Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Смолянов, А. Трумен, Уравнения Шредингера–Белавкина и ассоциированные с ними уравнения Колмогорова и Линдблада, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 193–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 12:19:30

© 1999 г.

О. Г. Смолянов*, А. Трумен†

УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА–БЕЛАВКИНА И АССОЦИИРОВАННЫЕ С НИМИ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА И ЛИНДБЛАДА

Предложен новый вывод уравнения Шредингера–Белавкина. Для его решения, а также для решений соответствующих уравнений Колмогорова и Линдблада доказаны формулы типа Фейнмана–Каца.

1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастические уравнения в частных производных Шредингера–Белавкина (УШБ) описывают диффузионные процессы в гильбертовых пространствах чистых состояний квантовых систем. Вероятностные распределения этих процессов определяют смешанные состояния квантовых систем, подвергающихся непрерывным случайным возмущениям типа белого шума. Такие квантовые системы относятся к классу так называемых открытых. Помимо УШБ, для описания их эволюции можно использовать прямые или обратные уравнения Колмогорова, а также уравнения Линдблада. Один из классов открытых систем образуют системы, находящиеся под непрерывным наблюдением [1–3].

В этой статье мы предлагаем новый метод вывода УШБ, основанный на некоторой модели непрерывного наблюдения. В модели фигурируют параметры, при надлежащих значениях которых наш метод приводит к уравнениям из работ Белавкина [1, 2] (в частном случае уравнение такого типа было выведено в работе Дьоши [3]). Мы выводим формулы Фейнмана–Каца для УШБ и затем используем их для представления решений соответствующих уравнений Колмогорова и Линдблада. Заметим, что Белавкин вывел свое уравнение с помощью иного метода, основанного на квантовом стохастическом исчислении. Можно доказать, что любое УШБ следует из квантового стохастического исчисления и что уравнение Линдблада – основное в квантовом стохастическом исчислении – следует из УШБ. Это объясняется тем, что УШБ и квантовое стохастическое исчисление описывают открытые системы эквивалентно (ср. [4]). Такая эквивалентность, в свою очередь, вытекает из того, что смешанное состояние можно описать как вероятностной мерой на гильбертовом пространстве системы, так и чистым состоянием

*Московский государственный университет, Москва, Россия

†University of Wales Swansea, Swansea, Great Britain

подходящей расширенной системы (см. ниже). При этом вероятностная мера, расширенная система и ее чистое состояние определяются неоднозначно. Однако среди всех пригодных вероятностных мер существует единственная гауссова мера с нулевым средним, которая инвариантна относительно преобразования пространства состояний, определяемого умножением на мнимую единицу.

Заметим также, что описания открытых систем с помощью уравнений Колмогорова и Линдблада эквивалентны, а описание с помощью УШБ содержит больше информации, т.к. по решениям УШБ можно определить чистые состояния систем после измерений.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА–БЕЛАВКИНА

Пусть H_1 – гильбертово пространство чистых состояний некоторой квантовой системы. Любое смешанное состояние этой системы можно представить с помощью фон-неймановского оператора плотности T . Среднее значение наблюдаемой A в таком состоянии равно $(\text{tr } T)^{-1} \text{tr}(AT)$. (Подчеркнем, что мы не предполагаем ни того, что чистые состояния определяются нормированными векторами, ни того, что следы операторов плотности равны единице.) С одной стороны, смешанное состояние может рассматриваться как случайный вектор в гильбертовом пространстве. С другой стороны, это состояние можно представить как чистое состояние расширенной квантовой системы, гильбертовым пространством состояний которой является тензорное произведение $H_1 \otimes H_2$, где H_2 – пространство состояний некоторой дополнительной системы, причем $\dim H_2 \geq \dim H_1$. Дополнительная система и состояние $\varphi \in H_1 \otimes H_2$ не единственны: любое состояние φ , для которого $\text{tr}_2(\varphi \otimes \varphi) = T$, допустимо. Здесь $\varphi \otimes \varphi$ – линейный оператор в $H_1 \otimes H_2$, т.е. $\varphi \otimes \varphi \in \mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$, и tr_2 – отображение $\mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$ в $\mathcal{L}(H_1)$, называемое частичным следом и определяемое следующим образом: если $B \in \mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$, $B = B_1 \otimes B_2$ и $B_j \in \mathcal{L}(H_j)$, то $\text{tr}_2(B_1 \otimes B_2) = (\text{tr } B_2) \cdot B_1$, где tr – след в $\mathcal{L}(H_2)$. Описания смешанных состояний с помощью случайных векторов и чистых состояний расширенных систем, как уже отмечалось, физически эквивалентны. Мы будем использовать случайные векторы.

УШБ описывают предельное поведение квантовых систем, подвергаемых мгновенным одинаковым измерениям через равные промежутки времени, когда длина этих промежутков и точность измерений стремятся к нулю. Каждое мгновенное измерение определяется следующим образом.

Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства состояний двух систем **I** и **II**, из которых система **I** – наблюдаемая, а система **II** – измерительное устройство. Введем обозначение $H = H_1 \otimes H_2$. Примем, что $H_{1,2} = L^2(\mathbb{R}^1)$ и что измеряемая величина определяется равенством $(R\varphi)(q) = q\varphi(q)$, где $q \in \mathbb{R}^1$ и $\varphi \in H_1$. Процесс измерения – это взаимодействие систем **I** и **II**, представленное унитарным оператором $(V\eta)(q_1, q_2) = \eta(q_1, q_2 - q_1)$, где $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ и $\eta \in H = H_1 \otimes H_2 = L^2(\mathbb{R}^2)$. Непосредственно перед измерением системы **I** и **II** не взаимодействовали и находились в состояниях $\varphi \in H_1$ и $\Psi \in H_2$. Сразу после измерения состояние системы **I** + **II** определяется вектором $f \in H$, где $f(q_1, q_2) = \varphi(q_1)\Psi(q_2 - q_1)$. Вероятностное распределение на $\mathbb{R}^2$, соответствующее со-

стоянию f , имеет плотность $p_f(q_1, q_2) = c|\varphi(q_1)|^2|\Psi(q_2 - q_1)|^2$, где

$$c^{-1} = \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(q_1)|^2 |\Psi(q_2 - q_1)|^2 dq_1 dq_2.$$

Значение q_2 называется результатом измерения. Его распределение имеет плотность $p_2 = c|\varphi|^2 * |\Psi|^2$. Итак, мы можем сказать, что сразу после измерения состояние наблюдаемой системы – это случайный вектор $\varphi(\cdot)\Psi(q_2 - \cdot) \in H_1$, где вероятностное распределение параметра q_2 имеет плотность p_2 . Функция Ψ представляет точность измерения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нет необходимости предполагать, что система **II** классическая и что, следовательно, слова “вероятностное распределение величины q_2 ” означают “распределение после ее измерения”. Стоит отметить также, что каждое такое измерение – это измерение наблюдаемой $I_1 \otimes B$, где I_1 – единичный оператор в H_1 и $B \in \mathcal{L}(H_2)$. Любой оператор вида $I_1 \otimes B$ коммутирует с оператором вида $A \otimes I_2$, где $A \in \mathcal{L}(H_1)$ и I_2 – единичный оператор в H_2 . Поэтому смешанное состояние системы **I** не изменяется при измерении величины q_2 , если его результат остается неизвестным. Этот факт явился основанием для введения понятия неразрушающего измерения.

Пусть γ – трижды непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция, заданная на $[0, \infty)$ и такая, что функции $q \mapsto \gamma'(q)\gamma(q)$, $q \mapsto \gamma(q)^2$, $q \mapsto q\gamma''(q)\gamma'(q)$ и $q \mapsto q^2\gamma'(q)^2$ интегрируемы по полуоси $[0, \infty)$. Например, можно положить $\gamma(q) = e^{-q}$. Пусть $\lambda > 0$, $\Delta t > 0$ и $\Psi_a(q) = \gamma(aq^2)$ для любого $a > 0$. Мы предполагаем, что у системы **I** вышеописанным способом измеряется наблюдаемая q_1 в моменты времени $t_{nk}^r = (r + k/n)\Delta t$ ($n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $r = 0, 1, 2, \dots$). Между моментами измерений эволюция системы **I** определяется уравнением Шредингера с некоторым гамильтонианом $\mathcal{H}$. Примем, что $\Psi = \Psi_{\lambda\Delta t/n}$. Пусть случайное чистое состояние системы **I** в момент $t = 0$ непосредственно перед измерением равно $\varphi(t = 0, \cdot)$. Тогда состояние системы **I** сразу после измерения имеет вид $\varphi(t, q) = \varphi(t = 0, q)\gamma((\lambda\Delta t/n)(q - q_2)^2)$ и

$$\varphi\left(t + \frac{\Delta t}{n} - 0, q\right) = e^{-i\frac{\Delta t}{n}\mathcal{H}}\varphi(t = 0, q)\gamma\left(\frac{\lambda\Delta t}{n}(q - q_2)^2\right), \quad (1)$$

где q_2 – случайная величина, плотность распределения которой с точностью до нормировки – это функция $|\varphi(t = 0, \cdot)|^2 * |\Psi_{\lambda\Delta t/n}|^2$. Следовательно, среднее значение и дисперсия случайной величины q_2 равны

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) &= \frac{1}{c(t)} \int_{\mathbb{R}^1} q |\varphi(t = 0, q)|^2 dq, \\ D(q_2) &= \frac{\lambda\Delta t}{n} + \frac{1}{c(t)} \int_{\mathbb{R}^1} |q - \bar{q}(t)|^2 |\varphi(t = 0, q)|^2 dq, \end{aligned}$$

где

$$c(t) = \int_{\mathbb{R}^1} |\varphi(t = 0, q)|^2 dq.$$

Поэтому $q_2 = (\lambda\Delta t/n)^{-1/2}\eta_1 + \eta_2$, где η_1 и η_2 – независимые случайные величины с плотностями распределения, задаваемыми – с точностью до нормировки – функциями $\gamma^2(\cdot)$ и $|\varphi(t-0, \cdot - \bar{q}(t))|$. Чтобы вывести УШБ, заметим, что по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} & \gamma\left(\frac{\lambda\Delta t}{n}\left(q - \sqrt{\frac{n}{\lambda\Delta t}}\eta_1 - \bar{q}(t) - \eta_3\right)^2\right) = \\ & = \gamma\left(\frac{\lambda\Delta t}{n}(q - \bar{q}(t))^2 + \eta_1^2 + \frac{\lambda\Delta t}{n}\eta_3^2 - 2\frac{\lambda\Delta t}{n}(q - \bar{q}(t))\eta_3 - \right. \\ & \quad \left. - 2\sqrt{\frac{\lambda\Delta t}{n}}\eta_1(q - \bar{q}(t)) + 2\sqrt{\frac{\lambda\Delta t}{n}}\eta_1\eta_3\right) = \\ & = \gamma(\eta_1^2) + \gamma'(\eta_1^2)\left(\frac{\lambda\Delta t}{n}q^2 - 2\frac{\lambda\Delta t}{n}q\bar{q}(t) - 2\sqrt{\frac{\lambda\Delta t}{n}}\eta_1q + \dots\right) + \\ & \quad + 2\gamma''(\eta_1^2)\frac{\lambda\Delta t}{n}\eta_1^2q^2 + \dots = \\ & = \gamma(\eta_1^2)\left[1 + \frac{\gamma'(\eta_1^2)}{\gamma(\eta_1^2)}\left(\frac{\lambda\Delta t}{n}q^2 - 2\frac{\lambda\Delta t}{n}q\bar{q}(t) - 2\sqrt{\frac{\lambda\Delta t}{n}}q\eta_1 + \dots\right) + \right. \\ & \quad \left. + 2\frac{\gamma''(\eta_1^2)}{\gamma(\eta_1^2)}\frac{\lambda\Delta t}{n}\eta_1^2q^2 + \dots\right]. \end{aligned}$$

Здесь мы не указали слагаемые, не зависящие от q (и поэтому связанные только с нормировкой векторов состояний), а также слагаемые более высоких порядков малости по Δt , которые не вносят вклада в предел, вычисляемый ниже.

После n одинаковых измерений система **I** окажется в состоянии

$$\begin{aligned} \varphi(t + \Delta t - 0, q) &= \left\{ \prod_{j=1}^{n+1} \left[1 + \frac{\gamma'(\xi_j^2)}{\gamma(\xi_j^2)} \left(\frac{\lambda\Delta t}{n}q^2 - 2\frac{\lambda\Delta t}{n}q\bar{q}(t) - 2\sqrt{\frac{\lambda\Delta t}{n}}q\xi_j \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\frac{\gamma''(\xi_j^2)}{\gamma(\xi_j^2)}\frac{\lambda\Delta t}{n}\xi_j^2 + \dots - i\mathcal{H}\frac{\Delta t}{n} \right] \right\} \varphi(t - 0, q) = \\ &= \left\{ 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\gamma'(\xi_j^2)}{\gamma(\xi_j^2)} \left(\lambda\Delta tq^2 - 2\frac{\lambda\Delta t}{n}q\bar{q}(t) \right) - \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\gamma'(\xi_j^2)}{\gamma(\xi_j^2)} \xi_j \sqrt{\lambda\Delta t} q + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\gamma''(\xi_j^2)}{\gamma(\xi_j^2)} \xi_j^2 q^2 \lambda\Delta t - i\mathcal{H}\Delta t + \dots \right\} \varphi(t - 0, q), \end{aligned}$$

где ξ_j – независимые реализации случайной величины η_1 . По центральной предельной теореме и по закону больших чисел имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\gamma'(\xi_j^2)}{\gamma(\xi_j^2)} &\longrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} \gamma^2(x) dx = -\frac{\gamma^2(0)}{2\Gamma}, \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\gamma''(\xi_j^2)}{\gamma(\xi_j^2)} \xi_j^2 &\longrightarrow \alpha_2 = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty \frac{\gamma''(x)}{\gamma(x)} x^2 \gamma^2(x) dx = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty \gamma''(x) \gamma(x) x^2 dx \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\gamma'(\xi_j^2)}{\gamma(\xi_j^2)} \xi_j \longrightarrow g$$

при $n \rightarrow \infty$, где

$$\Gamma = \int_0^\infty \gamma^2(x) dx$$

и g — гауссова случайная величина с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Gamma} \int_0^\infty \gamma'(x)^2 x^2 dx.$$

Нетрудно проверить, что пределы при $n \rightarrow \infty$ других слагаемых в формуле для $\varphi(t + \Delta t - 0, q)$ либо равны нулю, либо пропорциональны $(\Delta t)^k$ с $k > 1$; поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(t + \Delta t - 0, q) - \varphi(t - 0, q) &= \\ &= \left[(\alpha_1 + 2\alpha_2)\lambda q^2 \Delta t + \sqrt{\lambda \Delta t} q g - 2\alpha_1 \lambda \Delta t q \bar{q} \Delta t - i\mathcal{H} \Delta t + \dots \right] \varphi(t - 0, q). \end{aligned}$$

Это означает, что случайная функция φ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$d\varphi = [-i\mathcal{H} + (\alpha_1 + 2\alpha_2)\lambda q^2] \varphi dt - 2\alpha_1 \lambda q \bar{q} \varphi dt - 2\sqrt{\lambda} \sigma q \varphi dw, \quad (2)$$

где w — стандартный винеровский процесс в $\mathbb{R}^1$ и $\bar{q}(\cdot)$ — квантово-механическое среднее измеряемой наблюдаемой в случайном состоянии $\varphi(t)$, являющееся, в свою очередь, случайной величиной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\gamma(q) = e^{-q/2}$. Тогда

$$\frac{\gamma'(q)}{\gamma(q)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\gamma''(q)}{\gamma(q)} = \frac{1}{4}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{8}$$

и, следовательно, $\alpha_1 = -1/2$, $\alpha_2 = 1/8$ и уравнение (2) имеет вид

$$d\varphi = \left(-i\mathcal{H} - \frac{\lambda}{4} q^2 \right) \varphi dt + \lambda q \varphi \bar{q} dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q \varphi dw. \quad (3)$$

Уравнение (3) — это УШБ. Его можно представить в виде

$$d\varphi = \left(-i\mathcal{H} - \frac{\lambda}{4} q^2 \right) \varphi dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q \varphi dB, \quad (4)$$

где случайный процесс

$$B: t \mapsto \sqrt{2\lambda} \int_0^t \bar{q}(\tau) d\tau + w(t)$$

можно интерпретировать как результат измерения, т.е. как “процесс на выходе”. Решения уравнения (4) представляют смешанные состояния как случайные векторы, зависящие от случайного результата измерения B , являющегося суммой проинтегрированного случайного квантово-механического среднего $\bar{q}(\cdot)$ и вызванного измерением возмущения $w(\cdot)$.

Аналогично можно вывести уравнения, описывающие непрерывные измерения нескольких не обязательно коммутирующих наблюдаемых. Например, одновременное непрерывное измерение координаты и импульса частицы в потенциальном поле имеет вид

$$d\varphi = -i\hat{\mathcal{H}}\varphi dt - \frac{\lambda_1}{4}q^2\varphi dt + \frac{\lambda_2}{4}\varphi'' dt + \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}q\varphi dB_1 + i\sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}\varphi' dB_2, \quad (5)$$

где B_1 и B_2 – случайные процессы на выходах измерителей координаты и импульса.

3. УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА И ЛИНДБЛАДА

Уравнение (3) – это нелинейное стохастическое уравнение относительно случайной функции φ . Его решение определяет вероятностную меру на пространстве функций, заданных на $[0, \infty)$ и принимающих значения в H_1 . Такая мера при каждом $t \geq 0$ определяет вероятностную меру $\nu(t)$ на H_1 . Функция $t \mapsto \nu(t)$ – это решение прямого уравнения Колмогорова.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для каждого t существует обладающая нулевым средним гауссова мера $\nu_G(t)$ на пространстве чистых состояний, определяющая то же самое смешанное состояние, что и мера $\nu(t)$. Однако пользуясь результатами измерений надрасширенной системой, можно различить $\nu_G(t)$ и $\nu(t)$.

Обратное и прямое уравнения Колмогорова можно представить в виде

$$\frac{d\Phi}{dt} = A(\Phi(t)), \quad (6a)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = A^*(\nu(t)). \quad (6b)$$

Здесь Φ и ν – функции времени t , принимающие значения в пространстве функций, заданных на H_1 , и в пространстве вещественнозначных мер на H_1 . Оператор A определяется формулой

$$A: f(\cdot) \mapsto D^*f'(\cdot) + f'(\cdot)D_1f(\cdot) - \frac{1}{2}f''(\cdot)(bf(\cdot))^2,$$

где

$$Df(q) = \left(-i\mathcal{H} - \frac{\lambda}{4}q^2\right)f(q),$$

$$D_1f(q) = \lambda q \bar{q} f(q),$$

$$bf(q) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q f(q).$$

Оператор A^* действует в пространстве мер как сопряженный к A . Разумеется, явный вид линейных операторов D и b , а также нелинейного оператора D_1 не принципиален, и оператор A имеет один и тот же вид при любых D , b и D_1 . Поэтому уравнения (6а) и (6б) суть уравнения Колмогорова, соответствующие стохастическому уравнению

$$d\varphi = D\varphi dt + D_1\varphi dt + b\varphi dw. \quad (7)$$

Ниже мы представим решения уравнений Колмогорова с помощью формул типа Фейнмана–Каца как случайные функции на вероятностном пространстве результатов непрерывных измерений. Если $D_1 = 0$, то уравнение (7) линейно. Пусть в этом случае $\tilde{\nu}(t)$ – преобразование Фурье меры $\nu(t)$. Тогда функция $t \mapsto \tilde{\nu}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tilde{\nu}(t)}{dt} = A_1(\tilde{\nu}(t)),$$

где

$$A_1: f(\cdot) \mapsto Df'(\cdot) - \frac{1}{2}f''(\cdot)(b^*f(\cdot))^2.$$

Решение прямого уравнения Колмогорова позволяет найти решение уравнения Линдблада. Если положить

$$T_1(t) = \int_H \varphi \otimes \varphi \nu(t, d\varphi),$$

то функция

$$t \mapsto T(t) = (\text{tr } T_1(t))^{-1} T_1(t), \quad (8a)$$

принимая значения в пространстве положительно-определенных ядерных операторов на H_1 , удовлетворяет уравнению Линдблада [5]

$$T'(t) = -i[\mathcal{H}, T(t)] - \frac{\lambda}{4}[R[R, T(t)]], \quad (8б)$$

где $(R\varphi)(q) = q\varphi(q)$. Заметим, что $T(t) = E(\varphi(t) \otimes \varphi(t))$, где E – символ математического ожидания. Решения уравнений Колмогорова и Линдблада, соответствующих стохастическим уравнениям, описывающим одновременные непрерывные измерения координаты и импульса, связаны аналогично (8а).

4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МЕР НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть E и G – векторные пространства в двойственности, $\mathcal{M}(E, G)$ – векторное пространство конечных комплекснозначных G -цилиндрических мер на E и $\nu \in \mathcal{M}(E, G)$. Локально-выпуклое пространство (ЛВП) E_- называется ν -расширением пространства E , если выполняются три условия:

1. E – плотное подпространство из E_- и G содержит векторное подпространство G_+ , каждый элемент которого, рассматриваемый как линейный функционал на E , совпадает с сужением на E некоторого элемента из E'_- .

2. G_+ -цилиндрическая мера на E_- , являющаяся образом ν при отображении вложения $E \mapsto E_-$, σ -аддитивна. Лебегово расширение этой меры обозначается символом ν_- .

3. Каждый элемент из G , рассматриваемый как линейный функционал на E , является сужением на E единственного ν_- -измеримого линейного функционала на E_- , и, следовательно, аналогичное утверждение справедливо для любой $\sigma(E, G)$ -непрерывной G -цилиндрической функции на E .

Функция $F: E \mapsto \mathbb{R}$ называется ν -интегрируемой, если $F(\cdot) = F_1(\cdot)F_2(\cdot)$, где $F_1(\cdot)$ имеет единственное непрерывное продолжение F_1^- на E_- и $F_2(\cdot)$ есть $\sigma(E, G)$ -непрерывная G -цилиндрическая функция на E (ее единственное расширение до ν_- -измеримой функции на E_- обозначается символом F_2^-), и если функция $F^- = F_1^- \cdot F_2^-$ является ν_- -интегрируемой. При этом по определению

$$\int_E F(x) \nu(dx) = \int_{E_-} F^-(x) \nu_-(dx).$$

При каждом $t > 0$ определим векторные пространства Q_t и P_t непрерывных справа ограниченных функций, заданных на $[0, t]$, принимающих значения в некотором гильбертовом пространстве H и обращающихся в нуль в точке $t = 0$, производные которых (в смысле теории обобщенных функций) являются σ -аддитивными борелевскими мерами на $[0, t]$ со значениями в H . Скалярное произведение в H обозначается символом $(\cdot, \cdot)_H$.

Мы предполагаем, что пространства P_t и Q_t образуют дуальную пару относительно билинейной формы

$$(p, q) \in P_t \times Q_t \mapsto \int_0^t (p(\tau), q'(\tau))_H d\tau \in \mathbb{R}^1.$$

Здесь справа – интеграл от p по мере, равной производной от q . (Интегралы от функций, принимающих значения в некотором гильбертовом пространстве, по мерам, принимающим значения в том же пространстве, определяются естественным образом. Для этой цели, в частности, можно использовать интеграл Колмогорова [6].)

Преобразование Фурье меры $\nu \in \mathcal{M}(Q_t, P_t)$ – это функция $P_t \mapsto \mathbb{R}^1$, обозначаемая символом $F_Q \nu$ и такая, что

$$(F_Q \nu)(p) = \int_{Q_t} \exp \left[i \int_0^t p(\tau) q'(\tau) d\tau \right] \nu(dq).$$

Преобразование Фурье меры $\mu \in \mathcal{M}(P_t, Q_t)$ есть функция $Q_t \mapsto \mathbb{R}^1$, обозначаемая символом $F_P \mu$ и такая, что

$$(F_P \mu)(q) = \int_{P_t} \exp \left[i \int_0^t p(\tau) q'(\tau) d\tau \right] \mu(dp).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $Q_t = P_t$, $\nu_Q \in \mathcal{M}(Q_t, P_t)$ и $\nu_P \in \mathcal{M}(P_t, Q_t)$ – одинаковые меры, Ψ – непрерывная функция $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ и V – локально ограниченная непрерывная функция $H \mapsto \mathbb{C}$. Если

$$F_Q \nu_Q(p) = \Psi \left(\int_0^t V(p(\tau)) d\tau \right),$$

то

$$F_P \nu_P(q) = \Psi \left(\int_0^t V(q(t) - q(\tau)) d\tau \right)$$

и

$$F_Q(e^{iq(t)p_0} \cdot \nu_Q)(p) = \Psi \left(\int_0^t V(p_0 + p(\tau)) d\tau \right),$$

$$F_P(e^{ip(t)q_0} \cdot \nu_P)(q) = \Psi \left(\int_0^t V(q(t) - q(\tau) - q_0) d\tau \right)$$

для любых $p_0, q_0 \in H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$\begin{aligned} F_P \nu_P(q) &= \int_{P_t} \exp \left[i \left(- \int_0^t q(\tau) p'(\tau) d\tau + \int_0^t q(t) p'(\tau) d\tau \right) \right] \nu_P(dp) = \\ &= \Psi \left(\int_0^t V(q(t) - q(\tau)) d\tau \right). \end{aligned}$$

Два других равенства следуют из этого.

Аналогичное утверждение справедливо и в случае $Q_t \neq P_t$.

Пусть при каждом $\alpha > 0$ символом η_α обозначается вероятностная мера на H , преобразование Фурье которой имеет вид $\tilde{\eta}_\alpha(h) = \exp(\alpha v(h))$, где v – некоторая функция на H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть мера $\nu \in \mathcal{M}(Q_t, P_t)$ порождается однородным процессом в H с независимыми приращениями, причем вероятностное распределение приращения за время Δt равно $\eta_{\Delta t}$. Тогда

$$F_Q \nu(p) = \exp \left[\int_0^t v(p(\tau)) d\tau \right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ – разбиение отрезка $[0, t]$ точками $0 < t_1 < \dots < t_n = t$ и $d(\tau) = \max |t_j - t_{j-1}|$. Тогда

$$\begin{aligned} F_Q \nu(p) &= \int_{Q_t} \exp \left[i \int_0^t p(\tau) q'(\tau) d\tau \right] \nu(dq) = \\ &= \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \int_{Q_t} \exp \left[i \sum_j (p(t_j), q(t_{j+1}) - q(t_j))_H \right] \nu(dq) = \\ &= \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \prod_j \int e^{ip(t_j)(q(t_{j+1}) - q(t_j))} \nu(dq) = \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \prod_j e^{v(p(t_j)) \Delta t_j} = \\ &= \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \exp \left[\sum_j v(p(t_j)) \Delta t_j \right] = \exp \left[\int_0^t v(p(\tau)) d\tau \right]. \end{aligned}$$

ПРИМЕР (комплексная мера Пуассона). Пусть $\mathcal{E}$ – произвольное ЛВП. Если $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$, $\alpha \in \mathcal{E}$ и π_β^α – мера на $\mathcal{E}$, сосредоточенная в $\{n \cdot \alpha : n \in \mathbb{N}\}$ и определяемая равенством $\pi_\beta^\alpha(n \cdot \alpha) = c \cdot \beta^n / n!$, то $F\pi_\beta^\alpha(z) = c \exp(\beta e^{iz(\alpha)})$, $z \in \mathcal{E}'$. Если $\beta > 0$ и $c = e^{-\beta}$, то π_β^α – стандартное пуассоновое распределение на $\{n \cdot \alpha\}$ [6].

Пусть теперь β – комплексная борелева σ -аддитивная мера на $\mathcal{E}$. Тогда можно построить непрерывную сумму независимых мер $\pi_{\beta(d\alpha)}^\alpha$, определяемую как комплексная борелева σ -аддитивная мера π_β на $\mathcal{E}$ такая, что $\forall z \in \mathcal{E}'$

$$\tilde{\pi}_\beta(z) = \exp \int e^{iz(\alpha)} \beta(d\alpha).$$

Определения пространств P_t и Q_t аналогичны вышеприведенным с тем лишь отличием, что P_t состоит теперь из функций, принимающих значения в $\mathcal{E}'$, а Q_t – из функций, принимающих значения в $\mathcal{E}$. Комплексная P_t -цилиндрическая мера ν_β на Q_t с независимыми приращениями, определяемая равенством

$$\nu_\beta\{q \in Q_t : q(t_2) - q(t_1) \in B\} = \pi_\beta(B),$$

называется комплексной пуассоновой мерой. Если $\mathcal{E}$ конечномерно, то такая мера была определена иным образом в [7].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H = \mathbb{R}^1$, φ_0 – непрерывная функция $H \mapsto \mathbb{C}$ с компактным носителем, $\mu_Q \in \mathcal{M}(Q_t, P_t)$, $\nu_P \in \mathcal{M}(P_t, Q_t)$,

$$\begin{aligned} F_Q \mu_Q(p) &= \psi_\mu \left(\int_0^t V_\mu(p(\tau)) d\tau \right), \\ F_P \nu_P(q) &= \psi_\nu \left(\int_0^t V_\nu(q(\tau)) d\tau \right), \end{aligned}$$

где ψ_ν и ψ_μ – непрерывные функции $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, V_ν и V_μ – непрерывные функции $H \mapsto \mathbb{C}$. Если

$$\varphi_t(q) = \int_{Q_t} \psi_\nu \left(\int_0^t V_\nu(q + \xi(\tau)) d\tau \right) \exp \left[\int_0^t (q + \xi(\tau)) dw(\tau) \right] \varphi_0(q + \xi(t)) \mu_Q(d\xi),$$

где w – стандартный винеровский процесс, то преобразование Фурье функции φ_t (в смысле теории обобщенных функций) определяется равенством

$$\widetilde{\varphi}_t(p) = \int_{P_t} \psi_\mu \left(\int_0^t V_\mu(p - \eta(\tau) - w(\tau)) d\tau \right) \tilde{\varphi}_0(p + \eta(\tau) + iw(t)) \nu_P(d\eta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделав замену переменных $q + \xi(t) = q_1$ и используя равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_t(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-iqp} \int_{Q_t} \psi_\nu \left(\int_0^t V_\nu(q + \xi(\tau)) d\tau \right) \exp \left[\int_0^t (q + \xi(\tau)) dw(\tau) \right] \times \\
&\quad \times \varphi_0(q + \xi(t)) \mu_Q(d\xi) dq = \int_{Q_t} \int_{\mathbb{R}^1} \psi_\nu \left(\int_0^t V_\nu(q_1 + \xi(\tau) - \xi(t)) d\tau \right) \times \\
&\quad \times e^{q_1 w(t)} \exp \left[- \int_0^t w(\tau) \xi'(\tau) d\tau \right] e^{i(\xi(t) - q_1)p} \varphi_0(q_1) dq_1 \mu_Q(d\xi) = \\
&= \int_{Q_t} \int_{\mathbb{R}^1} F_P(e^{-i\eta(t)q_1} \nu_P)(-\xi) e^{q_1 w(t) - i q_1 p} \times \\
&\quad \times \exp \left[i \xi(t)p - \int_0^1 w(\tau) \xi'(\tau) d\tau \right] \varphi_0(q_1) dq_1 \mu_Q(d\xi) = \\
&= \int_{P_t} \int_{\mathbb{R}^1} F_Q \left(\exp \left[i \xi(t)p - \int_0^t w(\tau) \xi'(\tau) d\tau \right] \mu_Q \right) (-\eta) \times \\
&\quad \times e^{-i\eta(t)q_1} e^{q_1 w(t) - i q_1 p} \varphi_0(q_1) dq_1 \nu_P(d\eta) = \\
&= \int_{P_t} \int_{\mathbb{R}^1} \psi_\mu u \left(\int_0^t V_\mu(p - \eta(\tau) - w(\tau)) d\tau \right) \times \\
&\quad \times e^{-i\eta(t)q_1 + q_1 w(t) - i q_1 p} \varphi_0(q_1) dq_1 \nu_P(d\eta) = \\
&= \int_{P_t} \psi_\mu \left(\int_0^t V_\mu(p - \eta(\tau) - w(\tau)) d\tau \right) \widetilde{\varphi}_0(p + i w(t) + \eta(t)) \nu_P(d\eta).
\end{aligned}$$

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этом разделе мы выведем несколько формул для решений УШБ типа формул Фейнмана–Каца. Первая такая формула была доказана в 1996 г. ([8], см. также [9]) для уравнения (3) при $\mathcal{H} = -\Delta/2$ с помощью формулы Ито, аналитического продолжения и равенства Парсеваля. Здесь мы рассмотрим более общее уравнение (5) и используем полученные результаты для представления решений соответствующих уравнений Колмогорова и Линдблада с помощью функциональных интегралов. Для уравнения (3) формулы Фейнмана–Каца можно написать с точностью до коэффициентов по аналогии с ситуацией, в которой случайное возмущение отсутствует. Для уравнения (5) подобная аналогия приводит к формулам с бессмысленными интегралами. Поэтому мы сначала изложим метод, позволяющий “предугадать” формулу Фейнмана–Каца для уравнения (5). Для прояснения сути сначала применим этот метод к уравнению (10) (см. ниже), которое содержит только слагаемые, приводящие к бессмысленным интегралам. После этого станет ясно, какой вид имеет формула Фейнмана–Каца для уравнения (5) (фактически мы рассмотрим более общее уравнение (11)). Ее можно доказать с помощью формулы Ито [4, 9–13].

Сделаем еще одно замечание физического характера. Если рассматривать только эксперименты с открытой системой, а не с ее окружением (в частности, только с квантовой системой, находящейся под непрерывным наблюдением, но без информации о результатах этого наблюдения), то для того чтобы описать эволюцию этой системы, необходимо описать эволюцию ее смешанных состояний. Для этого можно использовать УШБ, уравнение Колмогорова или уравнение Линдблада. Однако если требуется найти зависимость случайных чистых состояний системы от результатов экспериментов, то пригодно только УШБ. При этом формула Фейнмана–Каца явным образом выражает зависимость случайных чистых состояний наблюдаемой системы от “элементарных событий” из вероятностного пространства, которое в данном случае является пространством результатов измерений.

Ниже мы рассмотрим УШБ со стандартными винеровскими процессами в правых частях, но все формулы справедливы и в случае, если вместо этих процессов фигурируют процессы $B(\cdot)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $H = \mathbb{R}^1$, φ_0 – непрерывная функция $H \mapsto \mathbb{C}$ с компактным носителем и $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta > 0$ – постоянные. Положим

$$\varphi_t(q) = \int_{Q_t} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t (q - \gamma\xi(\tau) - \beta w(\tau))^2 d\tau\right) \tilde{\varphi}_0(q + \gamma\xi(t) + i\beta w(t)) \nu_Q(d\xi), \quad (9)$$

где w – стандартный винеровский процесс, ν_Q – стандартная мера Винера, порожденная другим винеровским процессом, не зависящим от w , и $\gamma^2 = \alpha + \beta^2$. Тогда φ_t – решение задачи Коши для уравнения

$$d\varphi = \left(\frac{1}{2}\alpha\varphi'' - \frac{1}{2}q^2\varphi\right) dt + i\beta\varphi' dw$$

с начальными данными $(0, \tilde{\varphi}_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случайная функция $t \mapsto \varphi_t$ является решением вышеуказанной задачи Коши тогда и только тогда, когда функция $\tilde{\varphi}: t \mapsto \tilde{\varphi}_t$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$d\tilde{\varphi}_t = \left(-\frac{1}{2}\alpha p^2 \tilde{\varphi}_t + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_t''\right) dt + \beta p \tilde{\varphi}_t dw$$

и начальным данным $(0, \varphi_0)$. Поэтому в соответствии с работой [8]

$$\tilde{\varphi}_t(p) = \int_{P_t} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2} \int_0^t (p + \eta(\tau))^2 d\tau + \beta \int_0^t (p + \eta(\tau)) dw(\tau)\right) \tilde{\varphi}_0(p + \eta(t)) \nu_P(d\eta),$$

где ν_P – стандартная мера Винера на $P_t = W_2^1(0, t)$. Мы предполагаем, что винеровский процесс, определяемый мерой ν_P , не зависит от w (это можно доказать с помощью формулы Ито). Для завершения доказательства достаточно воспользоваться предложением 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть V и φ_0 – непрерывные функции $H = \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{C}$ с компактными носителями и β – положительное число. Тогда задача Коши для уравнения

$$d\psi(t) = i \left(\frac{1}{2} \psi''(t) + V \psi(t) \right) dt + \beta q \psi'(t) dw(t) \quad (10)$$

с начальными данными $(0, \varphi_0)$ имеет решение

$$\begin{aligned} \psi_t(q) = & \int_{P_t} \exp \left(i \int_0^t V(q + \xi(\tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \int_0^t \beta^2 \cdot (q + \xi(\tau))^2 d\tau - i\beta \int_0^t (q + \xi(\tau)) dw(\tau) \right) \nu_{\Phi}(d\xi), \end{aligned}$$

где символ $\int \dots \nu_{\Phi}(d\xi)$ обозначает фейнмановский интеграл по путям, определяемый как предел кратных интегралов [11].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно использовать тот же метод, что и при доказательстве предложения 3. Решение уравнения, которое получается после преобразования Фурье обеих частей равенства (10), можно найти с помощью метода, являющегося модификацией метода Маслова [7, 11] (см. также [14]). При этом отличие от доказательства предложения 3 состоит в том, что интегрирование происходит по комплексной мере Пуассона, а не по гауссовой мере. Соответствующий интеграл можно вычислить как предел некоторой последовательности кратных интегралов. Применяя к каждому из этих интегралов формулу Парсеваля и заменяя переменные, можно получить последовательность кратных интегралов, пределом которой по определению является фейнмановский интеграл.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Используя предложение 3 и теорему 2, можно получить формулу Фейнмана–Каца для решения УШБ при $Q = \mathbb{R}^1$

$$d\varphi = \left(\frac{\alpha}{2} \varphi'' + V\varphi + a\varphi' \right) dt + \beta_1 \varphi' dw_1 + b\varphi dw_2, \quad (11)$$

где w_1 и w_2 – независимые стандартные винеровские процессы, φ – случайная функция вещественной переменной, принимающая значения в пространстве функций $Q \mapsto \mathbb{C}$, V , a и b – функции $Q \mapsto \mathbb{C}$, $\beta_1 > 0$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ – постоянные.

Примем, что $\forall c \in \mathbb{C}$

$$c^{1/2} = |c|^{1/2} e^{i \arg c / 2}, \quad -\pi < \arg c < \pi.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть V_1 , φ_1 , a_1 и b_1 – голоморфные функции $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ такие, что для каждого компакта $K \subset \mathbb{C}$ существует число $C > 0$ такое, что $\forall q \in K$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} V_1(q + \sqrt{\alpha} z) &< C \cdot (1 + |z|), \\ |\varphi_1(q + \sqrt{\alpha} z)| &< \exp(C \cdot (1 + |z|)), \\ |\operatorname{Re} a_1(q + \sqrt{\alpha} z)| &< C \cdot (1 + |z|), \\ |\operatorname{Re} b_1(q + \sqrt{\alpha} z)| &< C \cdot (1 + |z|). \end{aligned}$$

Пусть к тому же $\operatorname{Re} b_1^2(q + \sqrt{\alpha}z) \geq 0$, $\operatorname{Re} a_1^2(q + \sqrt{\alpha}z) \geq 0$ и V , φ_0 , a , b – сужения V_1 , φ_1 , a_1 и b_1 на Q . Тогда задача Коши для уравнения (11) с начальными данными $(0, \varphi_0)$ имеет сильное решение φ , определяемое формулой

$$\begin{aligned} \varphi_t(q) = & \int_{C([0,t])} \varphi_0(q - \sqrt{\gamma}\xi(t) + i\beta_1 w(t)) \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^t b(q - \sqrt{\gamma}\xi(\tau) + i\beta_1 w(\tau)) dw_2(\tau) + \right. \\ & + \int_0^t a(q - \sqrt{\gamma}\xi(\tau) + i\beta_1 w(\tau)) dB(\tau) + \\ & + \int_0^t \left(V(q - \sqrt{\gamma}\xi(\tau) + i\beta_1 w(\tau)) - \frac{1}{2}b^2(q - \sqrt{\gamma}\xi(\tau) + i\beta_1 w(\tau)) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2}a^2(q - \sqrt{\gamma}\xi(\tau) + i\beta_1 w(\tau)) \right) d\tau \right\} w_{0t}(d\xi), \end{aligned}$$

где $\gamma = \alpha - \beta_1^2$ и w_{0t} – стандартная мера Винера на $C(0, t)$, порождаемая процессом, не зависящим от w_1 и w_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на формуле Ито (ср. [4, 9–11, 13]).

Рассмотрим теперь формулы для решений уравнений Линдблада и Колмогорова. Эти формулы являются непосредственными следствиями формул для решений УШБ. Мы рассмотрим уравнения Линдблада и Колмогорова, соответствующие (4). Пусть при каждом $\varphi_0 \in H$ функция $t \mapsto f(t, \varphi_0, B)$ является решением задачи Коши для уравнения (4), определяемым формулой Фейнмана–Каца. Можно считать, что φ_0 – случайное начальное значение, т.е. случайный вектор в H , не зависящий от w .

ТЕОРЕМА 4. Пусть ν – σ -аддитивная гауссова мера на H с нулевым средним и ковариационным оператором T_0 . Тогда функция (8а), где

$$T_1(t) = \int_{C([0,t]) \times H} f(t, \psi, \xi) \otimes f(t, \psi, \xi) \nu_B(d\xi) \nu(d\psi)$$

и ν_B – мера на $C([0, t])$, порождаемая B , является решением уравнения Линдблада (8б) с начальными данными $(0, T_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть G – ограниченная непрерывная функция на H и ν_0 – σ -аддитивная комплексная мера Бореля на H . Тогда функция

$$t \mapsto \left[\psi \mapsto \int_{C([0,t])} G(f(t, \psi, \xi)) \nu_B(d\xi) \right]$$

есть решение обратного уравнения Колмогорова (6а) с начальными данными $(0, G)$. Функция

$$t \mapsto \left[\mathcal{B}(H) \ni A \mapsto \nu_B \left(\left\{ \xi \in C([0, t]), \int_H f(t, \psi, \xi) \nu_0(d\psi) \in A \right\} \right) \right]$$

– решение прямого уравнения Колмогорова (6б) с начальными данными $(0, \nu_0)$.

Благодарности. О.Г. Смолянов выражает признательность математическому факультету университета Уэльса (г. Сванзи) за гостеприимство, а также фонду EPSRC за финансовую поддержку (грант № GR/L31425).

Список литературы

- [1] *V. P. Belavkin.* Phys. Lett. A. 1989. V. 140. P. 355–359.
- [2] *V. P. Belavkin.* Nondemolition measurements, nonlinear filtering and dynamic programming of quantum stochastic processes. In: Proc. Bellman Continuous Workshop. Sophia–Antinopolis, Lecture Notes in Computer and Inform. Sciences, 121. Berline: Springer, 1988. P. 245–265.
- [3] *L. Diósi.* Phys. Lett. A. 1988. V. 129. P. 419–423.
- [4] *A. S. Holevo.* Quantum stochastic calculus. In: Modern problems of mathematics. V. 36, 1990. P. 3–27.
- [5] *G. Lindblad.* Commun. Math. Phys. 1976. V. 48. № 2. P. 119–130.
- [6] *М. Лоэв.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
- [7] *A. M. Chebotarev, V. P. Maslov.* Processus de sauts et leurs applications dans la mécanique quantique. In: Lect. Notes Phys. Vol. 106. “Feynman Path Integrals”. Eds. S. Albeverio et. al. Berlin: Springer, 1979. P. 58.
- [8] *S. Albeverio, V. N. Kolokol'tsov, O. G. Smolyanov.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1996. V. 323. № 1. P. 661–664.
- [9] *В. П. Белавкин, О. Г. Смолянов.* Докл. РАН. Сер. матем. 1998. V. 360. № 5. P. 589.
- [10] *A. Truman, T. Zastawniak.* Stochastic P.D.E.s of Schroedinger type stochastic Mehler kernels – a path integral approach (to appear).
- [11] *В. П. Маслов.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976.
- [12] *T. Zastawniak.* Lett. Math. Phys. 1997. V. 41. № 1. P. 93–99.
- [13] *B. Simon.* Functional integration and quantum physics. New York: Acad. Press, 1979.
- [14] *О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе.* Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.

Поступила в редакцию 5.VI.1998 г.,
после доработки 11.III.1999 г.