Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Джалилов, Кусочная гладкость сопряжений гомеоморфизмов окружности с особенностями типа излома, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 179–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf768>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:12:07

© 1999 г.

А. А. Джалилов*

КУСОЧНАЯ ГЛАДКОСТЬ СОПРЯЖЕНИЙ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ОСОБЕННОСТЯМИ ТИПА ИЗЛОМА

Доказано, что сопряжение для некоторых гомеоморфизмов окружности с изломами, лежащими на одной траектории, является кусочно-гладкой функцией.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома, т.е. отображения гладкие всюду, за исключением нескольких точек, в которых происходит разрыв первой производной. Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $T_f x$ единичной окружности

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1 = [0, 1), \quad (1.1)$$

где скобка $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа, а $f(x)$ – поднятие, определяющее T_f , которое удовлетворяет следующим условиям:

- а) $f(x)$ – непрерывная, строго возрастающая функция;
- б) $f(x+1) = f(x) + 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^1$;
- в) гомеоморфизм T_f в точках $x_{p_i} = T_f^{p_i} x_0$, $i = \overline{0, m}$, $p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m$, имеет изломы; кроме того, существуют конечные односторонние производные $f'(x_{p_i} \pm 0)$ и

$$\sqrt{\frac{f'(x_{p_i} - 0)}{f'(x_{p_i} + 0)}} = c_i(f) \neq 1, \quad i = \overline{0, m};$$

- г) $f(x) \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_{p_i}, i = \overline{0, m}\})$ при некотором $\varepsilon > 0$, $f'(x) \geq \text{const} > 0$, $x \in S^1 \setminus \{x_{p_i}, i = \overline{1, m}\}$;

- д) $\prod_{i=0}^m c_i = 1$.

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: info@mchmat.samuni.silk.org

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие “г” означает, что функция $f(x)$ принадлежит классу $C^{2+\varepsilon}$ на каждой связной компоненте множества $S^1 \setminus \{x_{p_i}, i = \overline{0, m}\}$.

Важной характеристикой гомеоморфизмов окружности является число вращения (см. [1])

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n} \pmod{1}.$$

Здесь и далее $f^{(n)}$ обозначает n -ю итерацию функции (или отображения f). Хорошо известно, что предел существует и не зависит от начальной точки $x \in R^1$.

Условия “а”–“д” означают, что функция $f(x)$ определяет гомеоморфизм окружности, достаточно гладкий всюду, за исключением $(m+1)$ точек окружности, в которых имеются скачки первой производной или изломы. Условие “д” в определенном смысле компенсирует наличие точек излома у функции $f(x)$.

Пусть число вращения $\rho(f)$ иррационально. Данжуа показал [2], что если $f \in C^1(R^1)$ и $\text{var}_{S^1} \ln f'(x) < \infty$, то существует гомеоморфизм окружности T_φ такой, что

$$T_\varphi \circ T_f = T_\rho \circ T_\varphi, \quad (1.2)$$

где $T_\rho x = \{x + \rho\}$ – линейный поворот окружности на угол ρ . В теории гомеоморфизмов окружности существует важная проблема выяснения связи между гладкостью f , свойствами числа вращения ρ и классом гладкости сопряжения φ [3, 4]. С этой проблемой тесно связан и вопрос о существовании абсолютно непрерывной инвариантной меры для T_f . В самом деле, единственная с точностью до нормировки инвариантная мера для T_f является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ – абсолютно непрерывная функция. Это соображение впервые было использовано Арнольдом в [3], где он изучал гладкость $\varphi(x)$. Там же было показано, что для типичных чисел вращения ρ и для аналитических диффеоморфизмов T_f , достаточно близких к повороту T_ρ , приведение осуществляется с помощью аналитического диффеоморфизма. Результаты типа теоремы Арнольда, получили название локальных теорем приведения (ЛТП). Позже Мозер доказал ЛТП для достаточно гладких, но не аналитических, диффеоморфизмов [5].

Глобальная теорема о гладкости приведения была решена Эрманом [4]. Наиболее сильные результаты в этой области были получены Катцнельсоном, Орнштейном [6], Ханиным и Синаем [7, 8] и Старком [9]. Работы [6–10] можно отнести к ренормгрупповому подходу в теории динамических систем. Достоинством подхода работы Синая и Ханина [8] является то, что в ней использовано приближение итераций изучаемых гомеоморфизмов с помощью дробно-линейных отображений.

Гомеоморфизмы окружности с одной точкой излома были изучены в работах [10–12]. В работах [10, 11] показано, что гомеоморфизмы с одной точкой излома занимают промежуточное место между диффеоморфизмами, отвечающими $s = 1$, и критическими отображениями окружности. С одной стороны, для однопараметрических семейств гомеоморфизмов с особенностями типа излома множество значений параметра, отвечающих

иррациональным числам вращения, имеет лебегову меру нуль, а сама динамика характеризуется нетривиальными масштабными преобразованиями, или скейлингами. Инвариантные меры таких гомеоморфизмов являются сингулярными относительно меры Лебега [12].

С другой стороны, как и в случае диффеоморфизмов окружности, ренормгрупповое поведение для подобных отображений выглядит достаточно просто. В перенормированных координатах итерации отображений асимптотически приближаются к дробно-линейным преобразованиям, зависящим только от двух параметров.

Основной целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что поднятие $f(x)$ гомеоморфизма T_f удовлетворяет условиям “а”–“д”. Число вращения $\rho(f)$ иррационально, и его разложение в непрерывную дробь имеет вид $\rho(f) = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$. Тогда:*

1) *при $k_n \leq \text{const}$ для всех $n \geq 1$*

$$T_\varphi \in C^{1+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_i, 1 \leq i \leq p_m\});$$

2) *при $k_n \leq \text{const } n^\alpha$ для некоторого значения α*

$$T_\varphi \in C^{1+\nu}(S^1 \setminus \{x_i, 1 \leq i \leq p_m\})$$

для любого $\nu < \varepsilon$;

3) *в предположениях 1 и 2 сопряжение T_φ в точках $x = x_i$, $1 \leq i \leq p_m$, имеет изломы*

$$\frac{\varphi'(x_i - 0)}{\varphi'(x_i + 0)} = c_j c_{j+1} \cdots c_m$$

при $p_{j-1} < i \leq p_j$, $j = \overline{1, m}$.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся необходимые определения и факты. В разделе 3 изучается ренормгрупповое поведение и доказывается сходимость к линейным отображениям. В разделе 4 содержится доказательство теоремы 1.1.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФАКТЫ

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T_f , определяемый поднятием $f(x)$, $x \in R^1$, т.е. $T_f x = \{f(x)\}$, $x \in S^1$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать число вращения $\rho(f)$ иррациональным. Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и рассмотрим траекторию этой точки $\{x_i = T^i x_0, i \in Z^1\}$. Согласно классической теореме Пуанкаре (см. [1]) порядок точек вдоль этой траектории будет в точности таким же, как и для линейного поворота окружности T_ρ , т.е. для последовательности $\{\bar{x}_i = \{x_0 + i\rho\}, i \in Z^1\}$. Это важное свойство позволяет определить систему естественных разбиений окружности,

связанных с разложением $\rho(f)$ в непрерывную дробь. Пусть разложение $\rho(f)$ в непрерывную дробь имеет вид $\rho(f) = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$. Обозначим

$$\frac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, \dots, k_n], \quad n \geq 1.$$

Числа p_n и q_n удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= k_{n+1}p_n + p_{n-1}, & p_0 &= 0, & p_1 &= 1, \\ q_{n+1} &= k_{n+1}q_n + q_{n-1}, & q_0 &= 0, & q_1 &= k_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть $x_0 \in S^1$. Обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ замкнутый интервал с концами в точках x_0 и $x_{q_n} = T^{q_n}x_0$. Заметим, что при нечетном n точка x_{q_n} лежит слева от x_0 , а при четном n — справа. Обозначим $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i \Delta_0^{(n)}(x_0)$, $i \geq 1$.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [13]). *Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in S^1$. Отрезок траектории этой точки $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$ разбивает окружность на непересекающиеся (за исключением концевых точек) отрезки*

$$\Delta_k^{(n-1)}(x_0), \quad 0 \leq k < q_n, \quad \Delta_j^{(n)}(x_0), \quad 0 \leq j < q_{n-1}.$$

Полученное разбиение обозначим через $\xi_n(x_0)$ и назовем динамическим разбиением n -го порядка. Опишем теперь процесс перехода от разбиения $\xi_n(x_0)$ к $\xi_{n+1}(x_0)$. Все отрезки $\Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq j \leq q_{n-1} - 1$, сохраняются, а каждый из отрезков $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$, $0 \leq i \leq q_n - 1$, разбивается на $(k_{n+1} + 1)$ отрезков:

$$\Delta_i^{(n-1)}(x_0) = \Delta_i^{(n+1)}(x_0) \bigcup_{s=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0).$$

Очевидно, что $\xi_1(x_0) \leq \xi_2(x_0) \leq \dots \leq \xi_n(x_0) \leq \dots$.

ЛЕММА ДАНЖУА. *Пусть в точках $z^{(i)} \in S^1$, $i = \overline{0, r}$, $z^{(1)} < z^{(2)} < \dots < z^{(r)}$, существуют конечные односторонние производные $f'(z^{(i)} \pm 0) > 0$, $f \in C^1([z^{(i)}, z^{(i+1)}])$, $i = \overline{0, r}$, $z^{(r+1)} = z^{(1)} + 1$, и*

$$\sum_{i=1}^r \text{var}_{[z^{(i)}, z^{(i+1)}]} \ln f' = \bar{v} < \infty.$$

Положим

$$v = \bar{v} + \sum_{i=0}^r |\ln f'(z^{(i)} - 0) - \ln f'(z^{(i)} + 0)|.$$

Тогда для любого y_0 такого, что $y_s \notin \{z^{(i)}, i = \overline{1, r}\}$, $s = \overline{0, q_k - 1}$, $k \in N$, справедливо неравенство

$$e^{-v} \leq \prod_{j=0}^{q_k-1} f'(y_j) \leq e^v.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены условия леммы Данжуа. Тогда для любого $y_0 \in S^1$ выполнено неравенство

$$|\Delta_0^{(n)}(y_0)| \leq \lambda^{2k} |\Delta_0^{(n-2k)}(y_0)|, \quad 0 \leq 2k \leq n,$$

где $\lambda = (1 + e^{-v})^{-1/2} < 1$, а $|\cdot|$ обозначает длину отрезка.

Леммы Данжуа и 2.1 доказываются так же, как и аналогичные утверждения в гладком случае (см. [8]).

Из леммы 2.1 следует, что отрезки, составляющие динамическое разбиение $\xi_n(y_0)$, имеют экспоненциально малую длину.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Delta^{(n)}$ — произвольный элемент динамического разбиения $\xi_n(y_0)$, тогда для всех $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$|\Delta^{(n)}| \leq \text{const } \lambda^n. \quad (2.2)$$

Из формулы (2.2) следует, что траектория любой точки всюду плотна на окружности.

ТЕОРЕМА ДАНЖУА. Пусть выполнены условия леммы Данжуа. Тогда гомеоморфизм T_f топологически сопряжен линейному повороту T_ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем две произвольные точки y_0 и z_0 и рассмотрим их траектории под действием соответствующих гомеоморфизмов T_f и T_ρ , т.е. $\{y_i = T_f^i y_0, i \geq 0\}$ и $\{z_i = T_\rho^i z_0, i \geq 0\}$. Определим сопряжение T_φ на множестве $\{y_i, i \geq 0\}$ следующим образом: $T_\varphi y_i = z_i, i \geq 0$. Отображение T_φ удовлетворяет (1.2), и, поскольку траектория точки x_0 всюду плотна, его можно продолжить по непрерывности на всю окружность.

Теорема Данжуа доказана.

Из доказательства теоремы Данжуа видно, что если траектория некоторой точки под действием T_f плотно заполняет окружность, то сопряжение T_φ определяется единственным образом с точностью до поворота. Кроме того, поскольку число вращений $\rho(f)$ иррационально, T_f является строго эргодическим [1], т.е. обладает единственной нормированной инвариантной мерой μ . Хорошо известно, что

$$T_\varphi x = \int_{x_0}^x d\mu(y), \quad x \in S^1.$$

Отсюда следует, что если инвариантная мера абсолютно непрерывна, то ее плотность $h(x)$ удовлетворяет следующему гомологическому уравнению:

$$h(T_f x) = \frac{1}{f'(x)} h(x).$$

Таким образом, вопрос о гладкости сопряжения сводится к вопросу о построении плотности инвариантной меры и исследовании ее гладкости.

3. РЕНОРМГРУППОВОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГОМЕОМОРФИЗМА T_f

В этом разделе мы изучаем ренормгрупповое поведение гомеоморфизма T_f в окрестности особой точки $x = x_0$. Обозначим через n_0 минимальное четное число, удовлетворяющее условию $q_{n_0-1} > p_m$.

Рассмотрим разбиение $\xi_{n_0}(x_0)$ и окрестность $V_0 = [x_{q_{n_0-1}}, x_{q_{n_0}}]$ точки x_0 . Из структуры разбиения $\xi_{n_0}(x_0)$ и определения n_0 следует, что отрезок V_0 не содержит других особых точек, кроме $x = x_0$, и все остальные особые точки лежат только в первых p_m образах отрезка V_0 . Обозначим через l_0 минимальное число такое, что отрезки $\Delta_0^{(l_0-1)}(x_k)$ и $\Delta_0^{(l_0)}(x_k)$, $k = q_{n_0-1}, q_{n_0}$, и их первые p_m образов не содержат особых точек. Обозначим через A левую крайнюю точку отрезка $\Delta_0^{(l_0-1)}(x_{q_{n_0-1}})$ и через B правую крайнюю точку отрезка $\Delta_0^{(l_0)}(x_{q_{n_0}})$. Ясно, что $V_0 \subset [A, B]$. Положим $l = \max\{n_0, l_0\}$.

Возьмем произвольную точку $y_0 \in [x_{q_{n_0-1}}, x_{q_{n_0}}]$ и рассмотрим динамическое разбиение $\xi_n(y_0)$. Положим для определенности n четным. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_i^{(n-1)}(y_0) &= [y_{q_{n-1}+i}, y_i], & 0 \leq i \leq q_n - 1, \\ \Delta_j^{(n)}(y_0) &= [y_i, y_{q_n+i}], & 0 \leq j \leq q_{n-1} - 1.\end{aligned}$$

Следуя методу ренормгруппы, мы изучаем при $n \rightarrow \infty$ асимптотические поведения отображений

$$\begin{aligned}T^{q_n} : [y_{q_{n-1}}, y_0] &\longrightarrow [y_{q_{n-1}+q_n}, y_{q_n}], \\ T^{q_{n-1}} : [y_0, y_{q_n}] &\longrightarrow [y_{q_{n-1}}, y_{q_{n-1}+q_n}],\end{aligned}$$

используя в окрестности точки y_0 перенормированную переменную

$$z = \frac{y - y_0}{y_0 - y_{q_{n-1}}}.$$

В координатах z получим, что $y_0 \rightarrow 0$ и $y_{q_{n-1}} \rightarrow -1$. Обозначим через a_n перенормированную координату точки y_{q_n} :

$$a_n = \frac{y_{q_n} - y_0}{y_0 - y_{q_{n-1}}}.$$

Используя $\Delta_{q_n}^{(n)} \subset \Delta_0^{(n-1)}$ и лемму Данжуа, легко получаем, что $0 < a_n < \text{const}$. В новых координатах отрезкам $[y_{q_{n-1}}, y_0]$ и $[y_0, y_{q_n}]$ соответствуют отрезки $[-1, 0]$ и $[0, a_n]$. Отображениям T^{q_n} и $T^{q_{n-1}}$ в перенормированных координатах отвечают следующие функции:

$$\begin{aligned}f_n(z) &= \frac{T^{q_n}(y_0 + z(y_0 - y_{q_{n-1}})) - y_0}{y_0 - y_{q_{n-1}}}, & z \in [-1, 0], \\ g_n(z) &= \frac{T^{q_{n-1}}(y_0 + z(y_0 - y_{q_{n-1}})) - y_0}{y_0 - y_{q_{n-1}}}, & z \in [0, a_n].\end{aligned}\tag{3.1}$$

Мы покажем, что функции $f_n(z)$ и $g_n(z)$ при $n \rightarrow \infty$ асимптотически близки к линейным функциям. Обозначим

$$F_n(z) = z + a_n, \quad G_n(z) = z - 1.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $y_0 \in V_0$. Существует константа $C_1 > 0$ такая, что при всех $n \geq l$

$$\begin{aligned} \|f_n(z) - F_n(z)\|_{C^1([-1,0])} &\leq C_1 \lambda^{n\varepsilon}, \\ \|g_n(z) - G_n(z)\|_{C^1([0,a_n])} &\leq C_1 \lambda^{n\varepsilon}. \end{aligned}$$

Введем относительные координаты z_i , $0 \leq i \leq q_n$, на отрезках $\Delta_i^{(n-1)}(y_0)$ и $\bar{z}_j$, $0 \leq j \leq q_{n-1}$, на отрезках $\Delta_j^{(n)}(y_0)$ в соответствии с формулами

$$z_i = \frac{y_i - y}{y_i - y_{q_{n-1}+i}}, \quad \bar{z}_j = \frac{y_{q_n+j} - y}{y_{q_n+j} - y_j}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} M(i) &= \exp \left\{ \sum_{s=0}^{i-1} \int_{x_s+q_{n-1}}^{x_s} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt \right\}, \quad 0 \leq i \leq q_n, \\ \overline{M}(j) &= \exp \left\{ \sum_{s=0}^{j-1} \int_{x_s}^{x_s+q_n} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt \right\}, \quad 0 \leq j \leq q_{n-1}, \\ l_{n-1} &= \max_{0 \leq k \leq q_n} |\Delta_k^{(n-1)}(y_0)|, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Для простоты записи в дальнейшем через $\|f\|_1$ обозначим C^1 -норму функции $f(z)$ на отрезке $[0, 1]$.

Чтобы доказать теорему 3.1, нам понадобятся леммы 3.1 и 3.2.

ЛЕММА 3.1 (см. [11]):

1) если каждый из отрезков $\Delta_0^{(n-1)}(y_0), \Delta_1^{(n-1)}(y_0), \dots, \Delta_{i-1}^{(n-1)}(y_0)$, $1 \leq i \leq q_n$, не содержит особых точек x_{p_s} , $0 \leq s \leq m$, то

$$z_i = \frac{M(i)z_0}{1 + (M(i) - 1)z_0} + \eta_i(z_0), \quad (3.2)$$

где $\|\eta_i(z_0)\|_1 \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon$;

2) если каждый из отрезков $\Delta_0^{(n)}(y_0), \Delta_1^{(n)}(y_0), \dots, \Delta_{j-1}^{(n)}(y_0)$, $1 \leq j \leq q_{n-1}$, не содержит особых точек x_{p_s} , $0 \leq s \leq m$, то

$$\bar{z}_j = \frac{\overline{M}(j)\bar{z}_0}{1 + (\overline{M}(j) - 1)\bar{z}_0} + \bar{\eta}_j(\bar{z}_0),$$

где $\|\bar{\eta}_j(\bar{z}_0)\|_1 \leq \text{const } l_n^\varepsilon$.

Отметим, что в формулировке леммы 3.1 и ниже const обозначает константы, зависящие только от исходного гомеоморфизма и не зависящие от n, i, j и т.д.

Смысл леммы 3.1 состоит в том, что z_i и $\bar{z}_j$ с высокой степенью точности аппроксимируются дробно-линейными функциями от z_0 и $\bar{z}_0$.

Пусть $y_0 \in V_0$. Фиксируем $n \geq l$. Из определения l следует, что либо

$$\{x_i, 0 \leq i \leq p_m\} \subset \bigcup_{s=0}^{q_n-1} \Delta_s^{(n-1)}(y_0),$$

либо

$$\{x_i, 0 \leq i \leq p_m\} \subset \bigcup_{s=0}^{q_{n-1}-1} \Delta_s^{(n)}(y_0).$$

Пусть для определенности имеет место первый случай и $x_{p_i} \in \Delta_{t+p_i}^{(n-1)}(y_0)$, $0 \leq t \leq q_n - p_m - 1$, $i = \overline{0, m}$, $p_0 = 0$.

Теперь мы найдем выражение для $z_{q_n}(z_0)$. Положим $\alpha_{nm} = q_n - t - p_m - 1$. Пусть функции $z_t(z)$, $z_{p_m+1}(z)$, $z_{\alpha_{nm}}(z)$ суть относительные координаты, соответствующие отображениям

$$\begin{aligned} T^t: \Delta_0^{(n-1)}(y_0) &\longrightarrow \Delta_t^{(n-1)}(y_0), \\ T^{p_m+1}: \Delta_t^{(n-1)}(y_0) &\longrightarrow \Delta_{t+p_m+1}^{(n-1)}(y_0), \\ T^{\alpha_{nm}}: \Delta_{t+p_m+1}^{(n-1)}(y_0) &\longrightarrow \Delta_{q_n}^{(n-1)}(y_0). \end{aligned}$$

Тогда функцию $z_{q_n}(z_0)$ можно представить в виде

$$z_{q_n}(z_0) = z_{\alpha_{nm}}(z_{p_m+1}(z_t(z_0))). \quad (3.3)$$

В случае $t = 0$ мы будем рассматривать два последних отображения.

Поскольку цепочки отрезков $\Delta_i^{(n-1)}(y_0)$, $i = \overline{0, (t-1)}$, и $\Delta_k^{(n-1)}(y_0)$, $k = \overline{(t+p_m+1), q_n}$, не содержат особых точек, используя лемму 3.1, получаем

$$z_t(z_0) = \frac{N_1 z_0}{1 + (N_1 - 1)z_0} + \chi_1(z_0), \quad (3.4)$$

$$z_{\alpha_{nm}}(z) = \frac{N_2 z}{1 + (N_2 - 1)z} + \chi_2(z), \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 &= \exp \left\{ \sum_{k=0}^{t-1} \int_{y_{k+q_n-1}}^{y_k} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt \right\}, \\ N_2 &= \exp \left\{ \sum_{k=t+p_m+1}^{q_n-1} \int_{y_{k+q_n-1}}^{y_k} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt \right\}, \\ \|\chi_1(z)\|_1 &\leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon, \quad \|\chi_2(z)\|_1 \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь мы покажем, что функция $z_{p_m+1}(z)$ является почти тождественной.

ЛЕММА 3.2. *Имеем*

$$z_{p_m+1}(z) = z + \chi_3(z), \quad (3.6)$$

где $\|\chi_3(z)\|_1 \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Отображение T на отрезках $\Delta_{t+p_i}^{(n-1)}(y_0)$, $i = \overline{0, m}$, имеет точки излома. Учитывая это, функцию $z_{p_m+1}(z)$ представим в виде

$$z_{p_m+1}(z) = z_1^{(m)}(z_{p(m)}(z_1^{(m-1)}(z_{p(m-1)} \dots z_{p(1)}(z_1^{(0)}(z)) \dots))), \quad (3.7)$$

здесь $p(i) = p_i - p_{i-1} - 1$, $i = \overline{1, m}$, а $z_1^{(i)}(z)$, $i = \overline{0, m}$, суть относительные координаты, соответствующие отображениям

$$T: \Delta_{t+p_i}^{(n-1)}(y_0) \rightarrow \Delta_{t+p_{i+1}}^{(n-1)}(y_0),$$

в то время как функции $z_{p(i)}(z)$ являются относительными координатами отображений

$$T^{p(i)}: \Delta_{t+p_{i-1}+1}^{(n-1)}(y_0) \rightarrow \Delta_{t+p_i}^{(n-1)}(y_0), \quad i = \overline{1, m}.$$

В силу леммы 3.1 для всех $1 \leq i \leq m$ имеем

$$z_{p(i)}(z) = \frac{H_i z}{1 + (H_i - 1)z} + \theta_i(z), \quad (3.8)$$

где $\|\theta_i(z)\|_1 \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon$ и

$$H_i = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{p(i)} \int_{\Delta_{t+p_{i-1}+s}^{(n-1)}} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt \right\}.$$

Используя оценки $p(i) \leq p_m$, $i = \overline{0, q_n}$, и $|\Delta_i^{(n-1)}(y_0)| \leq \text{const } l_{n-1}$, получаем

$$|\ln H_i| \leq \text{const } l_{n-1}.$$

Отсюда, а также из (3.8), следует, что

$$z_{p(i)}(z) = z + h_i(z), \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.9)$$

где $\|h_i(z)\|_1 \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon$.

Перейдем теперь к функциям $z_1^{(i)}(z)$, $i = \overline{0, m}$. Обозначим через d_i , $0 \leq i \leq m$, относительные координаты особых точек $x = x_{p_i}$, т.е.

$$d_i = \frac{yt+p_i - x_{p_i}}{yt+p_i - yt+p_i+q_{n-1}}.$$

Используя разложение Тейлора и условия “в” и “г” из введения, можно легко показать, что

$$z_1^{(i)}(z) = \varphi_i(z) + r_i(z), \quad 1 \leq i \leq m, \quad (3.10)$$

где $\|r_i(z)\|_1 \leq \text{const } l_{n-1}$ и

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} \frac{z}{c_i^2(1-d_i)+d_i}, & z \in [0, d_i], \\ \frac{d_i(1-c_i^2)+c_i^2 z}{c_i^2(1-d_i)+d_i}, & z \in [d_i, 1]. \end{cases}$$

Подставляя (3.9) и (3.10) в (3.7) и используя условие $c_1^2 c_2^2 \dots c_m^2 = 1$, получаем утверждение леммы 3.2. Лемма 3.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Подставляя (3.4)–(3.6) в (3.3), получаем

$$z_{q_n}(z_0) = \frac{M_n z_0}{1 + (M_n - 1)z_0} + \chi_4(z_0), \quad (3.11)$$

где $\|\chi_4(z_0)\|_1 \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon$, $M_n = M(q_n)$.

Легко проверить, что $z_0 = -z$ и $f_n(z) = a_n - (a_n + b_n)z_{q_n}(-z)$, где

$$z = \frac{y - y_0}{y_0 - y_{q_{n-1}}}, \quad b_n = \frac{y_0 - y_{q_{n-1}+q_n}}{y_0 - y_{q_{n-1}}}.$$

Отсюда и из (3.11) следует, что

$$f_n(z) = \frac{a_n + (a_n + b_n M_n)z}{1 + (1 - M_n)z} + \chi_5(z), \quad (3.12)$$

где $\|\chi_5(z)\|_{C^1([-1;0])} \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon$.

Рассуждая так же, как и при выводе (3.12), можно показать (см. [8]), что

$$g_n(z) = \frac{-a_n + (1 - \overline{M}_n b_n)z}{a_n + (\overline{M}_n^{-1} - 1)z} + \chi_6(z),$$

где $\|\chi_6(z)\|_{C^1([0;a_n])} \leq \text{const } l_n^\varepsilon$, $\overline{M}_n = \overline{M}(q_{n-1})$. Используя тот факт, что

$$\begin{aligned} M_n \overline{M}_n &= \exp \left\{ \sum_{i=0}^{q_n-1} \int_{y_{i+q_{n-1}}}^{y_i} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt + \sum_{j=0}^{q_{n-1}-1} \int_{y_j}^{y_{j+q_n}} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt \right\} = \\ &= \exp \left\{ \int_{S^1} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \ln(c_0^2 c_1^2 \cdots c_m^2) \right\} = 1, \end{aligned}$$

т.е. что $\overline{M}_n = M_n^{-1}$, окончательно получаем

$$g_n(z) = \frac{-a_n + (1 - M_n b_n)z}{a_n + (M_n - 1)z} + \chi_6(z). \quad (3.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При нечетном n по-прежнему справедливы формулы (3.12) и (3.13), однако в этом случае

$$M_n = \exp \left\{ - \sum_{s=0}^{q_n-1} \int_{x_s}^{x_{s+q_{n-1}}} \frac{f''(t)}{2f'(t)} dt \right\}.$$

Для завершения доказательства теоремы 3.1 нам достаточно показать, что M_n и $(a_n + b_n)$ стремятся к единице с экспоненциальной скоростью.

ЛЕММА 3.3. При $n > l$ справедливы неравенства

$$|1 - M_n| \leq \text{const } \lambda^{n\varepsilon}, \quad |1 - (a_n + b_n)| \leq \text{const } \lambda^{n\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Функции $f_n(z)$ и $g_{n+1}(z)$ отвечают одному и тому же преобразованию, но в разных координатах, т.е.

$$g_n(z) = -\frac{1}{a_n} f_n(-a_n z). \quad (3.14)$$

Введем обозначения $c_n = 1 - M_n$ и $d_n = 1 - a_n - b_n$.

Теперь мы воспользуемся следующими рекуррентными формулами для c_n и d_n , которые были получены в [8] при помощи (3.14):

$$c_n = a_n a_{n+1} c_{n-1} + \xi_n, \quad n > l(y_0), \quad (3.15)$$

$$d_n = -a_n d_{n-1} + a_n \bar{\xi}_n, \quad n > l(y_0), \quad (3.16)$$

где $|\xi_n| \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon$ и $|\bar{\xi}_n| \leq \text{const } l_{n-1}^\varepsilon$.

Итерируя (3.15), получим

$$c_n = \sum_{i=l}^n \xi_i \prod_{j=i}^n \frac{a_j^2}{a_n a_i} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{|\Delta_0^{(n)}(y_0)| |\Delta_0^{(n-1)}(y_0)|}{|\Delta_0^{(i)}(y_0)| |\Delta_0^{(i-1)}(y_0)|}.$$

В силу леммы 2.1 имеем

$$\frac{|\Delta_0^{(n)}(y_0)| |\Delta_0^{(n-1)}(y_0)|}{|\Delta_0^{(i)}(y_0)| |\Delta_0^{(i-1)}(y_0)|} \leq \lambda^{2(n-i)}.$$

Отсюда, используя неравенство $l_{n-1} \leq \text{const } \lambda^n$, получаем

$$c_n \leq \text{const} \sum_{i=l}^n \lambda^{i\varepsilon} \lambda^{2(n-i)} \leq \text{const } \lambda^{n\varepsilon} \sum_{i=l}^n \lambda^{(2-\varepsilon)(n-i)} \leq \text{const } \lambda^{n\varepsilon}.$$

Тем самым первое утверждение леммы 3.3 доказано.

Неравенства $a_n + b_n \leq \text{const}$, $|\bar{\xi}_n| \leq \text{const } \lambda^{n\varepsilon}$ и итерирование (3.16) дают

$$d_n = \sum_{i=l}^n (-1)^{(n-i)} \bar{\xi}_i \prod_{j=i}^n a_j = (-1)^n \sum_{i=l}^n (-1)^i \bar{\xi}_i \frac{|\Delta_0^{(n)}(y_0)|}{|\Delta_0^{(i-1)}(y_0)|},$$

откуда следует второе утверждение леммы 3.3. Теорема 3.1 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $y_0 \in V \setminus \{x_0\}$ и $y_k = T_f^k y_0$, $k \geq 1$. Тогда для любого $n > l$ имеем

$$e^{-\alpha_n} \leq \prod_{i=0}^{q_n-1} f'(y_i) \leq e^{\alpha_n}, \quad (3.17)$$

где $\alpha_n = \text{const } \lambda^{n\varepsilon}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если взять произвольную точку $y_0 \in S^1 \setminus \{x_i, i = \overline{0, p_m}\}$ и определить число $l = l(y_0)$ так, чтобы отрезок $[x_{q_{l-1}}, x_{q_l}]$ и его первые p_m образов не содержали особых точек, то справедливы теорема 3.1 и неравенство (3.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Дифференцируя (3.1), получаем

$$\frac{d}{dx}(T^{q_n})(x_0) = \prod_{i=0}^{q_n-1} f'(y_i) = f'_n(0).$$

В силу теоремы 3.1

$$|f'_n(0) - 1| \leq \text{const } \lambda^{n\varepsilon},$$

откуда получаем требуемые неравенства.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

При доказательстве теоремы 1.1 используются рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве основной теоремы в работе Синая и Ханина [8]. Далее (см. теорему 4.1 ниже) будет показано, что плотность $h(x)$ абсолютно непрерывной инвариантной меры является строго положительной функцией, непрерывной всюду, за исключением нескольких точек разрыва первого рода.

Используя эту информацию, а также неравенство (3.17), путем стандартных рассуждений мы можем легко доказать теорему 1.1 (см. [8]). Рассмотрим функциональное уравнение

$$h(T_f x) = \frac{1}{f'(x)} h(x). \quad (4.1)$$

Напомним, что решение (4.1) является плотностью инвариантной меры гомеоморфизма T_f .

ТЕОРЕМА 4.1. *При выполнении условий теоремы 1.1 функциональное уравнение (4.1) имеет строго положительное, кусочно-непрерывное решение $h(x)$ такое, что:*

- 1) $h(x) \in C(S^1 \setminus \{x_i, 1 \leq i \leq p_m\})$;
- 2) в точках $x = x_i, 1 \leq i \leq p_m$, функция $h(x)$ имеет разрыв первого рода:

$$\frac{h(x_i - 0)}{h(x_i + 0)} = c_j c_{j+1} \dots c_m \quad \text{при} \quad p_{j-1} < i \leq p_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Решение уравнения (4.1) на множестве $B = \{x_i, i \geq p_m + 1\}$ построим следующим образом:

$$h(x_{p_m+1}) = 1, \quad h(x_i) = \prod_{j=p_m+1}^{i-1} (f'(x_j))^{-1}, \quad i > p_m + 1. \quad (4.2)$$

Поскольку множество B всюду плотно на окружности, необходимо убедиться, что функцию $h(x)$ можно продолжить до непрерывной положительной функции на множестве $S^1 \setminus \{x_i, 1 \leq i \leq p_m\}$. Мы сначала построим решение (4.1) в окрестности $V = [y_{q_{n_0-1}}, y_{q_{n_0}}]$ начальной особой точки x_0 . Возьмем произвольную точку $y_0 \in V$ и отрезок $\Delta_0^{(n-1)}(x_i)$, $i \geq p_m + 1$, $x_i \in V$, $n \geq l + 1$, содержащий точку y_0 . Отрезок $\Delta_0^{(n-1)}(x_i)$ содержит внутри себя k_{n+1} точек $x_{i+q_{n-1}+jq_n}$, $1 \leq j \leq k_{n+1}$, являющихся концами элементов разбиения $\xi_{n+1}(x_i)$. Используя неравенство (3.17), получаем

$$\begin{aligned} e^{-\alpha_n} &\leq \frac{h(x_{i+q_{n-1}+(j-1)q_n})}{h(x_{i+q_{n-1}+jq_n})} = \\ &= \prod_{\substack{s=i+q_{n-1}+(j-1)q_n \\ s=i+q_{n-1}+(j-1)q_n}}^{i+q_{n-1}+jq_n-1} f'(x_s) \leq e^{\alpha_n}, \quad 1 \leq j \leq k_{n+1}, \\ e^{-\alpha_{n+1}} &\leq \frac{h(x_{i+q_{n-1}+k_{n+1}q_n})}{h(x_i)} = \frac{h(x_{i+q_{n+1}})}{h(x_i)} \leq e^{\alpha_{n+1}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что для любой точки $x_s \in \Delta_0^{(n-1)}(x_i)$ имеем

$$\exp\left\{-\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1}\alpha_m\right\} \leq \frac{h(x_s)}{h(x_i)} \leq \exp\left\{\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1}\alpha_m\right\}. \quad (4.4)$$

Пусть $y_0 \in [x_s, x_{s'}] \subset \Delta_0^{(n-1)}(x_i)$, тогда

$$\exp\left\{-2\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1}\alpha_m\right\} \leq \frac{h(x_s)}{h(x_{s'})} \leq \exp\left\{2\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1}\alpha_m\right\}. \quad (4.5)$$

Пусть $k_n \leq \text{const } n^\alpha$, $\alpha > 0$. Поскольку $\alpha_n = \text{const } \lambda^{n^\varepsilon}$, ряд $\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1}\alpha_m$ сходится. Отсюда, а также из (4.5), следует, что для любой последовательности $\{x_{s_n}\} \subset \Delta_0^{(n-1)}(x_i)$, сходящейся к y_0 , верно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_{s_n}) = h(y_0),$$

и, более того, для любой точки $x_{s_n} \in \Delta_0^{(n-1)}(x_i)$

$$\exp\left\{-2\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1}\alpha_m\right\} \leq \frac{h(y_0)}{h(x_s)} \leq \exp\left\{2\sum_{m=n}^{\infty} k_{m+1}\alpha_m\right\}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим разбиение $\xi_{n_0}(x_0)$. Мы показали, что на нулевых отрезках $\Delta_0^{(n_0-1)}(x_0)$ и $\Delta_0^{(n_0)}(x_0)$ функцию $h(x)$ можно продолжить по непрерывности. Отсюда, а также из (4.2) следует, что функцию $h(x)$ можно продолжить до непрерывной функции на всех отрезках разбиения $\xi_{n_0}(x_0)$ и в соответствующих точках верны оценки (4.6). Первое утверждение теоремы 4.1 доказано. Теперь покажем, что в точках $x = x_i$, $1 \leq i \leq p_m$,

функция $h(x)$ имеет разрыв первого рода. Фиксируем x_i , $p_{j-1} < i \leq p_j$, $1 \leq j \leq p_m$. Возьмем $y_1 \in [x_{i+q_{n-1}}, x_i]$ и $y_2 \in (x_i, x_{i+q_n}]$, $n \geq l$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{h(y_1)}{h(y_2)} &= \frac{h(y_1)}{h(x_{i+q_{n-1}})} \frac{h(x_{i+q_n})}{h(y_2)} \frac{h(x_{i+q_{n-1}})}{h(x_{i+q_n})} = \\ &= \frac{h(y_1)}{h(x_{i+q_{n-1}})} \frac{h(x_{i+q_n})}{h(y_2)} \frac{h(x_{q_{n-1}})}{h(x_{q_n})} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{f'(x_{k+q_n})}{f'(x_{k+q_{n-1}})}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя условие “в” (см. введение) и оценку $|\Delta^{(n)}| \leq \text{const } \lambda^n$, получаем

$$\prod_{k=0}^{i-1} \frac{f'(x_{k+q_n})}{f'(x_{k+q_{n-1}})} = \prod_{k=0}^{i-1} c_k^{-1} [1 + O(\lambda^n)]. \quad (4.8)$$

Из (4.6)–(4.8), а также из условия “д” следует, что

$$\frac{h(x_i - 0)}{h(x_i + 0)} = \prod_{s=j}^m c_s,$$

если $p_{j-1} < i \leq p_j$, $j = \overline{1, m}$, и

$$\frac{h(x_i - 0)}{h(x_i + 0)} = 1,$$

если $i \geq p_m + 1$.

Теорема 4.1 доказана.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую благодарность Я. Г. Синаю и К. М. Ханину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [2] A. Denjoy. J. Math. Pure Appl. 1932. V. 11. P. 333.
- [3] В. И. Арнольд. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. № 1. С. 21.
- [4] M. Herman. Publ. Math. IHES. 1979. V. 49. P. 5.
- [5] J. Moser. Ann. Scuole Norm. Sup. Pisa. Ser. III. 1966. V. 20. P. 409.
- [6] Y. Katznelson, D. Ornstein. Ergodic theory Dyn. Systems. 1989. V. 9. № 4. P. 691.
- [7] К. М. Ханин, Я. Г. Синай. Commun. Math. Phys. 1987. V. 12. P. 89.
- [8] Я. Г. Синай, К. М. Ханин. УМН. 1989. Т. 44. Вып. 1. С. 57.
- [9] J. Stark. Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 541.
- [10] Е. В. Вул, К. М. Ханин. УМН. 1990. Т. 45. Вып. 3. С. 189.
- [11] К. М. Ханин, Е. В. Вул. Adv. Sov. Math. 1991. V. 3. P. 57.
- [12] А. А. Джалилов, К. М. Ханин. УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 201.
- [13] Я. Г. Синай. Современные проблемы эргодической теории. М.: Изд. фирма “Физ.-матем. литература”, 1995.

Поступила в редакцию 1.XII.1998 г.