} \rightarrow 0.$$

Усредненные по области Ω с помощью подстановки функций (21)–(23) уравнения (16)–(19), эквивалентные уравнению компенсации бивершин (10), представляют собой

четыре алгебраических уравнения относительно искомых постоянных E, C, F, D :

$$E = 0, \quad (25)$$

$$F = -tG_1 \frac{F}{\sqrt{F^2 + D^2}}, \quad (26)$$

$$C = -\frac{D}{\sqrt{F^2 + D^2}}(w + t)\langle |\mathcal{E}_a| \rangle + tG_1 \frac{F^2}{F^2 + D^2}, \quad (27)$$

$$D = -(w - t)\langle |\mathcal{E}_a| \rangle + wG_1 \frac{D}{\sqrt{F^2 + D^2}}, \quad (28)$$

где усредненное ядро

$$G_1 = -\sum_s 2\tau_s^0 \tau_s^1 \left\langle \sum_{\vec{q} \in \Omega} G_k^q(s) \right\rangle_{\vec{k} \in \Omega},$$

усредненные коэффициенты

$$w = \cos(x_0 \sqrt{2}) \operatorname{ch}_{\frac{1}{3}} B_0, \quad t = \cos(x_0 \sqrt{2}) \operatorname{sh}_{\frac{1}{3}} B_0, \quad B_0 = x_0 (2N\Omega)^{\frac{1}{6}},$$

среднее по области Ω значение модуля антисимметричной части энергии электронов

$$\langle |\mathcal{E}_a| \rangle \equiv \langle |\mathcal{E}_a(\vec{k})| \rangle_{\vec{k} \in \Omega} = \frac{4}{3} \mathcal{E}_F \frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} \right)^2 \right\}^{-1},$$

$\mathcal{E}_F$ – энергия Ферми, k_F – импульс Ферми, e – заряд электрона.

Здесь необходимо еще раз отметить, что для магнанных дисперсионных ветвей $\tau_s^0 \tau_s^1 < 0$ и, следовательно, условие преобладания магнного спектра выражается неравенством $G_1 > 0$. На основании анализа уравнений (25)–(28) может быть сделан следующий вывод. Чтобы существовало асинхронное решение уравнения компенсации бивершин для функций u_k, v_k , коэффициенты w, t должны быть отрицательными, т.е. $\cos(x_0 \sqrt{2}) < 0$. Равенство (24) выше было получено только из требования неотрицательности выражения для энергии одночастичного возбуждения $Q(\vec{k}) \geq 0$. Учет условия существования асинхронного решения для функций u_k, v_k также необходим, чтобы обеспечить неотрицательность энергии $Q(\vec{k})$. Данное условие однозначно определяет параметр $x_0 = \pi/2$.

Уравнение (26) после исключения нормального решения $F = 0$ может быть записано в следующей форме:

$$\sqrt{F^2 + D^2} = -tG_1. \quad (26')$$

Поделив уравнение (28) на уравнение (26'), получим

$$\Xi = \frac{D}{\sqrt{F^2 + D^2}} = \left(\frac{w - t}{w + t} \right) \lambda^{-1}, \quad \lambda = \frac{G_1}{\langle |\mathcal{E}_a| \rangle}. \quad (29)$$

Перейдем к исследованию уравнения компенсации тетравершин (11). Сразу заметим, что в областях Ω_1, Ω_2 при выполнении равенства (24) левая и правая части уравнения (11) стремятся к нулю, поэтому остается рассмотреть только область $\Omega_0 = \Omega \otimes \Omega$.

Особенность уравнения компенсации тетравершин (11) заключается в том, что при усреднении по области Ω_0 посредством подстановки вида (21)–(23) и с учетом равенства (24) все слагаемые в правой части уравнения (11), содержащие коэффициенты вида $\tilde{f}_{k,q}^{(\mu)}$, взаимно сокращаются и не дают вклада в уравнение.

Подставим в уравнение (11) конкретный вид коэффициентов $\tilde{g}_{k,q}^{(\mu)}$ и усредним полученные уравнения по области Ω_0 на том основании, что входящие в него функции имеют вид (21)–(23). Тогда после приведения подобных членов будем иметь следующий канонический вид уравнения (11), усредненного по области Ω_0 :

$$\delta_\epsilon(X) = G_2 \{ 2wt(w^2 + t^2) - (w - t)^2 \lambda^{-2} [(w + t)^2 - (w - t)^2 \lambda^{-2}] \}, \quad (30)$$

где через $\delta_\epsilon(X)$ обозначена левая часть равенства (11).

Усредненное ядро и средние значения коэффициентов преобразования (8) имеют вид

$$G_2 = \left\langle \sum_{h,p;s} G_{kq}^{hp}(s) \right\rangle_{\{\vec{k},\vec{q}\} \in \Omega_0}, \quad w = \langle w_{kq} \rangle_{\{\vec{k},\vec{q}\} \in \Omega_0}, \quad t = \langle t_{kq} \rangle_{\{\vec{k},\vec{q}\} \in \Omega_0}.$$

Функция $\delta_\epsilon(X)$ с учетом равенства (24) может быть отлична от нуля за счет слагаемых порядка $O(X_{kq}^3)$, а также вследствие сглаженных фронтов реальной функции X_{kq} в окрестности границы $\partial\Omega_0$ области Ω_0 . В рамках принятого подхода анализировать фронтальное поведение всех искомых функций на границах областей разбиения Ω_J , $J = 0, 1, 2$, не представляется возможным. Однако далее станет очевидно, что конкретный вид фронтов искомых функций не имеет принципиального значения. Важно знать только оценку порядка малости

$$\delta_\epsilon(X) = O(N_\Omega^{-\frac{3}{2}}), \quad \lim_{\|X\| \rightarrow 0} \delta_\epsilon(X) = 0.$$

Формальное присутствие в уравнении (30) малого параметра $\delta_\epsilon(X)$ свидетельствует о существовании гладкого решения для X_{kq} .

Разделив обе части равенства (30) на выражение $(w^2 + t^2)^2$, получим уравнение

$$[\lambda^{-2}(1 + \lambda^{-2}) + \delta_G]Y^2 - (2\lambda^{-4} - 1)Y - [\lambda^{-2}(1 - \lambda^{-2}) + \delta_G] = 0, \quad (31)$$

где

$$Y = \frac{2wt}{w^2 + t^2}, \quad Y \in [0, 1], \quad \delta_G = \frac{\delta_\epsilon(X)}{G_2(w^2 - t^2)^2},$$

величина $(w^2 - t^2)$ слабо изменяется и близка к единице, поэтому ее можно внести в константу δ_G , не выражая через переменную Y .

Параметр δ_G можно рассматривать как малое возмущение в полученном квадратном уравнении (31) относительно переменной Y . При $\delta_G \rightarrow 0$ находим два корня уравнения (31):

$$Y = \frac{1}{\lambda^2 + 1}, \quad Y = 1 - \lambda^2. \quad (32)$$

Переменная Y выражается через величину B_0 следующим образом:

$$Y = \frac{2 \operatorname{th}_{\frac{1}{3}} B_0}{1 + \operatorname{th}_{\frac{1}{3}}^2 B_0}, \quad B_0 = x_0 (2N_\Omega)^{\frac{1}{6}}, \quad (33)$$

где в силу требования неотрицательности энергии одночастичного возбуждения $Q(\vec{k})$ величина $x_0 = \pi/2$. Таким образом, для постоянной B_0 получим выражение

$$B_0 = \frac{\pi}{2} (2N_\Omega)^{\frac{1}{6}}.$$

Следовательно, уравнение компенсации тетравершин фиксирует фазовый объем N_Ω области Ω , существование которой вызвано топологическим дефектом неодносвязного пространства локализации сверхпроводящей системы. Фазовый объем N_Ω прямо пропорционален числу носителей (электронов проводимости) N_F и абсолютной величине поля вектор-потенциала $|\vec{A}_0|$, обуславливающего смещение ферми-сферы в импульсном пространстве:

$$N_\Omega = \frac{3}{2} N_F \frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} \right)^2 \right\}, \quad N_F = \frac{2V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3.$$

Здесь k_F – импульс Ферми, N_F – число носителей.

В дальнейшем будем рассматривать только такие значения внешнего поля $\vec{A}_0$, которые ограничены условием

$$\frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} < 1.$$

При $e|\vec{A}_0|/k_F = 1$ получим, что $N_\Omega = N_F$, следовательно, при дальнейшем увеличении поля $|\vec{A}_0|$ фазовый объем N_Ω будет оставаться постоянным и равным удвоенному фазовому объему сферы Ферми.

Используя равенства (32) и (33), можем выразить спецтангенс величины B_0 через параметр λ . Практический интерес представляет асимптотика $B_0 \gg 1$, $\lambda \ll 1$. В случае, если $B_0 \gg 1$, спецтангенс стремится к стандартному гиперболическому тангенсу. Тогда при $\lambda \ll 1$ оба корня (32) практически совпадают и уравнение компенсации тетравершин сводится к алгебраическому уравнению $\operatorname{th}(2B_0) = Y(\lambda)$, откуда

$$B_0 = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1 + Y(\lambda)}{1 - Y(\lambda)}}.$$

Подставляя выражения (32) для корней $Y(\lambda)$ уравнения (31) получим

$$B_0 = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{2}{\lambda^2} \pm 1}. \quad (34)$$

При $\lambda \ll 1$ имеем

$$B_0 \approx \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2}{\lambda^2} \right).$$

Отсюда следует, что

$$N_{\Omega} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{2}{\lambda^2} \right) \right]^6. \quad (35)$$

Параметр λ представляет собой характеристику сверхпроводящей системы, он пропорционален числу носителей и константе электрон-бозонного взаимодействия второго порядка по фермионным операторам. В свою очередь, число носителей пропорционально объему образца. Следовательно, для каждого конкретного образца с фиксированными геометрическими размерами существует собственное значение поля вектор-потенциала $|\vec{A}_0|$, при котором фазовый объем N_{Ω} удовлетворяет уравнению (34), т.е. удовлетворяет уравнению компенсации тетравершин.

В качестве примера обратимся к нашей простейшей модели, в которой сверхпроводящая система с преобладающим магннным спектром локализована в ϵ -окрестности кругового контура Γ , охватывающего соосный ему внешний магнитный поток Φ_0 . В данной модели поле вектор-потенциала $\vec{A}_0$ связано с величиной внешнего магнитного потока простым соотношением $\Phi_0 = |\vec{A}_0| 2\pi R$, где R – радиус контура Γ . Следовательно, при фиксированном радиусе контура сверхпроводящее состояние может существовать только в том случае, если внешний магнитный поток имеет определенное фиксированное значение, при котором удовлетворено уравнение компенсации тетравершин.

В заключение приведем более подробное выражение для параметра λ . Пусть модуль коэффициента взаимодействия в гамильтониане H_1 представим в виде

$$|\Psi_s(\vec{k} - \vec{q})| = g_s \sqrt{\omega_s(\vec{k} - \vec{q}) \mathcal{E}_F},$$

где g_s – константа электрон-бозонного взаимодействия для дисперсионной ветви с индексом s .

Введенное ранее усредненное ядро перепишем в виде

$$G_1 = -N_{\Omega} \sum_s 2\tau_s^0 \tau_s^1 \langle G_k^q(s) \rangle_{\{\vec{k}, \vec{q}\} \in \Omega_0}$$

или, подставляя выражение для ядра, получим

$$G_1 = -N_{\Omega} \mathcal{E}_F \sum_s 2\tau_s^0 \tau_s^1 (g_s^{\text{eff}})^2, \\ (g_s^{\text{eff}})^2 \equiv (g_s)^2 \left\langle \frac{\omega_s(\vec{k} - \vec{q})}{\omega_s(\vec{k} - \vec{q}) + Q(\vec{k}) + Q(\vec{q})} \right\rangle_{\{\vec{k}, \vec{q}\} \in \Omega_0}.$$

Тогда параметр $\lambda = G_1 / \langle |\mathcal{E}_a| \rangle$ можно записать в виде

$$\lambda = -\frac{1}{2} N_F \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} \right)^2 \right\}^2 \sum_s 2\tau_s^0 \tau_s^1 (g_s^{\text{eff}})^2. \quad (36)$$

Если величина поля $\vec{A}_0$ значительно меньше импульса Ферми, то можно пренебречь зависимостью параметра λ от величины поля вектор-потенциала, т.е.

$$\lambda = -\frac{9}{8} N_F \sum_s 2\tau_s^0 \tau_s^1 (g_s^{\text{eff}})^2. \quad (36')$$

Из соотношения (36) видно, что магнотные дисперсионные ветви вносят положительный вклад в параметр λ , а вклад фононных дисперсионных ветвей отрицательный. Выбирая сверхпроводящий образец с фиксированным числом носителей N_F и определенным соотношением между магнотной и фононной частями бозонного спектра, мы, таким образом, выбираем параметр λ .

Необходимо отметить, что для параметра λ , представленного формулой (36), кроме верхнего асимптотического ограничения $\lambda < 1$, существует также и нижнее ограничение $\lambda_{\min} < \lambda$, где $\lambda_{\min}$ — некоторое положительное значение, при котором фазовый объем N_Ω достигает максимального значения $N_\Omega^{\max} = N_F$.

Следовательно, нижняя граница $\lambda_{\min}$ определяется из условия

$$N_\Omega^{\max} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{2}{\lambda_{\min}^2} \right) \right]^6,$$

откуда следует, что

$$\lambda_{\min} = \sqrt{2} \exp(-\pi(2N_F)^{\frac{1}{6}}).$$

Итак, параметр λ заключен в интервале $\lambda_{\min} < \lambda < 1$. Если же параметр $\lambda < \lambda_{\min}$, то система уравнений компенсации не имеет решения, т.к. в этом случае эквивалентное уравнению компенсации тетравершин уравнение (35) определяет значение фазового объема N_Ω , большее чем значение удвоенного фазового объема сферы Ферми, но последнее невозможно.

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЩЕЛЬ, ОТВЕЧАЮЩАЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕМУ СОСТОЯНИЮ В ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЕ

Энергетическая щель, отвечающая сверхпроводящему состоянию, согласно методу компенсации “опасных” диаграмм определяется как минимальное значение разности между энергиями одночастичного фермионного возбуждения, соответствующими сверхпроводящему и нормальному решениям системы уравнений компенсации.

Пусть $E_1^{\text{super}}(\vec{k})$ и $E_1^{\text{norm}}(\vec{k})$ — энергии одночастичного фермионного возбуждения соответственно в случае сверхпроводящего и нормального решений системы уравнений (10), (11). Тогда энергетическая щель, отвечающая сверхпроводящему состоянию, имеет следующее определение:

$$\Delta \equiv \min_{\vec{k} \in P} \{ E_1^{\text{super}}(\vec{k}) - E_1^{\text{norm}}(\vec{k}) \}.$$

В первом порядке стационарной теории возмущений как в случае сверхпроводящего, так и в случае нормального решения уравнений компенсации энергия одночастичного возбуждения определяется выражением

$$E_1(\vec{k}) = Q(\vec{k}) - \langle 1 | \mathcal{H}_{\text{int}} (\mathcal{H}_0 - Q(\vec{k}))^{-1} \mathcal{H}_{\text{int}} | 1 \rangle, \quad (37)$$

где нулевое приближение энергии одночастичного возбуждения $Q(\vec{k})$ определено формулой (13), а обозначение $|1\rangle$ есть вектор состояния с одной частицей в представлении чисел заполнения.

Подставляя в формулу (37) конкретный вид гамильтонианов взаимодействия $\mathcal{H}_{\text{int}}$ и гамильтониана $\mathcal{H}_0$ из списка слагаемых общего преобразованного гамильтониана (9), получим для энергии одночастичного возбуждения следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 E_1(\vec{k}) = & Q(\vec{k}) - \sum_s \sum_{\vec{q} \in \mathcal{P}} \left\{ \frac{1}{2} \{ (\tau_s^0)^2 + (\tau_s^1)^2 \} [(\tilde{f}_{k,q}^{(0)})^2 + (\tilde{f}_{k,q}^{(1)})^2] - 2\tau_s^0 \tau_s^1 \tilde{f}_{k,q}^{(0)} \tilde{f}_{k,q}^{(1)} \right\} \times \\
 & \times \frac{|\Psi_s(\vec{k} - \vec{q})|^2}{\omega_s(\vec{k} - \vec{q}) + Q(\vec{q}) - Q(\vec{k})} - \sum_{l,s,q \in \mathcal{P}} \sum_{\mu, \nu=0,1} \tilde{f}_{l,k}^{(\mu)} \tilde{f}_{q,l}^{(1-\mu)} \tilde{f}_{q,s}^{(\nu)} \tilde{f}_{s,k}^{(1-\nu)} \times \\
 & \times \sum_s \frac{|\Omega_s(\vec{k} - \vec{q})|^2}{\omega_s(\vec{k} - \vec{q}) + Q(\vec{q}) - Q(\vec{k})}. \tag{38}
 \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения (12), (15); коэффициенты $\Psi_s(\vec{l})$, $\Omega_s(\vec{l})$ введены в исходных гамильтонианах электрон-бозонного взаимодействия H_1 , H_2 , данных формулами (3), (4).

Теперь нужно вычислить энергию E_1 для нормального и сверхпроводящего решений системы уравнений компенсации. Выпишем в явном виде сверхпроводящее решение системы (10), (11) (асинхронное):

$$\begin{aligned}
 u_k = & \begin{cases} 1 - o(\epsilon), & \mathcal{E}(\vec{k}) > 0, & \mathcal{E}(-\vec{k}) > 0, \\ \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}, & \mathcal{E}(\vec{k}) < 0, & \mathcal{E}(-\vec{k}) > 0, \\ \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}, & \mathcal{E}(\vec{k}) > 0, & \mathcal{E}(-\vec{k}) < 0, \\ \epsilon(\vec{k}) \rightarrow 0, & \mathcal{E}(\vec{k}) < 0, & \mathcal{E}(-\vec{k}) < 0; \end{cases} \\
 v_k = & \begin{cases} \epsilon(\vec{k}) \rightarrow 0, & \mathcal{E}(\vec{k}) > 0, & \mathcal{E}(-\vec{k}) > 0, \\ \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}, & \mathcal{E}(\vec{k}) < 0, & \mathcal{E}(-\vec{k}) > 0, \\ \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}, & \mathcal{E}(\vec{k}) > 0, & \mathcal{E}(-\vec{k}) < 0, \\ 1 - o(\epsilon), & \mathcal{E}(\vec{k}) < 0, & \mathcal{E}(-\vec{k}) < 0; \end{cases} \\
 X_{kq} = & \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{2N_\Omega}} \text{sign}(\mathcal{E}_a(k)) \text{sign}(\mathcal{E}_a(q)), & \{\vec{k}, \vec{q}\} \in \Omega_0, \\ \epsilon_X(\vec{k}, \vec{q}) \rightarrow 0, & \{\vec{k}, \vec{q}\} \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

где постоянные α , β выражаются через введенный в уравнении (29) параметр $\Xi = D/\sqrt{F^2 + D^2}$ с помощью соотношения

$$\frac{\alpha \pm \beta}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 - \Xi^2}} \pm \sqrt{1 - \sqrt{1 - \Xi^2}} \right).$$

Энергетическая щель Δ , отвечающая сверхпроводящему состоянию в исследуемой фермион-бозонной системе, локализованной в неодносвязном пространстве и содержащей электрон-бозонные взаимодействия второго и четвертого порядков по фермионным операторам, определяется выражением

$$\Delta = \frac{1}{4} \sum_s \{ (\tau_s^0)^2 + (\tau_s^1)^2 \} \sum_{\vec{q} \in \Omega} \frac{|\Psi_s(\vec{k} - \vec{q})|^2}{\omega_s(\vec{k} - \vec{q}) + Q(\vec{q})} \Big|_{\vec{k} \in \partial\Omega}. \tag{39}$$

Формулу (39) можно упростить, обозначив

$$(\tilde{g}_s^{\text{eff}})^2 = (g_s)^2 \left\langle \frac{\omega_s(\vec{k} - \vec{q})}{\omega_s(\vec{k} - \vec{q}) + Q(\vec{q})} \right\rangle_{\vec{k} \in \partial\Omega, \vec{q} \in \Omega}.$$

Тогда выражение для энергетической щели в единицах энергии Ферми принимает вид

$$\frac{\Delta}{\mathcal{E}_F} = \frac{1}{4} N_\Omega \sum_s (\tilde{g}_s^{\text{eff}})^2, \quad (40)$$

где

$$N_\Omega = \frac{3}{2} N_F \frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} \right)^2 \right\}, \quad N_F = \frac{2V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3, \quad \frac{e|\vec{A}_0|}{k_F} < 1. \quad (41)$$

Таким образом, соотношения (35), (36), (40), (41) связывают между собой четыре параметра исследуемой модели N_F , k_F , Δ , A_0 (число носителей, импульс (или энергию) Ферми, энергетическую щель сверхпроводящего состояния и абсолютную величину внешнего поля вектор-потенциала, определяющего смещение ферми-сферы в импульсном пространстве), а также константы электрон-бозонного взаимодействия второго порядка по фермионным операторам.

Выражение для энергетической щели можно записать также в виде

$$\frac{\Delta}{\mathcal{E}_F} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{2}{\lambda^2} \right) \right]^6 \sum_s (\tilde{g}_s^{\text{eff}})^2.$$

Полученные результаты описывают сверхпроводящее состояние в фермион-бозонной системе многих частиц с преобладанием магннного спектра, содержащей электрон-бозонные взаимодействия второго и четвертого порядков по фермионным операторам и локализованной в пространстве, неодносвязность которого обусловлена внешним калибровочным полем.

Необходимо подчеркнуть, что полученное выражение для энергетической щели носит в определенной степени формальный характер. Для упрощения вычислений авторы работали в рамках модели $\lambda_{\min} < \lambda < 1$, сужающей диапазон возможных величин электрон-бозонного взаимодействия, но тем не менее дающей качественно верный результат.

Существенным для нашей модели является присутствие поля электромагнитного вектор-потенциала $\vec{A}$. Именно при наличии поля вектор-потенциала обменное взаимодействие проявляет себя наиболее полно. Предельно идеализированная модель, играющая роль упрощенного эквивалента реального сверхпроводящего соединения, содержащего магнитную подсистему, представляет собой фермион-бозонную систему многих частиц, локализованную в ϵ -окрестности кругового контура, охватывающего соосный ему внешний магнитный поток определенной величины. При этом значение калибровочного вектор-потенциала A_0 определяется величиной магнитного потока Φ_0 и радиусом контура R ,

$$A_0 = \frac{\Phi_0}{2\pi R}.$$

Внутрикристаллическое пространство реального сверхпроводящего антиферромагнетика является неодносвязным, т.к. пронизано многочисленными трубками магнитного потока, образованными цепочками из сонаправленных атомных магнитных моментов. Эквивалентная модель такого соединения представляет собой фермион-бозонную систему многих частиц, локализованную в пространстве, заполненном решеткой из топологически нетривиальных нитей или трубок с некоторым конечным сечением.

Кроме того, синтез упругой и магнитной подсистем в исследуемых магнитных сверхпроводниках обуславливает существование электрон-бозонных взаимодействий второго и четвертого порядков по фермионным операторам.

Дальнейшее исследование поставленной задачи позволит определить величину энергетической щели сверхпроводящего состояния и температуру фазового перехода в сверхпроводящее состояние. Интересно было бы рассмотреть также более общую модель магнитных сверхпроводников.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS № 96-0793.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов*. Избранные труды в трех томах. Т. 3. Киев: Наукова думка, 1971. С. 11.
- [2] *J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer*. Phys. Rev. 1957. V. 106. P. 162; V. 108. P. 1175.
- [3] *M. R. Shafroth, S. T. Butler, J. M. Blatt*. Helv. Phys. Acta. 1957. V. 30. P. 93.
- [4] *H. Fröhlich*. Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 845.
- [5] *М. А. Савченко*. Высокотемпературная сверхпроводимость. В сб.: Обзоры по высокотемпературной сверхпроводимости. Вып. 1. Сост. Т. Ю. Масленникова. М.: МЦНТИ, 1990. С. 3.
- [6] *А. А. Вихорев, М. А. Савченко, Б. И. Садовников*. Вестн. Моск. ун-та. 1994. Т. 35. № 3. С. 50.
- [7] *H. Koppe, B. Mühlischlegel*. Z. Phys. 1958. V. 151. P. 613.
- [8] *Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, А. С. Шумовский*. Математические методы статистической механики модельных систем. М.: Наука, 1989.
- [9] *Е. Р. Алабердин, А. А. Вихорев, А. М. Савченко, Б. И. Садовников*. ТМФ. 1996. Т. 107. № 1. С. 129.

Поступила в редакцию 16.X.1998 г.,
после доработки 19.I.1999 г.