Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Горбатенко, Т. М. Горбатенко, Можно ли решение Керра найти методом Эйнштейна–Инфельда–Гофмана?, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 1, 160–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf77>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:36:50

© 2004 г. М. В. Горбатенко*, Т. М. Горбатенко*

МОЖНО ЛИ РЕШЕНИЕ КЕРРА НАЙТИ МЕТОДОМ ЭЙНШТЕЙНА–ИНФЕЛЬДА–ГОФМАНА?

Получены разложения метрики Керра, записанной в гармонических координатах, при тех значениях радиальной координаты r , на которых безразмерные параметры m/r , a/r (m, a – параметры, используемые в решении Керра) имеют второй и первый порядков малости, соответственно. Показано, что методом Эйнштейна–Инфельда–Гофмана невозможно однозначно воспроизвести эти разложения. Сделан вывод о необходимости нормировки на разложения метрики Керра тех выражений, которые возникают при выводе уравнений поступательного движения частиц-сингулярностей и уравнений эволюции их спинов в постньютоновском и более высоких приближениях.

Ключевые слова: метрика Керра, постньютоновское приближение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Точным решением аксиально-симметричной стационарной (АСС) задачи для уравнений общей теории относительности (ОТО) с нулевым тензором энергии-импульса является решение Керра [1]. В гармонических координатах это решение записано в работах [2]. В приложении 1 мы приведем выражение для метрического тензора решения Керра $g^{\alpha\beta}(x^0, x, y, z)$ в декартовых гармонических координатах $(x^0, x, y, z)^{1)}$.

Возникает естественный вопрос: зачем решать АСС-задачу приближенным методом Эйнштейна–Инфельда–Гофмана (ЭИГ), если известно точное решение? Ответ состоит из двух частей.

Во-первых, построение АСС-решения уравнений Эйнштейна методом ЭИГ позволяет выявить его возможности как метода нахождения решений системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в определенных пространственно-временных областях. Так, можно будет понять, в какой степени могли бы мы приблизиться

¹⁾ В отличие от работ [2], в данной статье используется сигнатура $(-+++)$ и порядок расстановки координат $(x^0, \varphi, r, \theta)$, а не $(x^0, r, \varphi, \theta)$.

*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Нижегородская обл., г. Саров, Россия.
E-mail: gorbatenko@vniief.ru

к решению Керра с помощью метода ЭИГ, если бы решение Керра до сих пор не было открыто. То же самое относится и к еще не открытым точным решениям уравнений Эйнштейна как с нулевым, так и с ненулевым тензором энергии-импульса.

Второй мотив имеет более утилитарный характер, а именно: приведенные в данной работе разложения решения Керра могут быть использованы для калибровки выражений, получаемых при рассмотрении методом ЭИГ задачи о движении вращающихся частиц-сингулярностей в постньютоновском (ПН) и более высоких приближениях.

2. МЕТОД ЭИГ

2.1. Обозначения. В данной работе решаются уравнения Эйнштейна, которые, как и в работах [3], мы запишем с использованием $\eta_{\alpha\beta}$ – метрического тензора пространства Минковского:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = 0. \quad (1)$$

Здесь $R_{\alpha\beta}$ – тензор Риччи, определяемый стандартным образом (см., например, [4]). В фоновом пространстве будут использоваться декартовы координаты, поэтому

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В методе ЭИГ используются величины $h_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$. Первая из них определяется соотношением

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (3)$$

где $g_{\alpha\beta}$ – метрический тензор риманова пространства, а величина $\gamma_{\alpha\beta}$ связана с $h_{\alpha\beta}$ как

$$\gamma_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}). \quad (4)$$

Поднимание и опускание индексов у величин $h_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$ будет производиться с помощью тензоров (2). Так, под величиной $h^{\alpha\beta}$ будем понимать дальше $h^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}h_{\mu\nu}$.

Начиная с этого момента, используется предположение о том, что при выборе декартовых координат в пространстве Минковского модуль каждой из компонент тензора $h_{\alpha\beta}$ является малой величиной по сравнению с единицей.

2.2. Расстановка порядков малости. Рассматриваемый источник характеризуется двумя априори никак не связанными между собой величинами: массой $\tilde{m}$ (размерность в гауссовой системе г) и собственным угловым моментом, который без ограничения общности может быть представлен в виде $\tilde{m}c \cdot a$ (размерность в гауссовой системе г·см²/с). Здесь c – скорость света, а a – некоторый параметр, имеющий размерность длины. С помощью гравитационной постоянной $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$ можно перейти от величины $\tilde{m}$ к величине $m \equiv G\tilde{m}/c^2$ с размерностью длины. Так что рассматриваемый источник можно характеризовать двумя величинами m и a , каждая из которых имеет размерность длины.

При значениях радиальной координаты r из величин m , a , r можно образовать два независимых безразмерных параметра

$$u \equiv \frac{m}{r}, \quad \nu \equiv \frac{a}{r}. \quad (5)$$

Ясно, что подбором радиальной координаты r всегда можно добиться того, чтобы эти параметры были сколь угодно малыми. Однако относительное соотношение между ними в принципе произвольно, определяется характеристиками конкретной физической ситуации и не зависит от величины r .

Введем безразмерный параметр малости λ , с помощью которого будем характеризовать все встречающиеся при рассмотрении функции, и определим его соотношением

$$\lambda \sim \sqrt{u} = \sqrt{\frac{m}{r}}.$$

Определенный таким образом параметр совпадает с тем параметром малости, который используется при рассмотрении движения тел в ньютоновском, ПН и последующих приближениях.

Пусть $a/r \sim \lambda^q$, где q – некоторое положительное целое число. Если q достаточно велико, то наличие момента не проявится не только в ньютоновском, но и в ПН-приближении. Наименьшим значением q , при котором спин не влияет на ньютоновское, но проявляется в ПН-приближении, является $q = 1$. Именно этот случай мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Итак,

$$\frac{m}{r} \sim \lambda^2, \quad \frac{a}{r} \sim \lambda, \quad \lambda \ll 1. \quad (6)$$

Из (6) следует, что при заданных величинах m и a расстояния r , на которых могут быть применимы получаемые в данной работе приближенные выражения, имеют порядок величины $r \sim a^2/m$.

Метод ЭИГ применяется в данной работе не совсем стандартным образом по двум причинам. Во-первых, рассматривается одночастичная, а не многочастичная задача. Во-вторых, задача является стационарной, и в точном решении производные метрики по времени равны нулю. Первый момент нестандартности никаких принципиальных затруднений не вызывает. Однако второй момент требует пояснения. Дело в том, что при применении метода ЭИГ мы будем использовать уравнения в общей форме, т.е. в таком виде, при котором в уравнения входят производные как по пространственным координатам x^k , так и по координате x^0 . Стационарность выражений должна возникать при нашем способе применения метода ЭИГ как следствие одночастичности и аксиальной симметрии задачи. Для решения уравнений, записанных в общей форме, необходимо правило для оценки изменения порядка малости функций при дифференцировании по x^0 и по x^k , т.е. величин типа $f_{,0}$, $f_{,k}$, где f – некоторая функция. Для нахождения изменения порядка малости будем исходить из того правила оценки, которое справедливо в случае ньютоновского приближения для задачи о движении частиц с массами $\tilde{m}$, $\tilde{M}$.

Для каждой из частиц потенциальная и кинетическая энергии имеют один порядок малости, т.е. $GM\tilde{m}/r \sim \tilde{M}v^2/2$. Отсюда следует, что $v/c \sim \sqrt{m/r} \sim \lambda$. Другими словами, параметр λ по порядку величины совпадает с отношением характерной скорости относительного движения частиц к скорости света. При дифференцировании по координате x^0 некоторой функции f , характеризующей движение частицы с массой m по финитной траектории с периодом T , по порядку величины

$$f_{,0} \sim \frac{f}{Tc} \sim \frac{fv}{rc} \sim \left(\frac{f}{r}\right)\lambda \sim \sqrt{f_{,k}f_{,k}}\lambda. \quad (7)$$

Здесь мы использовали соотношение $T \sim r/v$ и тот факт, что f/r по порядку величины совпадает с модулем производной функции f по пространственным координатам.

Таким образом, при дифференцировании по x^0 порядок малости на единицу выше, чем при дифференцировании по пространственным координатам x^k . В результате мы приходим к правилу оценки производных по времени (7), используемому при обычном способе применения метода ЭИГ. Другими словами, будет решаться та же система уравнений, которая возникает при рассмотрении задачи о движении вращающихся тел в ПН-приближении, но только для одной частицы.

После введения параметра малости λ необходимо сделать определенные предположения относительно расстановки порядков малости отдельных членов, входящих в функции $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$. Конструкция членов низшего приближения однозначно определяется ассортиментом имеющихся в задаче параметров (5). Порядки малости других членов выбираются так, чтобы процедура ЭИГ была самосогласованной. В нашем рассмотрении будут использоваться следующие расстановки порядков малости:

$$\begin{aligned} \gamma_{00} &= \gamma_{00}^{(2)} + \gamma_{00}^{(4)} + \gamma_{00}^{(5)} + \dots, \\ \gamma_{0k} &= \gamma_{0k}^{(3)} + \gamma_{0k}^{(5)} + \gamma_{0k}^{(6)} + \dots, \\ \gamma_{mn} &= \gamma_{mn}^{(4)} + \gamma_{mn}^{(5)} + \gamma_{mn}^{(6)} + \dots. \end{aligned} \quad (8)$$

На некоторых этапах удобно будет представлять функции $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$ в виде суммы двух частей: шварцшильдовой части и части, обращающейся в нуль при обращении в нуль собственного момента. Первая часть будет помечаться крышкой, а вторая – чертой. Например,

$$\gamma_{00} = \hat{\gamma}_{00}^{(4)} + \bar{\gamma}_{00}^{(4)}. \quad (9)$$

2.3. Координатные условия. В качестве координатных условий будут использоваться известные условия де Дондера [5]:

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\sqrt{-g(x)} g^{\lambda\sigma}(x)) = 0. \quad (10)$$

Условия (10) записаны в терминах метрики, однако при их использовании автоматически (см., например, [2]) получается решение в координатах, удовлетворяющих условиям гармоничности, т.е. условиям

$$\frac{\partial}{\partial y^\mu} \left(\sqrt{-g(y)} g^{\mu\nu}(y) \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\nu} \right) = 0. \quad (11)$$

Здесь $\{y^a\}$ – произвольная система координат, $g_{\alpha\beta}(y)$ – метрический тензор в координатах $\{y^a\}$, $g_{\alpha\beta}(x)$ – метрический тензор в гармонических координатах $\{x^a\}$.

Из (11) следует, что гармоническая система координат определена с точностью до малого a_α -преобразования при условии, что вектор a_α удовлетворяет уравнению

$$\square a^\alpha = 0. \quad (12)$$

Малые a_α -преобразования приводят к изменению геометрических объектов, в том числе и $\gamma_{\alpha\beta}$; более детально этот вопрос рассматривается в приложении 4.

2.4. Метод нахождения величин γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} . Основные приемы метода ЭИГ сформулированы в работах [3] и состоят в следующем.

1. Уравнения (1) записываются с использованием сделанных предположений (9) относительно порядков малости отдельных частей функций γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} .
2. То же самое делается и по отношению к координатным условиям (10).
3. Полученные уравнения и условия решаются.
4. При решении некоторых из уравнений (1) и условий (10) возникает необходимость удовлетворения условий их разрешимости, которые имеют вид равенства нулю интегралов от искомым функций по сфере малого радиуса, окружающей точку размещения частицы, либо требования обращения в нуль антисимметричной части метрического тензора. Последнее условие обсуждалось и использовалось в работе [6].

Условия разрешимости имеют смысл уравнений поступательного движения частиц, соотношений для перенормировки масс и спинов частиц, уравнений для движения собственных угловых моментов. В случае АСС-задачи большинство из этих условий тривиализируются. Для целей настоящей работы более интересными оказываются выражения для функций γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} , которые могут быть сопоставлены с соответствующими функциями точного решения.

Явный вид уравнений, которые будут решаться в настоящей работе, приведен в приложении 2, а координатных условий – в приложении 3.

3. НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИЙ γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn}

3.1. Нахождение γ_{00} . Величина γ_{00} обязана удовлетворять уравнению $[00; \lambda^2]$. Координатное условие для γ_{00} отсутствует.

Перечислим подробно требования, исходя из которых (либо аналогичных им) будут находиться решения как уравнения $[00; \lambda^2]$, так и других уравнений. Решение должно:

- 1) быть безразмерным;
- 2) быть трехмерным скаляром;
- 3) иметь второй порядок малости;
- 4) быть сконструированным только с использованием параметров (5) и координат “точки наблюдения”;
- 5) совпадать при $r \rightarrow \infty$ с соответствующей частью асимптотики решения Керра.

Легко убедиться в том, что решение будет удовлетворять перечисленным требованиям, если оно будет иметь вид

$$\frac{\gamma_{00}}{2} = \frac{\hat{\gamma}_{00}}{2} = \frac{4m}{r}, \quad (13)$$

$$\frac{\bar{\gamma}_{00}}{2} = 0. \quad (14)$$

3.2. Нахождение γ_{0k} . Величина γ_{0k} обязана удовлетворять уравнению $[0k; \lambda^3]$, а также координатному условию [с.с.; λ^3].

Интегрируем уравнение $[0k; \lambda^3]$ по сфере малого диаметра с центром в точке расположения частицы-сингулярности, получаем условие разрешимости этого уравнения

$$\dot{m} = 0. \quad (15)$$

Искомым решением, удовлетворяющим требованиям, аналогичным перечисленным при нахождении $\frac{\gamma_{00}}{2}$, является

$$\gamma_{0k} = 2 \frac{m(s_{kl}x_l)}{r^3}. \quad (16)$$

3.3. Нахождение γ_{mn} . Величина γ_{mn} обязана удовлетворять уравнению $[mn; \lambda^4]$, а также координатному условию [с.с.; λ^4].

Интегрируем уравнение $[mn; \lambda^4]$ по сфере малого радиуса с центром в точке расположения частицы-сингулярности. Если ξ_k – координата точки размещения частицы, то получаемое условие имеет тривиальный вид

$$\ddot{\xi}_k = 0, \quad (17)$$

т.е. частица должна двигаться без ускорения. Поскольку рассматривается стационарная задача, то частица должна быть неподвижной.

Уравнению $[mn; \lambda^4]$ и условию [с.с.; λ^4] удовлетворяет следующая функция:

$$\bar{\gamma}_{mn} = 2 \frac{m \dot{s}_{mn}}{r}. \quad (18)$$

В рамках аксиоматики риманова пространства метрический тензор должен быть симметричным. Из этого требования и из соотношения (18) следует, что в конструируемом решении должно быть

$$\dot{s}_{mn} = 0. \quad (19)$$

Соотношения (19) представляют собой не что иное, как уравнения движения собственного момента частицы в низшем порядке малости.

С учетом (19) результирующее выражение для γ_{mn} имеет вид

$$\gamma_{mn} = \frac{m^2}{r^2} \frac{x_m x_n}{r^2} - 2 \frac{m^2}{r^2} \delta_{mn} + C(a_{m,n} + a_{n,m} - \delta_{mn} a_{l,l}). \quad (20)$$

Здесь C – числовой множитель, а вектор a_k сконструирован из параметров (5) и текущей координаты, имеет четвертый порядок малости и удовлетворяет уравнению

$$a_{k,4l} = 0. \quad (21)$$

Такой вектор существует и имеет вид

$$a_k = \frac{m(s_l x_l) s_k}{r^3}. \quad (22)$$

Таким образом, решение (20) определено с точностью до преобразования (см. приложение 4)

$$\gamma_{mn} = \gamma_{4mn}^* = \gamma_{4mn} + a_{4m,n} + a_{4n,m} - \delta_{mn} a_{4l,l}. \quad (23)$$

Неоднозначность выбора гармонической системы координат, о которой говорилось в п. 2.3, позволяет обратить в нуль добавку в γ_{mn} , связанную с a_k . Однако это преобразование влияет на другие искомые величины.

3.4. Нахождение γ_{00} . Величина γ_{00} обязана удовлетворять уравнению $[00; \lambda^4]$. Координатные условия не накладывают на γ_{00} никаких ограничений.

Искомое решение имеет вид

$$\gamma_{00} = \frac{m^2}{r^2} + D \left(\frac{m(s_l x_l)^2}{r^5} - \frac{m(s_l s_l)}{3r^3} \right), \quad (24)$$

где D – произвольная константа. Неопределенность функции γ_{00} может быть представлена в виде

$$\gamma_{00} \rightarrow \gamma_{400}^* = \gamma_{400} + a_{4l,l}, \quad (25)$$

где a_k имеет такой же вид, что и (22). Учитывая правила преобразования функции γ_{00} при переходе от одной гармонической системы координат к другой (см. п. 2.3), часть γ_{00} , содержащая константу D , может быть изменена, например, обращена в нуль. Однако за счет перебора гармонической системы координат с помощью вектора a_k невозможно привести к заданному виду член с этим вектором сразу и в функции γ_{mn} , и в функции γ_{00} . Таким образом, процедура восстановления решения Керра методом ЭИГ содержит произвол в виде двух констант перед членами, содержащими вектор a_k . Одна из констант без ограничения общности может быть положена равной нулю. Другая константа в методе ЭИГ не может быть определена.

3.5. Нахождение γ_{0k} . Функция γ_{0k} обязана удовлетворять уравнению $[0k; \lambda^5]$ и координатному условию $[\text{с.с.}; \lambda^5]$.

Прямое вычисление показывает, что поверхностный интеграл от уравнения $[0k; \lambda^5]$ тождественно равен нулю (поверхностные интегралы вычисляются стандартным образом, поэтому соответствующая техника здесь подробно не описывается), т.е. условия разрешимости этого уравнения отсутствуют.

Решение уравнения для γ_{0k} приводит к следующему результату:

$$\gamma_{0k} = -2 \frac{m^2(s_{kl}x_l)}{r^4} + E \left[-5 \frac{m(s_{kc}x_c)(s_ax_a)(s_bx_b)}{r^7} + \frac{m(s_{ka}x_a)}{r^5}(s_as_a) \right], \quad (26)$$

где через E обозначен произвольный числовой множитель.

Множитель E стоит перед функцией, являющейся гармонической и имеющей нулевую дивергенцию. Эта функция в принципе не может быть представлена в виде $a_{50,k} + a_{4k,0}$, т.е. не может быть сведена к неопределенности, связанной с неоднозначностью определения гармонической системы координат.

4. РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ КЕРРА

4.1. Метод нахождения разложений. При нахождении разложений величин $\gamma_{\alpha\beta}$, соответствующих решению Керра в гармонических координатах, возникают трудности двух типов.

Во-первых, это громоздкость выражений для этих величин. Заметим, что в приложении 1 приведены не сами величины $\gamma_{\alpha\beta}$, а компоненты тензора $g^{\alpha\beta}$. Для нахождения $\gamma_{\alpha\beta}$ необходимо сначала по известному тензору $g^{\alpha\beta}$ найти обратный к нему тензор $g_{\alpha\beta}$, а затем воспользоваться формулой

$$\gamma_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu}(g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})). \quad (27)$$

Нахождение компонент метрики с нижними индексами $g_{\alpha\beta}$, а также компонент величин $\gamma_{\alpha\beta}$ по приведенным выше компонентам метрики $g^{\alpha\beta}$ не представляет принципиальных трудностей. Для этого может быть использована, например, компьютерная система Mathematica 4.

Во-вторых, это необходимость перехода в полученном по формуле (27) выражении для $\gamma_{\alpha\beta}$ от функций $(\tilde{t}, \tilde{\varphi}, \tilde{r}, \tilde{\theta})$, использованных в приложении 1, к гармоническим координатам

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, x, y, z) \leftrightarrow (x^0, \varphi, r, \theta). \quad (28)$$

Связь между функциями $(\tilde{t}, \tilde{\varphi}, \tilde{r}, \tilde{\theta})$ и координатами (28) определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= x^0 + \tilde{r} + m \ln(\Delta) + \frac{2m^2}{\sqrt{a^2 - m^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{r} - m}{\sqrt{a^2 - m^2}}\right), \\ \cos \tilde{\theta} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{r^2}{2a^2} \sqrt{1 - 2\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^4}{r^4} + 4\frac{a^2 z^2}{r^4}}}, \\ \operatorname{tg} \tilde{\theta} &= \frac{y}{x}, \\ \tilde{r} &= m + r \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2\frac{a^2}{r^2} + \frac{a^4}{r^4} + 4\frac{a^2 z^2}{r^4}}}.\end{aligned}\tag{29}$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: $\Delta \equiv \tilde{r}^2 - 2m\tilde{r} + a^2$, $\rho^2 \equiv \tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \tilde{\theta}$; m и a – величины, введенные в п. 2.2.

Вторая из указанных трудностей преодолевается следующим образом. Сначала проводится разложение величин $\gamma_{\alpha\beta}$ по параметрам $m/\tilde{r}$, $a/\tilde{r}$, а затем используется связь между радиусами r и $\tilde{r}$ для преобразования разложения к параметрам $u = m/r$, $\nu = a/r$. Главные члены разложения могут быть найдены сравнительно просто. С повышением порядка приближения задача разложения усложняется. Для нахождения разложений в данной работе использовалась компьютерная система Mathematica 4.

Связь между r и $\tilde{r}$ имеет вид:

$$\tilde{r} = m + \sqrt{r^2 - a^2 \sin^2 \tilde{\theta}},\tag{30}$$

откуда следует

$$\frac{m}{\tilde{r}} = u \left\{ 1 - u + \frac{1}{2} \nu^2 \sin^2 \tilde{\theta} + u^2 - u\nu^2 \sin^2 \tilde{\theta} + \frac{3}{8} \nu^4 \sin^4 \tilde{\theta} + \dots \right\},\tag{31}$$

$$\frac{a}{\tilde{r}} = \nu \left\{ 1 - u + \frac{1}{2} \nu^2 \sin^2 \tilde{\theta} + u^2 - u\nu^2 \sin^2 \tilde{\theta} + \frac{3}{8} \nu^4 \sin^4 \tilde{\theta} + \dots \right\}.\tag{32}$$

Прежде чем выписывать разложения величин $\gamma_{\alpha\beta}$, обратим внимание на то, что углы θ и $\tilde{\theta}$ не тождественны друг другу. Полярный угол θ в гармонической системе координат определяется с помощью соотношения $\cos \theta = z/r$, он связан с углом $\tilde{\theta}$ соотношением

$$\cos^2 \tilde{\theta} = \cos^2 \theta \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta + \dots \right].\tag{33}$$

4.2. Явный вид разложений. Приведем в явном виде только главные члены разложений величин $\gamma_{\alpha\beta}$ по параметрам малости (5). Связь декартовых гармонических координат со сферическими гармоническими имеет стандартный вид:

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta.\tag{34}$$

Выражения для γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} выписываем с точностью до членов λ^4 , λ^5 , λ^5 порядков приближения, соответственно:

$$\gamma_{00} = 4u - (1 + 3 \cos(2\theta))\nu^2 u + u^2 + \dots, \quad (35)$$

$$\gamma_{01} = 2 \sin \theta \sin \varphi \cdot \nu u - (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \sin \varphi \cdot \nu^3 u - 2 \sin \theta \sin \varphi \cdot \nu u^2 + \dots, \quad (36)$$

$$\gamma_{02} = -2 \sin \theta \cos \varphi \cdot \nu u + (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \cos \varphi \cdot \nu^3 u + 2 \sin \theta \cos \varphi \cdot \nu u^2 + \dots, \quad (37)$$

$$\gamma_{03} = 0, \quad (38)$$

$$\gamma_{11} = [\sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 2]u^2 + \sin^2 \theta \sin(2\varphi) \cdot \nu u^2 + \dots, \quad (39)$$

$$\gamma_{12} = \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \cdot u^2 - \sin^2 \theta \cos(2\varphi) \cdot \nu u^2 + \dots, \quad (40)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \cos \varphi \cdot u^2 + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \sin \varphi \cdot \nu u^2 + \dots, \quad (41)$$

$$\gamma_{22} = [\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - 2]u^2 - \sin^2 \theta \sin(2\varphi) \cdot \nu u^2 + \dots, \quad (42)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \sin \varphi \cdot u^2 - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \cos \varphi \cdot \nu u^2 + \dots, \quad (43)$$

$$\gamma_{33} = [\cos^2 \theta - 2]u^2 + \dots. \quad (44)$$

4.3. Разложения величин $\gamma_{\alpha\beta}$ в декартовых координатах. Тензор собственного углового момента, приведенного к единичной массе, s_{mn} имеет в АСС-задаче только одну отличную от нуля компоненту s_{12} , значение которой совпадает с введенной выше величиной a . Таким образом,

$$s_{12} = a, \quad s_{23} = s_{31} = 0, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = a. \quad (45)$$

Аксиальный вектор момента s_k связан с тензором s_{mn} стандартным соотношением

$$s_{mn} = \varepsilon_{mnk} s_k, \quad s_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kab} s_{ab}, \quad s_3 = a. \quad (46)$$

Из (45), (46) следует, что имеют место соотношения

$$1 = \frac{(s_c s_c)}{a^2}, \quad (47)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{(s_a x_a)(s_b x_b)}{a^2 r^2}. \quad (48)$$

Выражение (35) для γ_{00} в декартовых координатах записывается в виде

$$\gamma_{00} = 4u + u^2 - 6 \frac{s_a s_b}{a^2} \left(\frac{x_a x_b}{r^2} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \right) \nu^2 u + \dots = 4 \frac{m}{r} + \frac{m^2}{r^2} - 6 \frac{m}{r^3} s_a s_b \left(\frac{x_a x_b}{r^2} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \right) + \dots, \quad (49)$$

а выражения (36)–(38) для γ_{01} , γ_{02} , γ_{03} – в виде

$$\gamma_{0k} = 2 \frac{m(s_{ka} x_a)}{r^3} - 2 \frac{m^2(s_{ka} x_a)}{r^4} - 5 \frac{m(s_{kc} x_c)(s_a x_a)(s_b x_b)}{r^7} + \frac{m(s_{ka} x_a)}{r^5} (s_a s_a) + \dots. \quad (50)$$

Выражения (39)–(43) для $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ в декартовых координатах имеют вид

$$\gamma_{mn} = \frac{m^2 x_m x_n}{r^4} - 2 \frac{m^2}{r^2} \delta_{mn} + \frac{m[(s_{mc} x_c) x_n + (s_{nc} x_c) x_m]}{r^5} + \dots \quad (51)$$

При обращении в нуль величины s_{mn} выражения (49)–(51) переходят в разложения решения Шварцшильда.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, в данный момент мы имеем разложения решения Керра в гармонических координатах (формулы (49)–(51)) и аналогичные выражения, полученные методом ЭИГ при использовании координатных условий де Дондера (формулы (13), (16), (20), (24), (26)). Сравнение соответствующих приближенных частей решения показывает, что для возможности использования метода ЭИГ для построения решения Керра необходимо:

- 1) внести извне информацию о существовании параметров малости m/r , a/r ;
- 2) внести извне информацию о порядках малости указанных параметров, т.е. о том, что параметр m/r имеет второй порядок малости, а a/r – первый, а также ввести правило, согласно которому при дифференцировании функции по x^0 ее порядок малости увеличивается на единицу;
- 3) произвести нормировку тех функций, в которых величины m и a встречаются впервые (т.е. функций γ_{00} и γ_{0k}), на соответствующие выражения в разложении решения Керра.

После выполнения перечисленных пунктов метод ЭИГ позволяет найти все типы слагаемых, входящих в $\gamma_{00}, \gamma_{0k}, \gamma_{mn}$ в низших порядках разложения. Типы слагаемых однозначно определяются требованиями к их конструкции: быть безразмерными, конструироваться только из введенных параметров малости и текущих координат, иметь нужный порядок малости, исчезать на бесконечности и т.п.

Часть указанных слагаемых при этом определяется однозначно. Например, в величине γ_{mn} однозначно определяется часть, имеющая вид (20). Однако имеется категория слагаемых, множители перед которыми методом ЭИГ не могут быть установлены. В величине γ_{mn} к этой категории слагаемых относится неопределенность, указанная в преобразовании (23). Слагаемые из этой категории представляют собой гармонические функции и имеют (при наличии векторного индекса) нулевую дивергенцию. Этот факт отражает по существу ограниченность возможностей метода ЭИГ, которую необходимо иметь в виду при использовании его для решения задач, точные решения которых не известны.

В таблице представлена более подробная информация по вопросу о том, что мы понимаем, когда говорим об ограниченности метода ЭИГ.

Произвол в методе ЭИГ, указанный в таблице, приводит к вопросу: нельзя ли воспользоваться известным принципом “сущности не следует умножать без необходимости” (принцип “бритвы Оккама”) для того, чтобы занулить все неопределяемые множители? Сравнение приближенного решения с разложением точного показывает, что пользоваться этим принципом недопустимо. Иной ассортимент коэффициентов, отличный от

ТАБЛИЦА

Перечень множителей, не определяемых методом ЭИГ

Функция	Член в функции, множитель при котором не определяется методом ЭИГ	Множитель, следующий из точного решения в гармонической системе координат
γ_{00}^2	$\frac{m}{r}$	4
γ_{0k}^3	$\frac{m(s_{kl}x_l)}{r^3}$	2
γ_{mn}^4	$\frac{m(s_{ml}x_l)(s_{nl}x_l)}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{m(s_{mp}s_{np})}{r^3}$	0
γ_{00}^4	$\frac{m(s_lx_l)^2}{r^5} - \frac{1}{3} \frac{m(s_l s_l)}{r^3}$	−6
γ_{0k}^5	$\frac{m(s_{kl}x_l)(s_lx_l)^2}{r^7} - \frac{1}{5} \frac{m(s_{kl}x_l)(s_p s_p)}{r^5}$	−5
γ_{mn}^5	$\frac{m^2[(s_{ml}x_l)x_n + (s_{nl}x_l)x_m]}{r^5}$	1

указанного в таблице, приведет к выражению, являющемуся решением уравнений метода ЭИГ, но не являющемуся решением уравнений ОТО, т.е. решением Керра.

Единственная возможность изменить множители и получить решение, эквивалентное решению Керра в гармонических координатах, — это воспользоваться произволом в определении самой гармонической системы координат, о котором говорилось при обсуждении неопределенности в величине γ_{mn}^4 вида (23) и в величине γ_{00}^4 вида (25). Однако, изменяя множитель в одной из величин, мы в соответствии с правилами преобразования приложения 4 обязаны изменить одновременно множители в других величинах. В результате оказывается, что, занулив множитель в одной из величин, мы неизбежно столкнемся с появлением новых множителей в других.

Таким образом, попытка решить методом ЭИГ АСС-задачу в случае, если бы решение Керра не было известно, привела бы нас к получению целого семейства решений. В функциях γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} всех полученных решений заведомо содержалось бы некоторое количество одинаковых членов. Различие между решениями проявлялось бы в том, что в функции γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} входили бы слагаемые, перечисленные в таблице, с различными числовыми множителями. Среди полученных решений содержалось бы и разложение решения Керра. Однако внутри метода ЭИГ нет алгоритма однозначного выбора “истинного” решения среди всех возможных приближенных конструкций.

Ситуация с соотношением между точным решением Керра и его аппроксимациями, описанная выше, по-видимому, не является уникальной. Скорее всего, аналогичная ситуация встречается и при поиске аппроксимаций точных решений других систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Формулы (35)–(44) имеют самостоятельную ценность, поскольку представляют со-

бой разложения величин $\gamma_{\alpha\beta}$ для решения Керра вплоть до шестого по λ порядка малости. Эти формулы (или эквивалентные им) должны использоваться для нормировки получаемых методом ЭИГ в гармонических координатах выражений для величин $\gamma_{\alpha\beta}$ в задачах двух или более точечных тел. Без такой нормировки невозможно получить правильные уравнения поступательного движения и уравнения для эволюции собственных моментов точечных тел в ПН-приближении. К этим формулам должны сводиться выражения для $\gamma_{\alpha\beta}$, если начало координат совместить с каким-нибудь телом, остальные тела удалить на бесконечность и использовать те же координатные условия, что и при разложении решения Керра. Предварительный анализ показывает, что по этому критерию могут оказаться некорректными некоторые из работ, в которых выводятся указанные выше динамические уравнения. Приведем два примера.

ПРИМЕР 1. В монографии [7] (глава 7) приведено выражение для ds^2 для одного вращающегося тела (формула (42)), в котором выписаны члены $\sim \lambda^4$. Выражение относится к гармонической системе, но не совпадает с выражением, следующим из раздела 4.3 данной работы. В частности, в выражении для γ_{mn} , которое следует из указанной формулы [7], отсутствуют члены $m^2 x_m x_n / r^4$, которые получаются при строгом разложении решения Керра (формула (51) данной работы). Члены такого типа не могут быть изменены малым координатным преобразованием, сохраняющим гармоничность системы.

ПРИМЕР 2. Ни в одной работе по проблеме получения динамических уравнений для системы вращающихся тел мы не нашли указания на то, что в разложениях γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} содержатся члены $\gamma_{00}^{(5)}$, $\gamma_{0k}^{(6)}$, $\gamma_{mn}^{(5)}$. Эти члены не влияют на уравнения поступательного движения тел в ПН-приближении, однако они должны присутствовать в тех случаях, когда выписываются выражения для компонент метрики до порядка λ^6 , и необходимы при рассмотрении задач в пост-ПН-приближении.

В ряде других работ (например, [8]) уравнения движения частиц в ПН-приближении получаются по методу Фока, при котором не требуется знание $\gamma_{0k}^{(5)}$. В порядке λ^4 добавки к компонентам метрики совпадают с приведенными в данной работе разложениями. Однако модельные представления, привносимые извне и используемые при выводе динамического уравнения для собственных моментов методом Фока, не гарантируют правильности этого уравнения. Данный вопрос выходит за рамки настоящей работы и будет рассмотрен позднее.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Решение Керра в гармонических координатах

В этом приложении приводится выражение для метрического тензора $g^{\alpha\beta}(x)$ решения Керра в гармонических координатах. Однако записано оно в терминах функций $(\tilde{t}, \tilde{\varphi}, \tilde{r}, \tilde{\theta})$, связанных с гармоническими координатами

$$\{x^\alpha\} \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, x, y, z) \leftrightarrow (x^0, \varphi, r, \theta)$$

соотношениями (29).

$$\begin{aligned}
 g^{00} &= \frac{-(a^2 + \tilde{r}^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \tilde{\theta}}{\Delta \rho^2}, \\
 g^{01} &= \frac{2am\tilde{r} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi}}{\Delta \rho^2} \sqrt{\Delta + m^2}, \\
 g^{02} &= \frac{2am\tilde{r} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}}{\Delta \rho^2} \sqrt{\Delta + m^2}, \\
 g^{03} &= 0, \\
 g^{11} &= \frac{1}{2\rho^2(\Delta + m^2)} \{ 2(\Delta + m^2)^2 \cos^2 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\varphi} + \\
 &\quad + 2\Delta(\tilde{r} - m)^2 \sin^2 \tilde{\theta} \cos^2 \tilde{\varphi} + 2am^2(\tilde{r} - m) \sin^2 \tilde{\theta} \sin 2\tilde{\varphi} + \\
 &\quad + [a^2(\Delta + 2m^2) \cos 2\tilde{\theta} + a^4 + 2(\tilde{r} - m)^4 + a^2(2m^2 - 6m\tilde{r} + 3\tilde{r}^2)] \sin^2 \tilde{\varphi} \}, \\
 g^{12} &= -\frac{m^2 \sin^2 \tilde{\theta}}{2\rho^2(\Delta + m^2)} [-2a(\tilde{r} - m) \cos 2\tilde{\varphi} + ((\tilde{r} - m)^2 - a^2) \sin 2\tilde{\varphi}], \\
 g^{13} &= -\frac{m^2 \sin^2 \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta}}{\rho^2 \sqrt{\Delta + m^2}} [(\tilde{r} - m) \cos \tilde{\varphi} + a \sin \tilde{\varphi}], \\
 g^{22} &= \frac{1}{2\rho^2(\Delta + m^2)} \{ 2(\Delta + m^2)^2 \cos^2 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\varphi} + 2\Delta(\tilde{r} - m)^2 \sin^2 \tilde{\theta} \sin^2 \tilde{\varphi} + \\
 &\quad + 2am^2(\tilde{r} - m) \sin^2 \tilde{\theta} \sin 2\tilde{\varphi} + \\
 &\quad + [a^2(\Delta + 2m^2) \cos 2\tilde{\theta} + a^4 + 2(\tilde{r} - m)^4 + a^2(2m^2 - 6m\tilde{r} + 3\tilde{r}^2)] \cos^2 \tilde{\varphi} \}, \\
 g^{23} &= -\frac{m^2 \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} [(\tilde{r} - m) \sin \tilde{\varphi} - a \cos \tilde{\varphi}]}{\rho^2 \sqrt{\Delta + m^2}}, \\
 g^{33} &= \frac{a^2 + m^2 - 4m\tilde{r} + 2\tilde{r}^2 + (a^2 - m^2) \cos 2\tilde{\theta}}{2\rho^2}.
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уравнения Эйнштейна

Уравнения

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(\eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = 0 \quad (52)$$

при расстановке порядков малости в соответствии с (8) и оценке производных по времени в соответствии с (7) приводят к следующим уравнениям:

$$[00; \lambda^2] : \quad -\frac{1}{2}(\Delta \gamma_{00}) = 0, \quad (53)$$

$$[0k; \lambda^3] : \quad -\frac{1}{2}(\Delta \gamma_{0k}) + \frac{1}{2}(-\gamma_{00,0} + \gamma_{0s,s})_{,k} = 0, \quad (54)$$

$$[mn; \lambda^4] : \quad \frac{1}{2} \left\{ (-\gamma_{0m,0n} + \gamma_{ms,sn}) + (-\gamma_{0n,0m} + \gamma_{ns,sm}) - \Delta \gamma_{mn} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_{mn}(\gamma_{00,00}^{00,00} - 2\gamma_{0s,0s}^{00,00} + \gamma_{pq,pq}^{00,00})\} + \frac{1}{4}\gamma_{00}^{00}\gamma_{00,mn}^{00,00} + \\
& + \frac{1}{8}\gamma_{00,m}^{00,00}\gamma_{00,n}^{00,00} - \frac{1}{8}\delta_{mn}\gamma_{00}^{00}(\Delta\gamma_{00}^{00}) - \frac{3}{16}\delta_{mn}\gamma_{00,s}^{00,00}\gamma_{00,s}^{00,00} = 0,
\end{aligned} \tag{55}$$

$$[00; \lambda^4] : -\frac{1}{2}\Delta\gamma_{00}^{00} + \frac{1}{2}\gamma_{pq,pq}^{00,00} + \frac{3}{16}\gamma_{00,s}^{00,00}\gamma_{00,s}^{00,00} + \frac{3}{8}\gamma_{00}^{00}(\Delta\gamma_{00}^{00}) = 0, \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
[0k; \lambda^5] : & \frac{1}{2}\left\{-\Delta\gamma_{0k}^{00} + (-\gamma_{00,0k}^{00,00} + \gamma_{0s,sk}^{00,00}) + \gamma_{ks,0s}^{00,00}\right\} + \frac{1}{4}\gamma_{00}^{00}(\Delta\gamma_{0k}^{00}) - \\
& - \frac{1}{4}\gamma_{00}^{00}(-\gamma_{00,0}^{00,00} + \gamma_{0s,s}^{00,00})_{,k} + \frac{3}{8}\gamma_{00,0}^{00,00}\gamma_{00,k}^{00,00} + \\
& + \frac{1}{4}\gamma_{00,k}^{00,00}(-\gamma_{00,0}^{00,00} + \gamma_{0s,s}^{00,00}) - \frac{1}{4}\gamma_{00,s}^{00,00}\gamma_{0s,k}^{00,00} + \frac{1}{4}\gamma_{00,ks}^{00,00}\gamma_{0s}^{00,00} = 0,
\end{aligned} \tag{57}$$

$$[mn; \lambda^5] : \frac{1}{2}\left\{\gamma_{ms,sn}^{00,00} + \gamma_{ns,sm}^{00,00} - \gamma_{mn,ss}^{00,00} - \delta_{mn}\gamma_{pq,pq}^{00,00}\right\} = 0. \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
[mn; \lambda^6] : & \frac{1}{2}\left\{(-\gamma_{0m,0n}^{00,00} + \gamma_{ms,sn}^{00,00}) + (-\gamma_{0n,0m}^{00,00} + \gamma_{ns,sm}^{00,00}) + \right. \\
& + \gamma_{mn,00}^{00,00} - \Delta\gamma_{mn}^{00} - \delta_{mn}(\gamma_{00,00}^{00,00} - 2\gamma_{0s,0s}^{00,00} + \gamma_{pq,pq}^{00,00})\} + \\
& + \frac{1}{4}\gamma_{00,0}^{00,00}(\gamma_{0m,n}^{00,00} + \gamma_{0n,m}^{00,00}) + \\
& + \frac{1}{2}(-\gamma_{00,0}^{00,00} + \gamma_{0s,s}^{00,00})(\gamma_{0m,n}^{00,00} + \gamma_{0n,m}^{00,00}) - \\
& - \frac{1}{4}(-\gamma_{0m,0}^{00,00} + \gamma_{ms,s}^{00,00})\gamma_{00,n}^{00,00} - \\
& - \frac{1}{4}(-\gamma_{0n,0}^{00,00} + \gamma_{ns,s}^{00,00})\gamma_{00,m}^{00,00} + \frac{1}{8}(\gamma_{00,m}^{00,00}\gamma_{00,n}^{00,00} + \gamma_{00,m}^{00,00}\gamma_{00,n}^{00,00}) - \\
& - \frac{1}{2}\gamma_{0m,s}^{00,00}\gamma_{0n,s}^{00,00} - \frac{1}{2}\gamma_{0s,m}^{00,00}\gamma_{0s,n}^{00,00} - \frac{1}{4}\gamma_{00,s}^{00,00}(\gamma_{ms,n}^{00,00} + \gamma_{ns,m}^{00,00}) + \\
& + \frac{1}{8}(\gamma_{00,m}^{00,00}\gamma_{0l,n}^{00,00} + \gamma_{00,n}^{00,00}\gamma_{0l,m}^{00,00}) + \frac{1}{2}\gamma_{00,s}^{00,00}\gamma_{mn,s}^{00,00} + \frac{1}{4}\gamma_{00}^{00}\gamma_{mn,ss}^{00,00} + \\
& + \frac{1}{4}(\gamma_{00}^{00}\gamma_{00,mn}^{00,00} + \gamma_{00}^{00}\gamma_{00,mn}^{00,00}) + \frac{1}{4}\gamma_{00}^{00}\gamma_{0l,mn}^{00,00} + \frac{1}{4}\gamma_{0l}^{00}\gamma_{00,mn}^{00,00} - \\
& - \frac{1}{4}\gamma_{00}^{00}(-\gamma_{0m,0n}^{00,00} + \gamma_{ms,sn}^{00,00} - \gamma_{0n,0m}^{00,00} + \gamma_{ns,sm}^{00,00}) - \\
& - \frac{1}{2}\gamma_{00}^{00}(\gamma_{0m,0n}^{00,00} + \gamma_{0n,0m}^{00,00}) - \gamma_{0s}^{00}\gamma_{0s,mn}^{00,00} + \\
& + \frac{1}{2}\gamma_{0s}^{00}(\gamma_{0m,ns}^{00,00} + \gamma_{0n,ms}^{00,00}) + \\
& + \frac{1}{4}(\gamma_{0m}^{00}\gamma_{00,n0}^{00,00} + \gamma_{0n}^{00}\gamma_{00,m0}^{00,00}) - \frac{1}{4}(\gamma_{ms}^{00}\gamma_{00,ns}^{00,00} + \gamma_{ns}^{00}\gamma_{00,ms}^{00,00}) + \\
& + \delta_{mn}\left\{-\frac{1}{16}\gamma_{00,0}^{00,00}\gamma_{00,0}^{00,00} + \frac{1}{2}\gamma_{0s,s}^{00,00}(\gamma_{00,0}^{00,00} - \gamma_{0s,s}^{00,00}) - \frac{3}{8}\gamma_{00,s}^{00,00}\gamma_{00,s}^{00,00} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8} \gamma_{00,s}^2 \gamma_{ll,s} + \frac{1}{2} \gamma_{00,s}^2 \gamma_{sl,l} + \frac{3}{4} \gamma_{0p,q}^2 \gamma_{0p,q} - \frac{1}{4} \gamma_{0p,q}^2 \gamma_{0q,p} + \\
& + \frac{1}{4} \gamma_{00}^2 (\gamma_{00,00}^2 - 2\gamma_{0s,s}^2 + \gamma_{pq,pq}) - \frac{1}{8} \gamma_{00}^2 \gamma_{00,00}^2 - \frac{1}{8} \gamma_{00}^2 (\Delta \gamma_{00}) - \\
& - \frac{1}{8} \gamma_{00}^2 (\Delta \gamma_{00}) - \frac{1}{8} \gamma_{00}^2 (\Delta \gamma_{ll}) - \frac{1}{8} \gamma_{ll}^2 (\Delta \gamma_{00}) + \frac{1}{2} \gamma_{00}^2 \gamma_{0s,s}^2 + \\
& + \frac{1}{2} \gamma_{0s}^2 (\Delta \gamma_{0s}) - \frac{1}{2} \gamma_{0s}^2 \gamma_{0l,ls} + \frac{1}{4} \gamma_{pq}^2 \gamma_{00,pq} \Big\} - \\
& - \frac{1}{8} \gamma_{00}^2 \gamma_{00,m}^2 \gamma_{00,n}^2 + \frac{1}{8} \delta_{mn} \gamma_{00}^2 \gamma_{00,s}^2 \gamma_{00,s}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{59}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Гармонические координатные условия

Условия де Дондера (10) при расстановке порядков малости (8) и оценке производных по времени в соответствии с (7) принимают следующий вид:

$$[\text{с.с.}; \lambda^3]: \quad \gamma_{0l,l} = \gamma_{00,0}^2, \tag{60}$$

$$[\text{с.с.}; \lambda^4]: \quad \gamma_{kl,l} = \gamma_{0k,0}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{00}^2 \gamma_{00,k}^2, \tag{61}$$

$$[\text{с.с.}; 0k; \lambda^5]: \quad \gamma_{0l,l} = \gamma_{00,0}^2 - \frac{1}{2} \gamma_{0p}^2 \gamma_{00,p}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{00}^2 \gamma_{00,0}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{00}^2 \gamma_{0s,s}^2, \tag{62}$$

$$[\text{с.с.}; mn; \lambda^5]: \quad \gamma_{kl,l} = 0, \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
[\text{с.с.}; \lambda^6]: \quad \gamma_{kl,l} = & \gamma_{0k,0}^2 - \frac{1}{2} \gamma_{0k}^2 \gamma_{00,0}^2 - \frac{1}{3} \gamma_{0l}^2 \gamma_{0k,l}^2 + \frac{1}{3} \gamma_{0l}^2 \gamma_{0l,k}^2 + \\
& + \frac{1}{2} \gamma_{kl}^2 \gamma_{00,l}^2 - \frac{1}{2} \gamma_{00}^2 \gamma_{0k,0}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{00}^2 \gamma_{00,k}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{00}^2 \gamma_{00,k}^2 - \\
& - \frac{1}{4} \gamma_{00}^2 \gamma_{ll,k}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{ll}^2 \gamma_{00,k}^2 + \frac{1}{8} \gamma_{00}^2 \gamma_{00}^2 \gamma_{00,k}^2.
\end{aligned} \tag{64}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

η -преобразования

Если риманово пространство подвергается малому η^α -преобразованию, то в первом порядке по вектору η^α изменение метрики, называемое вариацией Ли, имеет вид:

$$\delta_\eta g_{\alpha\beta} = -\eta_{\alpha;\beta} - \eta_{\beta;\alpha}. \tag{65}$$

Вариация Ли величины $\gamma_{\alpha\beta}$ следует из (65) и определения $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\delta_n \gamma_{\alpha\beta} = +\eta_{\alpha;\beta} + \eta_{\beta;\alpha} - \eta_{\alpha\beta} \eta^\nu{}_{;\nu}. \tag{66}$$

Предположим, что временная компонента вектора η^α имеет пятый порядок малости, а пространственные компоненты – четвертый:

$$\eta^\alpha = (a_0, a_k) \equiv (a_0, a_k). \tag{67}$$

В терминах величин γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} и вектора a_α соотношения (65) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta_\eta \gamma_{00} &= a_{l,l}, \\ \delta_\eta \gamma_{0k} &= a_{0,k} + a_{l,0}, \\ \delta_\eta \gamma_{mn} &= a_{m,n} + a_{n,m} - \delta_{mn} a_{l,l}.\end{aligned}\tag{68}$$

Преобразования метрики вида (65) не влияют на получаемые методом ЭИГ уравнения движения частиц, если произведенные преобразования не изменяют расстановки порядков малости функций γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} . Применительно к линейным преобразованиям это было показано в работах [3], с учетом квадратичных по вектору η^α членов — в работе [9].

Что касается выражений для компонент метрики, то преобразования (65), конечно, меняют их вид. В определенной степени этими преобразованиями можно распорядиться так, чтобы привести функции γ_{00} , γ_{0k} , γ_{mn} к заданному виду. Это можно сделать в случае, если малый вектор a_α удовлетворяет уравнению (12), поскольку в этом случае изменение имеет такой характер, что оно может быть сведено к изменению, проистекающему от преобразования гармонических координат, сохраняющих их свойство гармоничности. Однако нельзя привести две или более функции к заданному виду, если произвол в их структуре зависит от одного вектора.

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за ценные замечания, сделанные им при рассмотрении первоначальной версии работы. Работа выполнена при частичной поддержке Международного научно-технического центра (проект KR-677).

Список литературы

- [1] *R. P. Kerr.* Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 237.
- [2] *А. А. Власов, А. А. Лозунов.* ТМФ. 1987. Т. 70. С. 171; *А. А. Лозунов, М. А. Мествиришвили.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [3] *A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann.* Ann. Math. 1938. V. 39. P. 65; *A. Einstein, L. Infeld.* Can. J. Math. 1949. V. 1. P. 209.
- [4] *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер.* Гравитация. М.: Мир, 1977; *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
- [5] *De Donder Th.* La Gravitique Einsteinienne. Paris: Gauthier-Villars, 1921.
- [6] *М. В. Горбатенко.* ТМФ. 1994. Т. 101. С. 123.
- [7] *В. А. Брумберг.* Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972.
- [8] *А. П. Рябушко.* Движение тел в общей теории относительности. Минск: Вышэйшая школа, 1979.
- [9] *М. В. Горбатенко.* ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 1996. Вып. 3. С. 74.

Поступила в редакцию 07.IV.2003 г.,
после доработки 19.VI.2003 г.