Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Р. Бикбов, С. К. Нечаев, Об оценке сверху мощности множества узлов, порожденных одномерными и двумерными косами, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 208–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf770>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:09:49

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА УЗЛОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ОДНОМЕРНЫМИ И ДВУМЕРНЫМИ КОСАМИ

Дана оценка сверху мощности множества $\Omega(n, \mu)$ узлов, порожденных замкнутыми одномерными и двумерными косами с n образующими неприводимой длины μ , в пределе $n \gg 1$, $\mu \gg 1$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наряду с такими традиционными проблемами топологии, как построение новых топологических инвариантов и изучение свойств расслоений и гомотопических классов, следует отметить ряд родственных, но гораздо менее изученных задач. Прежде всего имеются в виду проблемы, связанные с вычислением “энтропии узла”. В наиболее общем виде эта проблема может быть сформулирована следующим образом. Пусть есть решетка $\mathbb{Z}^3$, вложенная в пространство $\mathbb{R}^3$, и пусть Ω есть ансамбль всех возможных замкнутых самонепересекающихся траекторий из N шагов с одной фиксированной точкой на $\mathbb{Z}^3$. Обозначим через ω_N некоторую конкретную конфигурацию траектории. Проблема заключается в вычислении вероятности P_N того, что узел, образованный траекторией $\omega_N \in \Omega$, принадлежит некоторому гомотопическому классу, характеризующемуся топологическим инвариантом Inv , точным определением которого мы намеренно не интересуемся. Функция распределения $P\{\text{Inv}\}$ подчинена условию нормировки

$$\sum_{\text{все } \omega_N \in \Omega} P_N\{\text{Inv}\} = 1.$$

Настоящая статья посвящена статистической задаче определения мощности множеств $\Omega = \Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}$ узлов, порожденных замкнутыми одномерными и двумерными косами (точное определение дано ниже).

Задача, рассматриваемая в данной работе, связывает воедино две на первый взгляд совершенно различные проблемы, одна из которых имеет чисто топологический характер, а другая изучается в физической литературе на протяжении последних 20 лет. Речь

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

†LPTMS, Université Paris Sud, 91405 Orsay Cedex, France

идет о следующих проблемах. 1. До сих пор нет однозначного ответа на вопрос: всегда ли можно найти такую замкнутую косу из группы B_n с фиксированным n , что она будет изоморфна некоторому произвольно заданному узлу? Иными словами, порождает ли множество кос из группы B_n все множество узлов? 2. Каковы статистические свойства направленных связанных случайно ветвящихся кластеров (“directed lattice animals” [1]) с фиксированным числом частиц? Обе эти проблемы подробно с единой точки зрения обсуждены в работе [2]. Здесь же мы лишь отметим, что объектом, связывающим столь разные задачи, является так называемая локально свободная группа $\mathcal{LF}_n$ с n образующими, возникшая как естественная интерполяция между свободной группой с двумя образующими и группой кос B_n .

Структура статьи такова. В пп. 1.1 и 1.2 даются основные определения стандартных одномерных и двумерных групп кос и формулируются основные результаты. Раздел 2 посвящен оценке сверху мощности множеств $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, основанной на рассмотрении одномерных и двумерных локально свободных групп. В разделе 3 мы более детально обсуждаем результаты, следующие из нашего рассмотрения, и даем их геометрическую интерпретацию.

1.1. Основные определения. 1. Одномерная (“стандартная”) группа кос $B_{n+1}^{(1)}$ из $n+1$ нитей имеет n генераторов $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ и n обратных к ним $\{\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_n^{-1}\}$ (см. рис. 1а), для которых выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (1 \leq i < n), \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i & (|i - j| \geq 2), \\ \sigma_i \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} \sigma_i = e.\end{aligned}\tag{1}$$

2. Двумерная группа кос $B_{n+1}^{(2)}$ может быть определена следующим образом (см., например, [3, 4]). Рассмотрим решетку $\mathbb{Z}^2$ и выберем на ней различные точки $P_1, P_2, \dots, P_{n+1} \in \mathbb{Z}^2$. Двумерной косой из $n+1$ нитей, начинающихся в точках $\{P_1, P_2, \dots, P_{n+1}\}$, называются $n+1$ отображений $b_i: [1, N] \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $i = 1, \dots, n+1$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $b_i(1) = P_i$;
- 2) $b_i(t) \neq b_j(t) \forall i, j \in \{1, \dots, n+1\}, i \neq j; t \in [1, N]$.

Группой кос $B_{n+1}^{(2)}$ на $\mathbb{Z}^2$ с началом в $\{P_1, P_2, \dots, P_{n+1}\}$ называется группа гомотопических классов путей с началом в $\{P_1, P_2, \dots, P_{n+1}\}$. Группа $B_{n+1}^{(2)}$ имеет $2n^2$ генераторов $\{(\sigma_{11}^{(x)}, \sigma_{11}^{(y)}), \dots, (\sigma_{1n}^{(x)}, \sigma_{1n}^{(y)}); \dots; (\sigma_{n1}^{(x)}, \sigma_{n1}^{(y)}), \dots, (\sigma_{nn}^{(x)}, \sigma_{nn}^{(y)})\}$ и $2n^2$ обратных к ним (см. рис. 1б), удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\sigma_{i,j}^{(x)} \sigma_{i+1,j}^{(x)} \sigma_{i,j}^{(x)} &= \sigma_{i+1,j}^{(x)} \sigma_{i,j}^{(x)} \sigma_{i+1,j}^{(x)} & (1 \leq i, j \leq n), \\ \sigma_{i,j}^{(y)} \sigma_{i,j+1}^{(y)} \sigma_{i,j}^{(y)} &= \sigma_{i,j+1}^{(y)} \sigma_{i,j}^{(y)} \sigma_{i,j+1}^{(y)} & (1 \leq i, j \leq n), \\ \sigma_{i,j}^{(x)} \sigma_{i,j}^{(y)} \sigma_{i,j}^{(x)} &= \sigma_{i,j}^{(y)} \sigma_{i,j}^{(x)} \sigma_{i,j}^{(y)} & (1 \leq i, j \leq n), \\ \sigma_{i_1,j_1}^{(x)} \sigma_{i_2,j_2}^{(x)} &= \sigma_{i_2,j_2}^{(x)} \sigma_{i_1,j_1}^{(x)} & (|i_1 - i_2| > 1 \text{ или } |j_1 - j_2| > 0), \\ \sigma_{i_1,j_1}^{(x)} \sigma_{i_2,j_2}^{(y)} &= \sigma_{i_2,j_2}^{(y)} \sigma_{i_1,j_1}^{(x)} & (i_2 - i_1 \neq 0, 1 \text{ или } j_1 - j_2 \neq 0, 1), \\ \sigma_{i,j}^{(x)} (\sigma_{i,j}^{(x)})^{-1} &= \sigma_{i,j}^{(y)} (\sigma_{i,j}^{(y)})^{-1} = e.\end{aligned}\tag{2}$$

Рис. 1. Представления генератора одномерной группы кос δ_i (а) и генераторов двумерной группы кос $\delta_{i,j}^x$ и $\delta_{i,j}^y$ (б).

Группы кос $B_{n+1}^{(1)}$ и $B_{n+1}^{(2)}$ имеют следующие общие свойства.

- Произвольное слово из “букв”, т.е. генераторов групп $B_{n+1}^{(1)}$ или $B_{n+1}^{(2)}$, задает косу.
- *Длиной N косы* мы называем полное число использованных букв, а *минимальной неприводимой или примитивной длиной μ* — минимальную длину косы, которая может быть получена после применения всех коммутационных соотношений (1) или (2). Графически коса может быть представлена как набор нитей, идущих сверху вниз по мере добавления генераторов.

1.2. Основные результаты. Рассмотрим группы $B_{n+1}^{(1)}$ одномерных и $B_{n+1}^{(2)}$ двумерных кос. Каждая коса характеризуется примитивной длиной μ и представляется $n+1$ нитями. Тогда:

- Мощность $\#\Omega^{(1)}(n, \mu)$ множества узлов, порожденных стандартными косами данной неприводимой длины μ из группы $B_{n+1}^{(1)}$ ($n = \text{const} \gg 1$), в пределе $\mu \gg 1$ ограничена сверху:

$$\#\Omega^{(1)}(n, \mu) < \frac{32\pi^2}{\ln^4 2} \frac{2^n}{n^3} 7^{\mu-1}. \quad (3)$$

- Мощность $\#\Omega^{(2)}(n, \mu)$ множества узлов, порожденных двумерными косами данной примитивной длины μ из группы $B_{n+1}^{(2)}$ ($n = \text{const} \gg 1$), в пределе $\mu \gg 1$ ограничена сверху:

$$\#\Omega^{(2)}(n, \mu) < \frac{32n^2}{\pi^2} \left(\frac{2n}{\ln n} \right)^{\mu-1}. \quad (4)$$

Результаты (3) и (4) обсуждаются более детально в разделе 3.

2. КОМБИНАТОРИКА СЛОВ

Произвольная коса соответствует или узлу, или зацеплению. Это соответствие не взаимно однозначно, и каждый узел или зацепление может быть представлен бесконечным набором различных кос. Тем не менее мы можем оценить сверху величины $\#\Omega^{(1)}(n, \mu)$ и $\#\Omega^{(2)}(n, \mu)$ всех различных узлов, порожденных ансамблем всех одномерных и двумерных кос примитивной длины μ , используя следующий очевидный факт. *Величины $\#\Omega^{(1)}(n, \mu)$ и $\#\Omega^{(2)}(n, \mu)$ ограничены сверху числом всех различных слов примитивной длины μ в одномерных и двумерных группах кос, соответственно.* Ниже приведена оценка числа неэквивалентных слов в стандартной (одномерной) и двумерной группах кос.

2.1. Определение одномерной (стандартной) и двумерной локально свободных групп. 1. Следуя работе [5] в определении локальных групп и работе [6], где понятие локально свободной группы было впервые предложено в топологическом контексте, определим группу $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$, задав n генераторов группы $\{f_1, \dots, f_n\}$ и n обратных к ним $\{f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1}\}$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_j f_k &= f_k f_j \quad (|j - k| \geq 2), \\ f_i f_i^{-1} &= e. \end{aligned} \quad (5)$$

Мы называем такую группу одномерной *локально свободной группой*, так как каждая пара генераторов $(f_j, f_{j \pm 1})$ порождает свободную подгруппу группы $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$. Группа $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$ может быть получена из группы $B_{n+1}^{(1)}$ заменой групповых соотношений типа Янга–Бакстера свободными. Геометрическая интерпретация группы $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$ представлена на рис. 2а.

В математической литературе понятие, аналогичное локально свободной полугруппе $\mathcal{LF}_n^+$ (т.е. без обратных элементов), впервые появилось в работе [7], посвященной исследованию комбинаторных свойств перестановок последовательностей, известных как “частично коммутативные моноиды” (см. работу [8] и цитированную в ней литературу). Невозможность коммутировать образующие с соседними номерами имеет очень наглядную геометрическую интерпретацию. Рассмотрим плоский ящик из n ячеек и будем последовательно опускать в ячейки сверху клетки до их соприкосновения с уже лежащими клетками (на рис. 3а изображен ящик с $n = 3$, заполненный двумя клетками). Припишем клетке номер той ячейки, в которую она опущена. Возможность свободной

Рис. 2. Представления генератора одномерной локально свободной группы f_i (а) и генераторов двумерной локально свободной группы $f_{i,j}^x$ и $f_{i,j}^y$ (б).

перестановки клеток с номерами j и k при $|j - k| > 1$ означает коммутацию генераторов локально свободной полугруппы с соответствующими индексами, а невозможность перестановки клеток в соседних ячейках соответствует условию, что пара генераторов (f_j, f_{j+1}) образует подгруппу без соотношений (т.е. свободную).

2. Двумерная локально свободная группа $\mathcal{LF}_{n+1}^{(2)}$ имеет $2n^2$ генераторов $\{(f_{11}^{(x)}, f_{11}^{(y)}), \dots, (f_{1n}^{(x)}, f_{1n}^{(y)}); \dots; (f_{n1}^{(x)}, f_{n1}^{(y)}), \dots, (f_{nn}^{(x)}, f_{nn}^{(y)})\}$ и $2n^2$ обратных им, подчиняющихся следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f_{i_1, j_1}^{(x)} f_{i_2, j_2}^{(x)} &= f_{i_2, j_2}^{(x)} f_{i_1, j_1}^{(x)} & (|j_1 - j_2| > 0 \text{ или } |i_1 - i_2| > 1), \\ f_{i_1, j_1}^{(x)} f_{i_2, j_2}^{(y)} &= f_{i_2, j_2}^{(y)} f_{i_1, j_1}^{(x)} & (i_2 - i_1 \neq 0, 1 \text{ или } j_1 - j_2 \neq 0, 1), \\ f_{i, j}^{(x)} (f_{i, j}^{(x)})^{-1} &= f_{i, j}^{(y)} (f_{i, j}^{(y)})^{-1} = e. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, двумерная локально свободная группа $\mathcal{LF}_{n+1}^{(2)}$ может быть получена из двумерной группы кос $B_{n+1}^{(2)}$ заменой соотношений Янга–Бакстера для соседних генераторов условиями полной монодромии, т.е. соотношениями свободной группы (см. рис. 2б).

Двумерная локально свободная полугруппа имеет геометрическую интерпретацию, аналогичную описанной выше для стандартной локально свободной полугруппы. Разница заключается лишь в том, что мы опускаем клетки не в плоский ящик, а в ящик с

Рис. 3. Геометрическая интерпретация коммутационных соотношений одномерной локально свободной (полу)группы (а) и двумерной локально свободной (полу)группы (б).

основанием $n \times n$. На рис. 3б изображен ящик с основанием 3×3 , заполненный двумя плоскими клетками. В этом случае коммутационные соотношения (б) локально свободной группы (полугруппы) становятся очевидными.

Отметим следующие важные свойства одномерной и двумерной локально свободных групп.

1. По определению между генераторами локально свободных групп $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$ и $\mathcal{LF}_{n+1}^{(2)}$ имеется меньшее число коммутационных соотношений, чем для групп кос $B_{n+1}^{(1)}$ и $B_{n+1}^{(2)}$, соответственно. Таким образом, число различных слов примитивной длины μ в одномерной и двумерной группах кос ограничено сверху числом различных слов примитивной длины μ в одномерной и двумерной локально свободных группах.

2. По построению (ср. рис. 1 и 2) генераторы монодромии f_i ($i \in [1, n]$) группы $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$ и $f_{i,j}^{(x,y)}$ ($i, j \in [1, n]$) группы $\mathcal{LF}_{n+1}^{(2)}$ могут быть представлены как $f_i = (\sigma_i)^2$ ($i \in [1, n]$) и $f_{i,j}^{(x,y)} = (\sigma_{i,j}^{(x,y)})^2$ ($i, j \in [1, n]$), где σ_i и $\sigma_{i,j}^{(x,y)}$ – генераторы групп $B_{n+1}^{(1)}$

и $B_{n+1}^{(2)}$, соответственно. Таким образом, число различных слов примитивной длины 2μ в одномерной и двумерной группах кос ограничено снизу числом различных слов примитивной длины μ в одномерной и двумерной локально свободных группах.

2.2. Оценка числа неэквивалентных слов в одномерной и двумерной локально свободных группах. Ниже получены явные выражения для чисел $V^{(1)}(n, \mu)$ и $V^{(2)}(n, \mu)$ всех неэквивалентных примитивных слов длины μ в группах $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$ и $\mathcal{LF}_{n+1}^{(2)}$, соответственно. Наше рассмотрение основывается на представлении слов в нормальном порядке, предложенном Вершиком в [9] (см. также [6]).

Группа $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$. Будем представлять слово W_p неприводимой длины μ в группе $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$ в стандартном виде

$$W_p = (f_{\alpha_1})^{m_1} (f_{\alpha_2})^{m_2} \dots (f_{\alpha_s})^{m_s}, \quad (7)$$

где $\sum_{i=1}^s |m_i| = \mu$ ($m_i \neq 0 \forall i; 1 \leq s \leq \mu$) и последовательность различных генераторов f_{α_i} удовлетворяет следующим локальным правилам [6] (так называемому представлению в “нормальном порядке”):

- 1) если $f_{\alpha_i} = f_1$, то $f_{\alpha_{i+1}} = f_2$;
- 2) если $f_{\alpha_i} = f_k$ ($2 \leq k \leq n-1$), то $f_{\alpha_{i+1}} \in \{f_1, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}\}$;
- 3) если $f_{\alpha_i} = f_n$, то $f_{\alpha_{i+1}} \in \{f_1, \dots, f_{n-1}\}$.

Если последовательность генераторов примитивного слова W_p не удовлетворяет правилам 1–3, то, переставляя в нем генераторы согласно локальным коммутационным соотношениям, всегда можно получить последовательность, записанную в нормальном порядке. Таким образом, правила 1–3 дают возможность перенумеровать все различные примитивные слова в группе $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$. Обозначим через $\theta_n(m)$ число всех различных последовательностей из $m+1$ генераторов ($1 \leq m \leq \mu-1$), удовлетворяющих правилам 1–3. Число всех различных примитивных слов $V^{(1)}(n, \mu)$ данной неприводимой длины μ очевидным образом выражается через $\theta_n(m)$:

$$V^{(1)}(n, \mu) = \sum_{m=1}^{\mu-1} 2^{m+1} \binom{\mu-1}{m} \theta_n(m). \quad (8)$$

Комбинаторный множитель

$$2^{m+1} \binom{\mu-1}{m} \equiv 2^{m+1} \frac{(\mu-1)!}{(\mu-1-m)! m!}$$

в (8) представляет собой число всех различных примитивных слов длины μ , записанных в нормальном порядке для фиксированной последовательности из $m+1$ генераторов.

Наш подход к вычислению $\theta_n(m)$ основан на рассмотрении корреляционной функции $\theta_n(x, x_0, m)$, которая определяет число различных последовательностей из $m+1$ генераторов, удовлетворяющих правилам 1–3. Эти последовательности начинаются с f_{x_0} и

заканчиваются f_x . Для функции $\theta(x, m) \equiv \theta_n(x, x_0, m)$ нетрудно написать эволюционное уравнение (роль времени играет величина m)

$$\theta(x, m+1) = \theta(x-1, m) + \sum_{y=x+1}^n \theta(y, m). \quad (9)$$

Это уравнение должно быть дополнено начальным и граничными условиями, которые в пределе $n \gg 1$ предполагаются нами периодическими на отрезке $[0, n+1]$:

$$\begin{cases} \theta(x, 0) = \delta_{x, x_0}, \\ \theta(0, m) = \theta(n+1, m) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Переходя от (9) к локально-разностному уравнению, получаем следующую краевую задачу на отрезке $[0, n+1]$:

$$\begin{aligned} \theta(x+1, m+1) - \theta(x, m+1) &= \theta(x, m) - \theta(x-1, m) - \theta(x+1, m), \\ \theta(x, 0) &= \delta_{x_0, x}, \\ \theta(0, m) &= \theta(n+1, m) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Подстановка

$$\theta(x, m) = \sum_{k=1}^n A_k \lambda_k^m \alpha_k(x) \quad (12)$$

приводит (11) к разностному уравнению

$$\begin{aligned} (\lambda_k + 1)\alpha_k(x+1) - (\lambda_k + 1)\alpha_k(x) + \alpha_k(x-1) &= 0, \\ \alpha_k(0) &= \alpha_k(n+1) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

собственные значения и функции которого имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} - 1, \\ \alpha_k(x) &= \frac{\sin \frac{\pi k x}{n+1}}{\left(2 \cos \frac{\pi k}{n+1}\right)^x}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

Следствием несимметричности уравнения (13) является неортогональность его собственных функций. Для того чтобы избежать трудностей, связанных с удовлетворением начальным условиям, удобно перейти к симметричной задаче. Рассмотрим производящую функцию

$$Z(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} s^m \theta(x, m). \quad (15)$$

Уравнение на $Z(x, s)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (s+1)Z(x+1, s) - (s+1)Z(x, s) + sZ(x-1, s) &= \delta_{x, x_0-1} - \delta_{x, x_0}, \\ Z(0, s) &= Z(n+1, s) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Это уравнение симметризуется подстановкой $Z(x, s) = A^x \varphi(x, s)$, где $A = \sqrt{s/(s+1)}$, что приводит к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \varphi(x+1, s) - \frac{1}{A} \varphi(x, s) + \varphi(x-1, s) &= \frac{A^{-x}}{\sqrt{s(s+1)}} (\delta_{x, x_0-1} - \delta_{x, x_0}), \\ \varphi(0, s) &= \varphi(n+1, s) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Синус-преобразование Фурье

$$f(k, s) = \sum_{x=1}^n \varphi(x, s) \sin \frac{\pi k x}{n+1}$$

приводит (17) к виду

$$\left(2 \cos \frac{\pi k}{n+1} - \frac{1}{A} \right) f(k, s) = \frac{A^{-x_0}}{\sqrt{s(s+1)}} \left(A \sin \frac{\pi k (x_0-1)}{n+1} - \sin \frac{\pi k x_0}{n+1} \right),$$

и окончательное выражение для $Z(x, s)$ имеет следующий вид:

$$Z(x, s) = \frac{2}{(n+1)(s+1)} \left(\frac{s}{s+1} \right)^{\frac{x-x_0}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\frac{s+1}{s}} \sin \frac{\pi k x_0}{n+1} - \sin \frac{\pi k (x_0-1)}{n+1}}{\sqrt{\frac{s+1}{s}} - 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}} \sin \frac{\pi k x}{n+1}.$$

Функцию $\theta(x, m)$ удобно выразить через контурный интеграл

$$\theta(x, m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{Z(x, s)}{s^{m+1}} ds,$$

где контур C окружает начало координат $s = 0$ и лежит в области регулярности функции $Z(s) \equiv Z(x, s)$. Следовательно,

$$\theta(x, m) = - \sum_{s_k} \text{Res} \left(\frac{Z(x, s_k)}{s_k^{m+1}} \right),$$

где s_k — полюсы $Z(s)$:

$$s_k = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} - 1}$$

(ср. с (14)). Нас интересует лишь асимптотическое при $m \gg 1$ поведение функции $\theta_n(x, x_0, m)$, которое определяется ближайшими к началу координат полюсами $s_1 = s_{n-1} = 1/3$ для $n \gg 1$. Таким образом, получаем

$$\theta_n(x, x_0, m) = \frac{4}{n+1} \sin \frac{\pi(x_0+1)}{n+1} \sin \frac{\pi x}{n+1} 2^{x_0-x} 3^m. \quad (18)$$

Для того чтобы найти $\theta_n(m)$, нужно просуммировать $\theta(x, x_0, m)$ по всем x и x_0 :

$$\theta_n(m) = \sum_{x, x_0=1}^n \theta_n(x, x_0, m),$$

что дает в пределе $n = \text{const} \gg 1$

$$\theta_n(m) = \frac{16\pi^2}{\ln^4 2} \frac{2^n}{n^3} 3^m. \quad (19)$$

Окончательно, пользуясь (8), имеем для полного числа неэквивалентных слов в пределе $n = \text{const} \gg 1$, $\mu \gg 1$

$$V^{(1)}(n, \mu) = \frac{32\pi^2}{\ln^4 2} \frac{2^n}{n^3} 7^{\mu-1}. \quad (20)$$

Группа $\mathcal{LF}_{n+1}^{(2)}$. Прежде всего перенумеруем все генераторы $f_{ij}^{(\alpha)}$, $i, j = 1, \dots, n^2$, $\alpha = x, y$ в следующей последовательности: $(f_{11}^{(x)}, f_{11}^{(y)}), \dots, (f_{1n}^{(x)}, f_{1n}^{(y)}), \dots, (f_{n1}^{(x)}, f_{n1}^{(y)}), \dots, (f_{nn}^{(x)}, f_{nn}^{(y)})$. Упорядочив таким образом генераторы, введем нормальный порядок согласно правилам 1–3. Будем обозначать через z порядковый номер пары $(f_{ij}^{(x)}, f_{ij}^{(y)})$. Далее, определим функции $a(z, m)$ и $b(z, m)$ как числа различных последовательностей из $m + 1$ генераторов, удовлетворяющих правилам 1–3 и заканчивающихся $f_{ij}^{(x)}$ и $f_{ij}^{(y)}$, соответственно. Теперь мы можем написать эволюционные уравнения на $a(z, m)$ и $b(z, m)$, аналогичные (9),

$$\begin{aligned} a(z, m+1) &= a(z-1, m) + b(z-n, m) + b(z-n+1, m) + b(z, m) + \\ &\quad + \sum_{z'=z+1}^{n^2} (a(z', m) + b(z', m)), \\ b(z, m+1) &= b(z-n, m) + a(z-1, m) + a(z, m) + \\ &\quad + \sum_{z'=z+1}^{n^2} (a(z', m) + b(z', m)). \end{aligned} \quad (21)$$

Так же как и в случае группы $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$, будем предполагать в пределе $n \gg 1$ периодические граничные условия на отрезке $[0, n^2 + 1]$. Таким образом, мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} a(z+1, m+1) - a(z, m+1) &= b(z-n+2, m) - b(z-n, m) - b(z, m) + \\ &\quad + a(z, m) - a(z-1, m) - a(z+1, m), \\ b(z+1, m+1) - b(z, m+1) &= b(z-n+1, m) - b(z-n, m) - \\ &\quad - a(z-1, m) - b(z+1, m), \\ a(0, m) = b(0, m) = a(n^2+1, m) = b(n^2+1, m) &= 0, \quad m = 0, 1, \dots \\ a(z, 0) = b(z, 0) = 1, \quad z = 1, \dots, n^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Начальные условия в (22) отличаются от (11), так как здесь мы не фиксируем первый генератор в последовательности. Предположим, что $|a(z, m) - b(z, m)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) равномерно по z и m , что дает возможность перейти от (22) к замкнутому уравнению на функцию $b(z, m)$ (самосогласованность этого предположения будет проверена в конце наших вычислений)

$$\begin{aligned} b(z+1, m+1) - b(z, m+1) &= b(z-n+1, m) - b(z-n, m) - \\ &\quad - b(z-1, m) - b(z+1, m), \\ b(0, m) = b(n^2+1, m) &= 0, \quad m = 0, 1, \dots, \\ b(z, 0) &= 1, \quad z = 1, \dots, n^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Подстановка $b(z, m) = \sum_{k=1}^{n^2} B_k \lambda_k^m \beta_k(z)$ приводит к граничной задаче

$$\begin{aligned} (\lambda_k + 1)\beta_k(z+1) - \lambda_k \beta_k(z) + \beta_k(z-1) + \beta_k(z-n) - \beta_k(z-n+1) &= 0, \\ \beta_k(0) = \beta_k(n^2+1) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Будем искать решение задачи (24) в виде $\beta_k(z) = p_k^z \sin(\pi k z / (n^2 + 1))$. Подставляя это выражение в (24), получаем уравнение на p_k вместе с выражением для λ_k

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi k}{n^2 + 1} p_k^{n+1} + \sin \frac{2\pi k}{n^2 + 1} p_k^n - \sin \frac{\pi k}{n^2 + 1} p_k^{n-1} - \sin \frac{\pi k n}{n^2 + 1} p_k^2 + \\ + 2 \cos \frac{\pi k}{n^2 + 1} \sin \frac{\pi k n}{n^2 + 1} p_k - \sin \frac{\pi k n}{n^2 + 1} = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\lambda_k = p_k^{-2} - 1 - p_k^{-n} \frac{\sin \frac{\pi k(n-1)}{n^2+1}}{\sin \frac{\pi k}{n^2+1}} + p_k^{-n-1} \frac{\sin \frac{\pi k n}{n^2+1}}{\sin \frac{\pi k}{n^2+1}}.$$

Здесь каждый корень $p_k^{(i)}$ соответствует, вообще говоря, различным значениям $\lambda_k^{(i)}$.

Нас интересует только предельное поведение $b(z, m)$ ($m \gg 1$), определяющееся наибольшим значением $\lambda_k^{(i)}$ при $k = 1$. (Ср. с уравнением (14) в случае группы $\mathcal{LF}_{n+1}^{(1)}$.) Уравнение (25) при $k = 1$ и $n \gg 1$ приобретает вид

$$\begin{aligned} p_1^{n+1} + 2p_1^n - p_1^{n-1} - n(p_1 - 1)^2 = 0, \\ \lambda_1 = p_1^{-2} - 1 + np_1^{-n-1} - (n-1)p_1^{-n}. \end{aligned} \quad (26)$$

Легко проверить, что наименьший корень этого уравнения, соответствующий наибольшему значению $\lambda_1^{(i)}$, есть

$$\begin{aligned} p_1 = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n = \text{const} \gg 1, \\ \lambda_1 = \frac{n}{\ln n} + o\left(\frac{n}{\ln n}\right), \quad n = \text{const} \gg 1. \end{aligned} \quad (27)$$

В случае одномерной локально свободной группы такое же значение λ_k достигалось на правом конце спектра, но в данном случае нетрудно проверить, что (25) не имеет решений $\lambda_{n^2}^{(i)}$, растущих столь же быстро, как λ_1 . Коэффициенты B_k должны быть найдены из начального условия

$$\sum_{k=1}^{n^2} B_k \beta_k(z) = 1.$$

Так как $p_1 \rightarrow 1$ ($n \gg 1$), то функции $\beta_k(z)$ ортогональны в окрестности левого конца спектра, и, следовательно, коэффициент B_1 по порядку величины определяется выражением

$$B_1 = \frac{\int_0^{n^2+1} \beta_1(z) dz}{\int_0^{n^2+1} \beta_1^2(z) dz}, \quad n \gg 1.$$

Таким образом, для $b(z, m)$ в пределе $n = \text{const} \gg 1$ и $m \gg 1$ получаем

$$b(z, m) = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi z}{n^2 + 1} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^m. \quad (28)$$

Теперь, предполагая равенство $a(z, m) = b(z, m)$, где $b(z, m)$ дается выражением (28), легко проверить, что $a(z, m)$ и $b(z, m)$ действительно удовлетворяют уравнениям (22) в пределе $n \gg 1$, $m \gg 1$, что и доказывает самосогласованность нашего подхода.

Предельное поведение функции $\tilde{\theta}_n(m)$, определение которой аналогично (19), дается выражением

$$\tilde{\theta}_n(m) = \sum_{z=1}^{n^2} a(z, m) + b(z, m) = \frac{16n^2}{\pi^2} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^m.$$

Окончательно находим полное число неэквивалентных слов данной неприводимой длины μ в пределе $n = \text{const} \gg 1$, $\mu \gg 1$:

$$V^{(2)}(n, \mu) = \sum_{m=1}^{\mu-1} 2^{m+1} \binom{\mu-1}{m} \tilde{\theta}_n(m) = \frac{32n^2}{\pi^2} \left(\frac{2n}{\ln n} \right)^{\mu-1} \quad (29)$$

(ср. с (20)).

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Принципиальная разница в предельном поведении функций $V^{(1)}(n, \mu)$ и $V^{(2)}(n, \mu)$ (и, следовательно, в оценках сверху для $\#\Omega^{(1)}(n, \mu)$ и $\#\Omega^{(2)}(n, \mu)$) наиболее отчетлива в пределе $n = \text{const} \gg 1$ и $\mu \rightarrow \infty$

$$f_{1,2} = \left[\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\ln V^{(1,2)}(n, \mu)}{\mu} \right]_{n=\text{const} \gg 1}. \quad (30)$$

Из уравнений (20) и (29) получаем

$$f_1 = \ln 7, \quad f_2 = \frac{2n}{\ln n}.$$

Таким образом, можно заключить, что с экспоненциальной точностью в пределе $n = \text{const} \gg 1$ и $\mu \rightarrow \infty$ мощность множества $\Omega^{(1)}(n, \mu)$ ограничена сверху оценкой, не зависящей от n , т.е. $\#\Omega^{(1)}(n, \mu)$ не зависит от представления (от числа нитей в косе), в то время как $\#\Omega^{(2)}(n, \mu)$ с той же самой точностью и в том же пределе существенно зависит от представления (от числа нитей в двумерной косе из группы $B_n^{(2)}$).

Уравнения (20) и (29) дают возможность сделать некоторые заключения относительно структуры графов, соответствующих группам $\mathcal{LF}_n^{(1)}$ и $\mathcal{LF}_n^{(2)}$. Эти графы могут быть получены наглядно следующим образом. Возьмем *свободные* одномерную и двумерную группы, никакие генераторы которых не коммутируют друг с другом. Графы этих групп имеют структуру дерева Кейли с $2n$ и $2n^2$ ветвями, соответственно, причем числа различных примитивных слов длины μ определяются выражениями

$$\begin{aligned} V_{\text{free}}^{(1)}(n, \mu) &= 2n(2n-1)^{\mu-1} && \text{для одномерной свободной группы,} \\ V_{\text{free}}^{(2)}(n, \mu) &= 2n^2(2n^2-1)^{\mu-1} && \text{для двумерной свободной группы.} \end{aligned}$$

Рис. 4. Граф, отвечающий локально свободной группе. Вершины А и В должны быть “склеены”, т.к. они представляют одно и то же слово.

Графы, соответствующие группам $\mathcal{LF}_n^{(1,2)}$, могут быть получены согласно следующей рекурсивной процедуре.

1) Следуя от корня дерева Кейли свободной группы, рассмотрим все вершины, отстоящие на расстояние $\mu = 2$ от корня. отождествим те вершины, которые соответствуют эквивалентным словам группы $\mathcal{LF}_n^{(1,2)}$.

2) Повторяя эту процедуру, выберем все вершины на расстоянии $\mu = 1, 2, \dots$ от корня, рассмотрим все вершины на расстоянии $\mu + 2$ и отождествим (т.е. “склеим”) те из них, которые представляют эквивалентные слова в соответствии с определением одномерной и двумерной локально свободных групп (см. пример на рис. 4).

В результате этой процедуры получаем граф, имеющий эффективно $z_{\text{eff}}^{(1,2)} - 1$ ветвей, ведущих с уровня μ на уровень $\mu + 1$. Несложно найти выражения для $z_{\text{eff}}^{(1,2)}$, используя формулы (20) и (29). В пределе $n = \text{const} \gg 1$ и $\mu \rightarrow \infty$ имеем

$$z_{\text{eff}}^{(1,2)} = \frac{V^{(1,2)}(n, \mu + 1)}{V^{(1,2)}(n, \mu)} + 1 = \begin{cases} 8 & \text{для группы } \mathcal{LF}_n^{(1)}, \\ \frac{2n}{\ln n} + 1 & \text{для группы } \mathcal{LF}_n^{(2)}. \end{cases}$$

Мы видим, что граф $\mathcal{LF}_n^{(1)}$ совпадает с деревом Кейли с эффективным числом ветвей $z_{\text{eff}} = 8$, которое не зависит от n при $n \gg 1$, в то время как эффективное координационное число графа, соответствующего группе $\mathcal{LF}_n^{(2)}$, не стремится к пределу, не зависящему от n при $n \gg 1$.

Благодарности. Авторы благодарны А. М. Вершику за неоднократные обсуждения различных аспектов работы и полезные замечания.

Список литературы

- [1] *J. Nadal, B. Derrida, J. Vannimenus.* J. de Physique. 1982. V. 43. P. 1561; *V. Hakim, J. Nadal.* J. Phys. A. 1983. V. 16. P. L213.
- [2] *A. Vershik, S. Nechaev, R. Bikbov.* Commun. Math. Phys. (in print).
- [3] *L. Paris, D. Rolfsen.* Geometric subgroups of surface braid groups. Preprint № 115. Dijon: Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, 1997.
- [4] *J. Birman.* Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 13.
- [5] *A. M. Бершук, С. В. Кеков.* ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 777; *A. M. Vershik.* Topics in Algebra. 1990. V. 26. Pt. 2. P. 467; Proc. Am. Math. Soc. 1991. V. 114. P. 1.
- [6] *S. K. Nechaev, A. Yu. Grosberg, A. M. Vershik.* J. Phys. A: Math. Gen. 1996. V. 29. P. 2411.
- [7] *P. Cartier, D. Foata.* Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. In: Lect. Notes in Math. V. 85. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1969.
- [8] *G. X. Viennot.* Heaps of pieces, I: Basic definitions and combinatorial lemmas. In: Lect. Notes in Math. V. 1234. Combinatoire énumérative. Proc. of the Colloque de combinatoire énumérative held at Université du Québec à Montréal, May 28 – June 1, 1985. Eds. G. Labelle et P. Leroux. Berlin: Springer, 1986. P. 321.
- [9] *A. M. Бершук.* УМН. 1998. Т. 53. № 5. С. 57.

Поступила в редакцию 1.XII.1998 г.,
после доработки 22.II.1999 г.