Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Е. Бурланков, А. М. Самочадин, Потоки энергии гравитационных волн,
ТМФ, 1999, том 120, номер 1, 168–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf767>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:29:56

© 1999 г. Д. Е. Бурланков*, А. М. Самочадин*

ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Проблема переноса энергии слабыми гравитационными волнами на статическом фоне решается с помощью аппарата векторов Киллинга и не требует введения псевдотензора энергии-импульса. Выведен квадратичный по возмущениям метрики лагранжиан, определяющий поток и плотность энергии гравитационных волн на статическом сферически-симметричном фоновом пространстве-времени. По угловым координатам интегрирование производится на уровне интеграла действия, и поэтому задача оказывается двумерной. Вычислены потоки энергии на фоне метрики Шварцшильда.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1957 г. Редже и Уилер [1] описали технику мультипольного разложения слабых гравитационных волн на фоне метрики Шварцшильда.

Через 10 лет Торн с сотрудниками [2] дополнили уравнения гравитации уравнениями гидродинамики и получили замкнутую систему для совместных гравитационно-акустических колебаний в жидком самогравитирующем теле.

В последующие годы рядом исследователей (см., например, [3]) были предприняты усилия по решению полученных уравнений для звездных систем с конкретными уравнениями состояния.

С конца 80-х годов Чандрасекар и Феррари с сотрудниками выполнили цикл работ [4], в которых, кроме чисто технических проблем решения сложной системы уравнений, был поставлен и ряд принципиальных вопросов, в частности проблема переноса энергии данными возмущениями [5]. Чандрасекар и Феррари исходили из традиционного описания переноса энергии на основе так называемого псевдотензора энергии-импульса.

При рассмотрении процессов переноса энергии в общей теории относительности возникают две серьезные проблемы: принципиальная – определение понятий, описывающих перенос энергии, и техническая – как сделать используемые формулы минимально громоздкими.

Большое число задач связано с изучением возмущений на заданном фоне. Если фон статический, то существует вектор Киллинга – сдвиг по времени, определяющий через лагранжиан вектор, компоненты которого можно трактовать как плотность и поток

* Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, Россия

энергии. Первая из таких задач была решена в работе Эйнштейна [6], где рассматривались возмущения пространства Минковского, обладающего максимальной группой движения. Получилась лагранжева теория гравитационного поля в плоском пространстве-времени с десятикомпонентным тензором энергии-импульса, определяющим, в частности, поток и плотность энергии гравитационного поля. Однако в случае искривленного фона векторов Киллинга меньше и нужно рассматривать не полный комплекс – псевдотензор энергии-импульса, связанный со всеми векторами Киллинга сразу, а потоки, генерируемые каждым вектором Киллинга или какими-то их группами (например, вращениями).

Одной из важных задач с искривленным пространственно-временным фоном является задача о бесконечно малых колебаниях жидкого самогравитирующего тела [1–4]. Фоновая метрика в этой задаче статическая и сферически-симметричная, поэтому можно ввести потоки, соответствующие векторам Киллинга: сдвига по времени (поток и плотность энергии) и вращения (поток и плотность момента количества движения). Внутри тела возмущения определяют совместные гравитационно-акустические волны. Вне тела возмущения распространяются на фоне пространства Шварцшильда, а на бесконечности – в пространстве Минковского. При этом импульс возмущений не определен внутри и вблизи звезды и приобретает смысл лишь для волн на бесконечности, где фоновым пространством является пространство Минковского.

Для упрощения применяемых формул мы используем два обстоятельства. Во-первых, для вычисления потоков, генерируемых векторами Киллинга, калибровочные условия можно учитывать прямо в лагранжиане, что, конечно, уменьшает количество переменных и количество вариационных уравнений, поэтому динамика системы в этом случае описывается не только соответствующими уравнениями Лагранжа, но и теми уравнениями, которые исчезли за счет устранения некоторых компонент калибровкой. Однако, т.к. для оставшихся переменных уравнения Лагранжа выполняются, уравнение непрерывности для потока энергии также остается справедливым.

Второе обстоятельство связано с тем, что в сферически-симметричном случае гравитационные возмущения стандартным образом раскладываются по угловым переменным. Неизвестными будут лишь функции радиуса и времени. После интегрирования действия по угловым переменным оно оказывается функционалом от функций лишь двух переменных.

Бесконечно малые колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, выводятся из лагранжианов гравитации и материи, разложенных до второго порядка. Получающиеся соотношения являются точно согласованными.

2. ПОТОК ЭНЕРГИИ НА СТАТИЧЕСКОМ ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

По теореме Нетер, если пространство-время обладает какими-либо векторами Киллинга ξ , то ими определяются сохраняющиеся величины для полей f^α , уравнения динамики которых обращают вариационные производные Лагранжа с лагранжианом $\mathcal{L}$ (в

который включен и множитель $\sqrt{g}$ в нуль:

$$\int_B \delta_\xi \mathcal{L} d^n x = \int_B \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^\alpha} \delta_\xi f^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^{\alpha, i}} \partial_i \delta_\xi f^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{jk}} \delta_\xi g_{jk} \right) d^n x = - \oint_{\partial B} \mathcal{L} \xi^i d_i^{n-1} x.$$

Поскольку ли-вариация метрического тензора по полю Киллинга равна нулю, третье слагаемое пропадает, а первое и второе (вследствие уравнений Лагранжа) преобразуются в поверхностный интеграл

$$\oint_{\partial B} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^{\alpha, i}} \delta_\xi f^\alpha + \mathcal{L} \xi^i \right) d_i^{n-1} x = 0,$$

откуда и следует закон сохранения потока, связанного с полем ξ .

Если фоновая метрика стационарна, то вектор $\xi^i = (1, 0, 0, 0)$ является вектором Киллинга, $\delta f^\alpha = -\dot{f}^\alpha$, а плотность и потоки энергии определяются выражениями

$$\sqrt{g} \mathcal{W} \equiv \sqrt{g} \mathcal{U}^0 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}^\alpha} \dot{f}^\alpha - \mathcal{L} \right), \quad (1)$$

$$\sqrt{g} \mathcal{U}^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^{\alpha, i}} \dot{f}^\alpha \quad (2)$$

и удовлетворяют ковариантному закону сохранения

$$\sum_{i=0}^3 \nabla_i \mathcal{U}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} \mathcal{U}^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \dot{f}^\alpha \left(\partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}^\alpha} \right) + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^{\alpha, i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^\alpha} \right) = 0,$$

если выполнены уравнения Лагранжа для всех переменных, входящих в лагранжиан. Несмотря на то что эти выражения формально совпадают с компонентами T_0^i канонического тензора энергии-импульса, они образуют компоненты векторного поля, ассоциированного с полем Киллинга $\xi = (1, 0, 0, 0)$.

В работе [5] (хотя авторы и исходили из десятикомпонентного псевдотензора энергии-импульса Эйнштейна) тоже использовались только $(0, i)$ -компоненты и большая часть надстройки, связанная с псевдотензором, оказалась излишней.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ЛАГРАНЖИАНА ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДО ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как и в работе [6], возмущения метрики обозначим через h_{ij} , т.е. $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}$. В дальнейшем все поднятия и опускания индексов у компонент h_{ij} или их линейных комбинаций, а также у ковариантных производных того же порядка малости будем проводить с помощью невозмущенного метрического тензора g_{ij} . Действие для гравитационного поля выражается через тензор Риччи формулой

$$S = -\frac{c^4}{16\pi k} \int \tilde{R}_{ij} \tilde{g}^{ij} \sqrt{\tilde{g}} d^4 x.$$

Тензор Риччи обладает определенным свойством аддитивности [7]. Если в одних и тех же координатах заданы два пространства с метрическими тензорами g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$, то

$$\tilde{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + S^i_{jkl}.$$

Тензор относительной кривизны S^i_{jkl} записывается через тензор относительной связности Π^i_{jk} , выражаемый, в свою очередь, через ковариантные в первом пространстве производные от метрического тензора второго пространства,

$$\begin{aligned} S^i_{jkl} &= \nabla_k \Pi^i_{jl} - \nabla_l \Pi^i_{jk} + \Pi^s_{jl} \Pi^i_{sk} - \Pi^s_{jk} \Pi^i_{sl}, \\ \Pi^i_{jk} &= \frac{\tilde{g}^{is}}{2} (\nabla_j \tilde{g}_{sk} + \nabla_k \tilde{g}_{sj} - \nabla_s \tilde{g}_{jk}). \end{aligned}$$

Так как $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}$ и $\nabla_k g_{ij} = 0$, то

$$\Pi^i_{jk} = \frac{\tilde{g}^{is}}{2} (\nabla_j h_{sk} + \nabla_k h_{sj} - \nabla_s h_{jk}) = \delta_1 \Gamma^i_{jk} + \delta_2 \Gamma^i_{jk} + \dots,$$

где

$$\delta_1 \Gamma^i_{jk} = \frac{g^{is}}{2} (\nabla_j h_{sk} + \nabla_k h_{js} - \nabla_s h_{jk}).$$

Для вычисления возмущений гравитационного действия также необходимо разложить с точностью до второго порядка обратный метрический тензор g^{ij} и меру объема $\sqrt{g}$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{ij} &\approx g^{ik} (\delta_k^j - h_k^j + h_s^j h_k^s), \\ \sqrt{\tilde{g}} &\approx \sqrt{g} \left(1 + \frac{h_i^i}{2} - \frac{1}{4} \left(h_j^i h_i^j - \frac{(h_i^i)^2}{2} \right) \right), \\ \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} &\approx \sqrt{g} g^{ik} \left(\delta_k^j - \left(h_k^j - \frac{\delta_k^j}{2} h_s^s \right) - \frac{h_k^j}{2} h_s^s + h_l^j h_k^l - \frac{\delta_k^j}{8} (2h_l^s h_s^l - (h_s^s)^2) \right). \end{aligned}$$

Соответствующее разложение тензора Риччи имеет вид

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} + \nabla_k \delta_1 \Gamma_{ij}^k - \nabla_i \delta_1 \Gamma_{jk}^k + \nabla_k \delta_2 \Gamma_{ij}^k - \nabla_i \delta_2 \Gamma_{jk}^k + \delta_1 \Gamma_{ij}^l \delta_1 \Gamma_{lk}^k - \delta_1 \Gamma_{il}^k \delta_1 \Gamma_{jk}^l.$$

Оставляя члены до второго порядка, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \tilde{R}_{ij} &= \sqrt{g} g^{ij} R_{ij} - \sqrt{g} g^{ij} \left(R_{ik} \left(h_j^k - \frac{1}{2} \delta_j^k h_s^s \right) - (\nabla_m \delta_1 \Gamma_{ij}^m - \nabla_i \delta_1 \Gamma_{jm}^m) \right) - \\ &\quad - \sqrt{g} g^{ik} \left(h_k^j - \frac{1}{2} \delta_k^j h_s^s \right) (\nabla_m \delta_1 \Gamma_{ij}^m - \nabla_i \delta_1 \Gamma_{jm}^m) + \\ &\quad + \sqrt{g} g^{ij} (\nabla_k \delta_2 \Gamma_{ij}^k - \nabla_i \delta_2 \Gamma_{jk}^k + \delta_1 \Gamma_{ij}^l \delta_1 \Gamma_{lk}^k - \delta_1 \Gamma_{il}^k \delta_1 \Gamma_{jk}^l) + \\ &\quad + \sqrt{g} g^{ik} R_{ij} \left(h_s^j h_k^s - \frac{1}{2} h_k^j h_s^s - \frac{1}{4} \delta_k^j \left(h_m^s h_s^m - \frac{1}{2} h_s^s h_m^m \right) \right). \end{aligned}$$

Члены, содержащие величину $\delta_2 \Gamma_{jk}^i$, представляют собой полную дивергенцию и после интегрирования переходят в поверхностный интеграл. Члены второго порядка, содержащие производные от $\delta_1 \Gamma_{jk}^i$, после интегрирования по частям с учетом точного соотношения

$$\nabla_i h_{jk} = g_{sk} \delta_1 \Gamma_{ij}^s + g_{js} \delta_1 \Gamma_{ik}^s$$

приводят к следующему выражению для второй вариации действия:

$$\begin{aligned} \delta_2 (\sqrt{g} g^{ij} R_{ij}) = & \sqrt{g} g^{ij} (\delta_1 \Gamma_{il}^k \delta_1 \Gamma_{jk}^l - \delta_1 \Gamma_{ij}^l \delta_1 \Gamma_{lk}^k) + \\ & + \sqrt{g} R_j^k \left(h_s^j h_k^s - \frac{1}{2} h_k^j h_s^s - \frac{1}{4} \delta_k^j \left(h_m^s h_s^m - \frac{1}{2} h_s^s h_m^m \right) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Потоки энергии в жидкости мы изучим в другой работе. Здесь же будем рассматривать возмущения на фоне вакуумных решений, так что все слагаемые, содержащие тензор Риччи R_{ij} , обращаются в нуль и вторая вариация действия совпадает с укороченным действием [8] при замене связностей Γ_{jk}^i на тензор $\delta_1 \Gamma_{jk}^i$.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Вследствие сферической симметрии фона зависимость компонент тензора возмущений метрики h_{ij} от угловых переменных стандартна. Техника разложения по тензорным сферическим функциям была разработана в работе [1].

При преобразовании угловых переменных компоненты, у которых отсутствуют индексы θ и ϕ , преобразуются как скаляры и раскладываются по обычным сферическим функциям. Преобразованием вращения любую такую функцию можно привести к функции $Y_{lm} = Y_{l0}$, зависящей только от θ и пропорциональной полиному Лежандра от $\cos \theta$. Эти функции мы будем обозначать Y_l .

Четные компоненты $h_{0\alpha}$ и $h_{1\alpha}$ при преобразованиях θ и ϕ ведут себя как векторы и раскладываются по векторным функциям $Y_v = \partial_\theta Y_l$ (первым присоединенным полиномам Лежандра от $\cos \theta$). Компоненты $h_{\alpha\beta}$ раскладываются как по скалярным, так и по тензорным (вторым присоединенным полиномам Лежандра) функциям Y_t . Обозначив

$$l_1 = \frac{l(l+1)}{2}, \quad l_2 = l_1 - 1 = \frac{(l-1)(l+2)}{2},$$

запишем необходимые для вычислений дифференциальные соотношения между используемыми сферическими функциями следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_\theta Y_l &= Y_v, & \partial_\theta Y_v &= -Y_t - l_1 Y_l, \\ \partial_\theta Y_t &= l_2 Y_v - 2(\operatorname{ctg} \theta) Y_t. \end{aligned}$$

В возмущениях метрики Шварцшильда можно провести полное разделение переменных. Для четных мод имеем

$$\begin{aligned} h_{00} &= Y_l a_{00} e^\nu, & h_{01} &= Y_l a_{01}, & h_{02} &= Y_v a_{02} r, \\ h_{11} &= Y_l a_{11} e^{-\nu}, & h_{12} &= Y_v a_{12} e^{-\nu} r, \\ h_{22} &= (a_{22} Y_l + a_{33} Y_t) r^2, \\ h_{33} &= (a_{22} Y_l - a_{33} Y_t) r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

для нечетных мод —

$$h_{03} = Y_v a_{03} r \sin \theta, \quad h_{13} = Y_v a_{13} e^{-\nu} Y_v r \sin \theta, \quad h_{23} = Y_t a_{23} r^2 \sin \theta,$$

где $e^\nu = 1 - 2M/r$.

5. ВЫБОР КАЛИБРОВКИ

При бесконечно малых преобразованиях координат $\tilde{x}^i = x^i + \xi^i$ ли-вариации метрического тензора $\delta g_{ij} = -\nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i$ могут трактоваться как изменения добавок к метрике h_{ij} при неизменном метрическом тензоре, т.е. рассматриваться как калибровочные преобразования тензорного поля h_{ij} ,

$$\delta_\xi h_{ij} = -\nabla_i \xi_j - \nabla_j \xi_i = -\partial_i \xi_j - \partial_j \xi_i + 2\Gamma_{ij}^k \xi_k.$$

Вследствие сферической симметрии и калибровочное поле ξ_i стандартным образом раскладывается по скалярным и векторным сферическим функциям (зависимость всех функций от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$),

$$\xi_0 = b_0(r) e^\nu Y_l, \quad \xi_1 = b_1(r) Y_l, \quad \xi_2 = r b_2(r) Y_v.$$

Эти калибровочные функции четные. Калибровочная функция

$$\xi_3 = r b_3(r) Y_v \sin \theta.$$

нечетная. Данные калибровочные преобразования переносятся на радиальные функции $a(r)$:

$$\begin{aligned} \delta a_{00} &= 2i\omega b_0 + \frac{2M}{r^2} b_1, & \delta a_{01} &= i\omega b_1 - e^\nu b'_0, \\ \delta a_{02} &= i\omega b_2 - \frac{b_0}{r} e^\nu, & \delta a_{03} &= i\omega b_3, \\ \delta a_{11} &= -2b'_1 e^\nu - \frac{2M}{r^2} b_1, & \delta a_{12} &= \left(\frac{b_2 - b_1}{r} - b'_2 \right) e^\nu, \\ \delta a_{13} &= \frac{b_3}{r} e^\nu, & \delta a_{22} &= \frac{2l_1 b_2}{r} - \frac{2b_1}{r} e^\nu, \\ \delta a_{23} &= \frac{2b_3}{r}, & \delta a_{33} &= \frac{2b_2}{r}. \end{aligned}$$

Четыре калибровочные функции $b_i(r)$ могут быть использованы для обращения в нуль некоторых компонент функций $a_i(r)$.

В работах [1–2] калибровочные функции использовались так, чтобы оставались только функции, раскладываемые по скалярным сферическим гармоникам Y_l ($h_{00}, h_{01}, h_{11}, h_2^2 = h_3^3$). Чандрасекар и Феррари [4], рассматривая только четные моды, приводили тензор возмущения к диагональному виду.

Для внутренней задачи с жидкостью будет выбрана сопутствующая калибровка. Здесь же, во внешней задаче, мы приведем формулы в калибровке Уилера–Редже–Торна. В этой калибровке в уравнениях возникает алгебраическое тождество $a_{11} = a_{00}$, которое мы будем включать в лагранжиан до вычисления потоков и получения уравнений. Хотя при этом число вариационных уравнений Лагранжа уменьшается, однако на решениях уравнений Эйнштейна вариационные уравнения Лагранжа продолжают обращаться в нуль, что только и является необходимым для сохранения потока энергии.

6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО УГЛОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Лагранжиан квадратичен относительно возмущений, раскладываемых по скалярным, векторным и тензорным сферическим функциям. Поэтому в нем возникают произведения этих функций, которые можно проинтегрировать по сфере еще до решения уравнений. Интеграл по сфере от произведения двух функций AB будем обозначать как $\langle AB \rangle$. Приняв нормировку $\langle Y_l^2 \rangle = 1$ и учтя это умножением всего действия на $4\pi/(2l+1)$, получим для остальных интегралов

$$\begin{aligned} \langle Y_v^2 \rangle &= 2l_1, & \langle Y_t^2 \rangle &= l_1 l_2, \\ \left\langle \left(\frac{Y_t}{\sin \theta} \right)^2 \right\rangle &= \frac{2l+1}{4} l_1 l_2, & \left\langle \left(\frac{Y_v}{\sin \theta} \right)^2 \right\rangle &= l_1 (2l+1), \\ \langle Y_l Y_t \rangle &= \frac{l(l-1)}{2}, & \langle Y_l Y_v \cot \theta \rangle &= -l, & \langle Y_v Y_t \cot \theta \rangle &= l_1 (l-1). \end{aligned}$$

В результате вычисленная по формуле (3) с учетом равенства $R_{ij} = 0$ четная часть лагранжиана (умноженная на $\sqrt{g}$, так что $S = \int \mathcal{L} dr dt$) зависит от функций двух переменных и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e &= \frac{c^4}{4k(2l+1)} \left(\left(1 - \frac{2M}{r} \right) r^2 a'_{22} \left(\frac{a'_{22}}{2} - a'_{00} \right) - \right. \\ &\quad - 2M \left((a'_{00} + a'_{22}) a_{00} - a'_{01} a_{01} \right) + r^2 (\dot{a}_{01} (a'_{00} + a'_{22}) + (\dot{a}_{22} - \dot{a}_{00}) a'_{01}) + \\ &\quad \left. + l_1 (a_{01}^2 - a_{00}^2) + \left(r \dot{a}_{22} a_{01} - r^2 \dot{a}_{22} \left(\dot{a}_{00} + \frac{\dot{a}_{22}}{2} \right) \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Плотность энергии и поток определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{00}} \dot{a}_{00} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{01}} \dot{a}_{01} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{22}} \dot{a}_{22} - \mathcal{L} = \\ &= -\frac{c^4}{4k(2l+1)} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) r^2 a'_{22} \left(\frac{1}{2} a'_{22} - a'_{00} \right) - 2M (a_{00} (a'_{00} + a'_{22}) - a_{01} a'_{01}) + \right. \\ &\quad \left. + l_1 (a_{01}^2 - a_{00}^2) + r^2 \dot{a}_{22} \left(\dot{a}_{00} + \frac{\dot{a}_{22}}{2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_{00}} \dot{a}_{00} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_{01}} \dot{a}_{01} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_{22}} \dot{a}_{22} = \frac{c^4}{4k(2l+1)} \left[2r^2 \dot{a}_{01} \dot{a}_{22} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) r^2 (\dot{a}_{00} a'_{22} + \dot{a}_{22} (a'_{00} - a'_{22})) - 2M (a_{00} (\dot{a}_{00} + \dot{a}_{22}) - \dot{a}_{01} a_{01}) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения Эйнштейна [9] для четных мод

$$\begin{aligned} r a'_{00} &= 2a_{00} - \frac{3}{2} a_{22} - \frac{l_1 a_{01}}{i\omega} + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \left(\frac{a_{22}}{2} - a_{00} - ir\omega a_{01} \right), \\ r a'_{01} &= a_{01} - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} (ir\omega (a_{00} + a_{22}) + a_{01}), \\ r a'_{22} &= a_{00} - \frac{3}{2} a_{22} - \frac{l_1 a_{01}}{ir\omega} + \frac{a_{22}}{2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \end{aligned}$$

с вытекающей из уравнений Эйнштейна связью

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 (3i\omega r(2a_{00} - a_{22}) - 2l_1 a_{01}) + 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) (a_{01}(l_1 - 2r^2\omega^2) + i\omega r(2l_1 a_{22} - a_{00}(1 + 2l_1))) - i\omega r a_{22}(1 + 4r^2\omega^2) = 0$$

обращают в нуль вариационные производные лагранжиана (4)

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{00}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{00}} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{00}} - \partial_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_{00}}, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{01}}, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{22}},$$

что приводит к уравнениям сохранения

$$\partial_t \mathcal{W} + \mathcal{U}' = 0.$$

Для нечетных мод соответствующая часть лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L}_o = \frac{c^4}{4k(2l+1)} l_1 \left[r^2 a'_{03}{}^2 + 2r(a'_{03}a_{03} - 2a'_{13}a_{13}) + 3a_{03}^2 - 2a_{13}^2 - 2 \frac{(ra'_{03} - a_{03})r\dot{a}_{13} - l_2(a_{03}^2 - a_{13}^2)}{(1 - \frac{2M}{r})} + \frac{r^2 \dot{a}_{13}^2}{(1 - \frac{2M}{r})^2} \right]. \quad (7)$$

Плотность и поток энергии определяются формулами

$$\mathcal{W} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{03}} \dot{a}_{03} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{13}} \dot{a}_{13} - \mathcal{L} = \frac{c^4}{4k(2l+1)} l_1 \left[r^2 a'_{03}{}^2 - \frac{r^2}{(1 - \frac{2M}{r})^2} \dot{a}_{13}^2 + 2r(a'_{03}a_{03} - 2a'_{13}a_{13}) + 3a_{03}^2 - 2a_{13}^2 + \frac{2l_2}{(1 - \frac{2M}{r})} (a_{03}^2 - a_{13}^2) \right], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_{03}} \dot{a}_{03} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_{13}} \dot{a}_{13} = \\ &= \frac{c^4}{4k(2l+1)} 2l_1 \left[r^2 \dot{a}_{03} a'_{03} - \frac{r^2}{(1 - \frac{2M}{r})} (\dot{a}_{03} \dot{a}_{13} + r(\dot{a}_{03} a_{03} - 2\dot{a}_{13} a_{13})) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения Эйнштейна для этих мод

$$\begin{aligned} r a'_{03} &= -\frac{i r \omega a_{13}}{(1 - \frac{2M}{r})} + a_{03} - 2l_2 \frac{a_{13}}{i r \omega}, \\ r a'_{13} &= -\frac{i r \omega a_{03}}{(1 - \frac{2M}{r})} - a_{13} \end{aligned}$$

также обращают в нуль вариационные производные $\delta \mathcal{L} / \delta h_{03}$ и $\delta \mathcal{L} / \delta h_{13}$, что опять приводит к сохранению потока энергии гравитационных волн нечетных мод.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гравитационные потоки энергии получены из квадратичного по возмущениям лагранжиана при уже наложенной на него калибровке. При этом число варьируемых переменных уменьшилось, и система перестала быть строго лагранжевой. Уравнений Эйнштейна, которые полностью определяют динамику системы, больше, чем число уравнений Лагранжа. Однако так как эти уравнения Лагранжа обращаются в нуль на решениях, то полученные с помощью такого лагранжиана поток и плотность энергии однозначно определены и удовлетворяют ковариантному векторному закону сохранения.

Благодарности. Один из авторов (Д.Е.Б.) с большой благодарностью вспоминает терпеливое и тщательное обсуждение данных проблем с С. Чандрасекаром летом 1994 г. Он также благодарен Р. Вальду за предоставленную тогда же возможность заниматься данными исследованиями в его лаборатории. Авторы признательны П.К. Бражнику и А.Э. Рассадину за полезные дискуссии.

Список литературы

- [1] *T. Regge, J. A. Wheeler.* Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 1063–1069.
- [2] *K. S. Thorn, A. Campolattoro.* Astrophys. J. 1967. V. 149. P. 591–611.
- [3] *L. Lindblom, S. Detweiler.* Astrophys. J. Suppl. 1983. V. 53. P. 73–92; *V. Ferrari, M. Germano.* Proc. R. Soc. London. A. 1994. V. 444. P. 389–398.
- [4] *S. Chandrasekhar, V. Ferrari.* Proc. R. Soc. London. A. 1990. V. 428. P. 325–349; 1991. V. 432. P. 247–279; V. 434. P. 635–641; P. 449–457; *S. Chandrasekhar, V. Ferrari, R. Winston.* Proc. R. Soc. London. A. 1991. V. 434. P. 635–641; *V. Ferrari.* Proc. R. Soc. London. A. 1992. V. 440. P. 423–445; *S. Chandrasekhar, V. Ferrari.* Proc. R. Soc. London. A. 1995. V. 450. P. 463–476.
- [5] *S. Chandrasekhar, V. Ferrari.* Proc. R. Soc. London. A. 1991. V. 435. P. 645–657.
- [6] *A. Einstein.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1918. V. 1. P. 154–167.
- [7] *Д. Е. Бурланков.* ЖЭТФ. 1963. Т. 44. № 6. С. 1941–1949.
- [8] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1967.
- [9] *F. Zerilli.* Phys. Rev. Lett. 1970. V. 24. P. 737–738.

Поступила в редакцию 24.XII.1998 г.