Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, Модуляционная неустойчивость солитонных решеток в световолоконных коммуникационных системах, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 222–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:27:56

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОННЫХ РЕШЕТОК В СВЕТОВОЛОКОННЫХ КОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

Задача о линейной устойчивости солитонной решетки, описываемой нелинейным уравнением Шредингера, точно решена с помощью линеаризации процедуры одевания Захарова–Шабата. Эта задача сводится к нахождению совместного решения двух линейных уравнений [10]. Данный подход позволяет чисто алгебраически найти явно инкремент для солитонной решетки и соответствующие собственные функции. В рассматриваемом случае инкремент может быть выражен через эллиптические функции. Анализ дисперсионных соотношений и собственных функций показал, что решение в виде солитонной решетки *устойчиво* для дефокусирующей среды и *неустойчиво* для произвольных параметров в фокусирующем случае. Обсуждаются возможные приложения результатов устойчивости к световолоконным коммуникационным системам.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1971 году, до того как Хасегава и Тапшет [1] предложили использовать оптический солитон, распространяющийся по световолокну, в качестве бита информации, вопрос об устойчивости солитонов для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$iE_t + E_{xx} + 2\kappa|E|^2E = 0 \quad (1)$$

был уже решен Захаровым и Шабатом в их знаменитой работе [2]. Как известно, это уравнение с хорошей точностью описывает оптические солитоны в световолокнах. В оптическом контексте уравнение (1) записывается в безразмерных переменных для амплитуды E электромагнитного поля в системе координат, двигающейся с групповой скоростью волнового пакета; константа $\kappa = \pm 1$ соответствует двум возможным типам нелинейного взаимодействия – фокусирующей ($\kappa > 0$) и дефокусирующей ($\kappa < 0$) средам. В работе [2] Захаров и Шабат предложили применить к НУШ новый в тот момент метод – метод обратной задачи рассеяния, открытый за четыре года до этого для уравнения

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Москва, Россия

†National Center of Atmospheric Research, Boulder, Colorado, USA

Кортевега–де Вриза (КдВ) [3]. Согласно [2] солитоны НУШ, как и КдВ-солитоны, ведут себя как устойчивые частицы. Их форма не изменяется не только при наложении малых возмущений, но даже и при сильном взаимодействии, каким является рассеяние солитонов. Именно это свойство солитонов было наиболее привлекательным как с точки зрения теории, так и приложений в оптике, особенно после работ [1, 2].

В последнее десятилетие интерес к оптическим солитонам значительно возрос, что было стимулировано практическими достижениями использования солитонов в современных коммуникационных системах [4–6]. Однако, несмотря на большую практическую значимость оптических солитонов, соответствующая теория пока далека до своего завершения. Практические потребности развития телекоммуникаций приводят к увеличению информационных потоков и как следствие к уплотнению информации. В этом случае для солитонных линий связи перекрытие солитонов становится все более существенным и возникает необходимость исследования взаимодействия солитонов, находящихся на постоянном расстоянии друг от друга, т.е. образующих солитонную решетку. К счастью, НУШ имеет точное решение в виде солитонной решетки, так называемой кноидальной волны. Это целое семейство, зависящее от нескольких параметров, характеризующих групповую и фазовую скорости, пространственно-временные периоды и амплитуду волны. В частности, солитон также принадлежит этому семейству: он может быть получен как предел кноидальной волны при больших пространственных периодах.

Другой предел кноидальной волны – решение в виде монохроматической волны с заданной частотой и волновым числом. Хорошо известно, что такое решение неустойчиво для фокусирующих сред. В литературе эта неустойчивость известна как неустойчивость Бенжамина–Фейера. Впервые она была найдена для поверхностных волн на воде [7]. В физике плазмы и нелинейной оптике (см., например, [8]) эту неустойчивость часто называют *модуляционной*. Ее основная причина связана с нелинейным притяжением между частицами. Однако для одного отдельного солитона это притяжение компенсируется линейной дисперсией. Поэтому неустойчивость кноидальных волн может быть обусловлена только перекрытием солитонов. С другой стороны, если расстояние между солитонами в кноидальной волне будет достаточно большим, а как следствие перекрытие будет экспоненциально малым, то модуляционная неустойчивость не будет столь опасной.

Для дефокусирующей среды оба предельных решения – солитон и монохроматическая волна – устойчивы относительно малых возмущений. Поэтому в этом случае следует ожидать, напротив, устойчивости кноидальной волны.

Следует отметить, что до сих пор точное решение задачи линейной устойчивости кноидальной волны не было получено. Точное решение этой задачи будет дано в настоящей статье¹⁾.

Для исследования линейной устойчивости кноидальной волны мы будем использовать подход, развитый авторами и Фальковичем в [10] и впервые примененный для ана-

¹⁾Эти результаты были доложены одним из авторов этой работы одиннадцать лет назад [9].

лиза устойчивости кноидальных волн, описываемых уравнением Кадомцева–Петвиашвили. Фактически этот метод можно рассматривать как линеаризованный вариант процедуры одевания Захарова–Шабата [11]. Для линейной устойчивости все сводится к нахождению совместного решения двух линейных вспомогательных уравнений. Эти уравнения (см. [10]) имеют порядок ниже, чем линеаризованное уравнение движения. Именно в понижении порядка дифференциальных операторов состоит преимущество в использовании метода обратной задачи рассеяния в исследовании устойчивости по сравнению с прямым анализом спектральных задач линеаризованных уравнений. В случае НУШ вспомогательная система имеет первый порядок, хотя линеаризованные уравнения – второго порядка по пространственным производным. В данной статье мы покажем, что решение этой системы для кноидальной волны представляет собой чисто алгебраическую процедуру, а искомое решение может быть выражено в терминах функций Вейерштрасса. В работе будет найден инкремент неустойчивости в случае фокусирующей нелинейности. В частности, при большом аспектном отношении (расстоянии между солитонами, отнесенном к размеру солитона) в выражении для максимума инкремента, помимо малой экспоненты (что естественно в данном случае), будет определен также предэкспоненциальный множитель. Для дефокусирующей нелинейности будет продемонстрировано *отсутствие* при всех параметрах волны модуляционной неустойчивости, что согласуется с устойчивостью предельных решений – монохроматической волны и темных солитонов [12].

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе будут рассмотрены решения в форме стационарных волн. Как хорошо известно, уравнение (1) инвариантно относительно галилеевских и калибровочных преобразований. Поэтому без ограничения общности среди всего семейства стационарных волн достаточно рассмотреть решение в виде покоящейся волны

$$E(t, x) = e^{-i\Omega t} E_0(x), \quad (2)$$

где амплитуда E_0 подчиняется уравнению Ньютона для движения частицы в центрально-симметричном потенциале $U = (\Omega \mathbf{r}^2 + \kappa \mathbf{r}^4)/2$:

$$\mathbf{r}'' = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3)$$

Здесь штрих означает производную по x , двумерный вектор $\mathbf{r}$ введен как $\mathbf{r} = (E_0^R, E_0^I)$, где E_0^R, E_0^I – действительная и мнимая части E_0 , соответственно.

Уравнение (2) имеет два первых интеграла: момент импульса

$$M = \mathbf{r}^2 \varphi' \quad (\varphi = \arg E_0) \quad (4)$$

и энергию

$$\epsilon = \frac{\mathbf{r}'^2}{2} + \frac{M^2}{2\mathbf{r}^2} + U(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Вводя новую переменную $I = \mathbf{r}^2$, которая имеет смысл интенсивности, последнее уравнение может быть переписано следующим образом:

$$I'^2 = 4(-\kappa I^3 - \Omega I^2 + 2\epsilon I - M^2). \quad (6)$$

После сдвига на постоянную:

$$I = -\kappa[\wp(x + i\omega') - \wp(a)],$$

где

$$\wp(a) = -\frac{\Omega}{3}, \quad (7)$$

полученное уравнение превращается в уравнение для определения эллиптической функции Вейерштрасса²⁾ $\wp$,

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3). \quad (8)$$

Напомним, что функция Вейерштрасса определена в комплексной плоскости z и представляет там аналитическую функцию с двумя периодами: 2ω – период $\wp$ вдоль действительной оси (соответственно это период для интенсивности I), $2\omega'$ – период функции вдоль мнимой оси. Введем величины $e_{1,2,3}$ – значения $\wp$ в точках $t = \omega, \omega + i\omega', i\omega'$, соответственно. На эти величины имеется ограничение $e_1 > e_2 > e_3$.

Мы будем использовать также и другое представление уравнения (8):

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

где

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ g_2 &= -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_1e_3) = \sum e_i^2, \\ g_3 &= 4e_1e_2e_3. \end{aligned}$$

Фаза ϕ находится простым интегрированием уравнения (4), что дает

$$\varphi = \int^x \frac{M}{I} dx.$$

Используя далее формулы для эллиптических функций (см., например, [13]) и выражая $\wp$ через ζ -функции Вейерштрасса:

$$\frac{\wp'(z) - \wp'(a)}{\wp(z) - \wp(a)} = 2[\zeta(z+a) - \zeta(x) - \zeta(a)],$$

²⁾ Следует отметить, что это уравнение имеет точно такой же вид, как и для стационарных волн уравнения КдВ.

находим, что момент M может быть задан посредством параметра a с помощью уравнения (6),

$$\wp'(a)^2 = -4M^2.$$

В результате E_0 выражается в явном виде:

$$E_0 = \sqrt{\kappa} \frac{\sigma(x + i\omega' + a)}{\sigma(x + i\omega')\sigma(a)} e^{-\zeta(a)x - a\zeta(i\omega')}. \quad (9)$$

Здесь мы ввели σ -функции Вейерштрасса, по определению они связаны с функциями $\wp$ и ζ следующими соотношениями:

$$\wp(z) = -\zeta'(z), \quad \zeta(z) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z).$$

Формула (9) задает общее стационарное решение уравнения (1). Все различие между фокусирующим и дефокусирующим случаями – в зависимости E_0 от параметра a . Основное ограничение на a следует из того условия, что Ω должна быть действительной величиной. Из-за симметричных свойств функции ($\wp^*(z^*) = \wp(z) = \wp(-z)$) и благодаря периодичности $\wp$ -функция принимает действительные значения на двух отрезках $(0, i\omega')$ и $(\omega, \omega + i\omega')$, а также на всех отрезках, получающихся периодическим продолжением. Для фокусирующего случая согласно (7) это означает, что параметр a лежит на отрезке $(\omega - i\omega', \omega + i\omega')$. Для дефокусирующего НУШ a принимает свои значения на отрезке $(-i\omega', i\omega')$ вдоль мнимой оси.

Отметим, что для обоих типов нелинейности за счет симметрии можно ограничиться рассмотрением решений с параметром a , лежащим только в половинах интервалов, т.е. из $(0, i\omega')$ и $(\omega, \omega + i\omega')$.

Полученное решение является квазипериодическим. Важно, что это решение имеет блоховский вид, т.е. может быть представлено как

$$E_0 = \psi_q(x) \exp[iqx],$$

где $\psi_q(x)$ – периодическая функция с периодом 2ω и квазиимпульсом

$$q = i \left[\zeta(a) - a \frac{\zeta(\omega)}{\omega} \right] \quad (10)$$

(ср. со случаем КдВ [10]). Это решение становится чисто периодическим в следующих случаях:

- 1) $a = \omega$, $E_0 = \nu \operatorname{dn}(\nu x)$, если $\kappa = 1$;
- 2) $a = \omega + i\omega'$, $E_0 = \nu s \operatorname{cn}(\nu x)$, если $\kappa = 1$;
- 3) $a = i\omega'$, $E_0 = \nu s \operatorname{sn}(\nu x)$, если $\kappa = -1$.

Здесь dn , cn и sn – эллиптические функции Якоби, $\nu^2 = e_1 - e_3$, а s, s' ($s^2 + s'^2 = 1$) – модули эллиптических функций:

$$s^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad s'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}. \quad (11)$$

Для функции Вейерштрасса $\wp$ (и соответственно для интенсивности I) существует замечательное представление в форме бесконечного ряда солитонных потенциалов КдВ (см., например, [14])

$$-2\wp(x + i\omega') = \frac{\zeta(i\omega')}{i\omega'} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2\lambda^2}{\operatorname{ch}^2 \lambda(x - 2n\omega)},$$

где $\lambda = \pi/\omega'$. Эта формула показывает, что стационарное решение представляет собой солитонную решетку. Отсюда ясно, что в пределе больших расстояний 2ω между солитонами (по сравнению с шириной каждого отдельного солитона, которая пропорциональна ω') решение превращается в односолитонное.

В фокусирующем случае это решение вида

$$E = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} \lambda x} e^{i\lambda^2 t},$$

где λ – константа.

В дефокусирующем случае в пределе большого периода 2ω решение сводится к так называемому серому (темному) солитону

$$E = \left[\frac{V}{2} + i\mu \operatorname{tg} \mu(x - Vt) \right] e^{-2it},$$

где $\mu^2 + (V/2)^2 = 1$. Этот тип солитона движется со скоростью V на фоне постоянного пьедестала $|E| = 1$,

Когда расстояние между солитонами уменьшается, перекрытие солитонов уже оказывается существенным. Для больших значений ω' осцилляции интенсивности становятся гармоническими и точно исчезают в пределе $\omega' \rightarrow \infty$. В этом пределе решение имеет вид монохроматической волны с постоянной амплитудой A и волновым числом $k = 0$:

$$E = A e^{2i\kappa|A|^2 t}. \quad (12)$$

3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ

Здесь рассматривается линейная задача устойчивости для произвольного решения НУШ (1) и показано, каким образом данная проблема может быть сформулирована в терминах двух линейных вспомогательных уравнений, совместность которых влечет НУШ.

Начнем с линеаризации уравнения (1) на фоне некоторого решения $E(t, x)$ НУШ, положив

$$E(t, x) \rightarrow E(t, x) + \phi.$$

Считая ϕ малым по сравнению с амплитудой $E(t, x)$, для возмущения приходим к следующей линейной системе:

$$i\phi_t + \phi_{xx} + 2\kappa(2|E|^2\phi + E^2\phi^*) = 0, \quad (13)$$

$$i\phi_t^* - \phi_{xx}^* - 2\kappa(2|E|^2\phi^* + E^2\phi) = 0. \quad (14)$$

Следуя [10], теперь покажем, как эта система может быть представлена с помощью двух вспомогательных линейных дифференциальных уравнений.

Прежде всего напомним, что НУШ (1) может быть переписано как условие совместности двух линейных задач (см. [2]) для двухкомпонентного вектора-столбца $\Psi(t, x, \lambda)$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = L\Psi = i(\lambda\sigma_3 + \hat{E})\Psi, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\Psi = i(2\lambda^2\sigma_3 + 2\lambda\hat{E} + \hat{Q})\Psi, \quad (16)$$

где λ – спектральный параметр, а

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa E^* \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} -\kappa|E|^2 & -i\kappa E_x^* \\ iE_x & \kappa|E|^2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Важно, что если E удовлетворяет НУШ (1), то совместное решение системы (15) существует при всех значениях λ .

Рассмотрим два линейных уравнения для матричной (2×2) -функции Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = L\Phi - \Phi L, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = A\Phi - \Phi A. \quad (18)$$

Согласно (15) эти уравнения будут совместны при всех λ , если E удовлетворяет НУШ. Решение же этой системы даст решение линеаризованных уравнений (13). Убедиться в этом можно двумя способами. Первый основан на процедуре одевания, предложенной Захаровым и Шабатом [11]. Напомним, что этот подход позволяет строить новое решение путем одевания некоторого известного решения. Например, взяв в качестве затравочного тривиальное решение, можно построить солитонное решение.

Основные уравнения метода одевания имеют форму, похожую на (18):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \tilde{L}\Phi - \Phi L, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \tilde{A}\Phi - \Phi A. \quad (19)$$

Здесь операторы L , A заданы с помощью известного решения, а $\tilde{L}$, $\tilde{A}$ – операторы для нового, строящегося решения нелинейного уравнения. В этом случае функция Φ , являясь решением соответствующей задачи Римана–Гильберта, обеспечивает необходимую

связь между новым и старым решениями. Если строящееся решение слабо отличается от известного, так что разница между ними является достаточно малой, то можно заменить операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{A}$ в (19) операторами L и A . При этом возмущения в случае НУШ выражаются явно через матрицу Φ посредством равенства

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa\phi^* \\ \phi & 0 \end{pmatrix} = [\sigma_3, \Phi]. \quad (20)$$

Справедливость ее может быть проверена также и прямым вычислением. Для этого нужно исключить из системы (18) диагональную часть Φ , а также спектральный параметр λ . После простых вычислений с помощью соотношения (20) можно получить линеаризованные уравнения (13).

Важно подчеркнуть, что уравнения (18) являются дифференциальными первого порядка, в то же время линеаризованные уравнения (13) – дифференциальные уравнения второго порядка относительно x . Именно в понижении порядка состоит преимущество использования метода обратной задачи рассеяния для задач линейной устойчивости. Более того, как мы покажем далее, в частном случае солитонной решетки (2), (9) задача об устойчивости значительно упрощается: она сводится к простой алгебраической процедуре.

4. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Обратимся теперь к анализу устойчивости для стационарного решения (2), (9). Перед тем как непосредственно решать уравнения (18), напомним, что такое модуляционная неустойчивость.

Эта неустойчивость впервые была получена для монохроматической волны (12). Выбирая возмущения в виде

$$\phi(t, x) = (u + iv) \exp [i(2\kappa|A|^2 t + kx) - i\gamma t],$$

где u и v – действительная и мнимая части амплитуды возмущения, легко получить следующее дисперсионное соотношение:

$$\gamma^2 = k^2(k^2 - 4\kappa|A|^2). \quad (21)$$

Отсюда видно, что неустойчивость ($\gamma^2 < 0$) имеет место только в фокусирующем случае $\kappa > 0$. Данная неустойчивость и есть модуляционная неустойчивость. Основная ее причина – притяжение между квазичастицами. Из (21) можно также видеть, что насыщение неустойчивости наступает при $|k| \geq 2|A|$, а максимум инкремента (21)

$$\gamma_{\max} = 2|A|^2 \quad (22)$$

достигается при $k_{\max}^2 = 2|A|^2$. На начальной стадии развития этой неустойчивости возникает модуляция интенсивности $I = |E|^2$, на более поздних – фрагментация монохроматической волны в кластеры с характерным масштабом порядка $2\pi/k_{\max}$ [15].

В случае дефокусирующих сред такой неустойчивости для монохроматической волны нет. Дисперсионное соотношение (21) тогда представляет спектр Боголюбова для колебаний конденсата слабо неидеального бозе-газа.

Чтобы решить задачу о линейной устойчивости для общего стационарного решения (2), (9), воспользуемся представлением (18). Удобно вначале исключить зависимость от времени матриц L и A , а далее совершить преобразование, при котором эти матрицы становятся периодическими по x функциями. Матрица $\hat{E}$ тогда представляется в виде

$$2\hat{E} = e^{\frac{i}{2}(\Omega t - \varphi)\sigma_3} \hat{r} e^{-\frac{i}{2}(\Omega t - \varphi)\sigma_3}, \quad (23)$$

где

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix} r$$

и r удовлетворяет уравнению (5).

Такое представление для “волновой” функции Φ означает переход во “вращающуюся” систему отсчета:

$$\Phi = e^{\frac{i}{2}(\Omega t - \varphi)\sigma_3} \Phi_0 e^{-\frac{i}{2}(\Omega t - \varphi)\sigma_3}.$$

В результате уравнения (18) переписываются в виде

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = [L_0, \Phi_0], \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = [A_0, \Phi_0], \quad (25)$$

где операторы в системе “покоя” равны

$$L_0 = i \left[\left(\lambda + \frac{\varphi'}{2} \right) \sigma_3 + \hat{r} \right], \quad (26)$$

$$A_0 = i \left[\left(2\lambda - \frac{\Omega}{2} \right) \sigma_3 + (2\lambda - \varphi') \hat{r} - \sigma_3 \hat{r}^2 - i\sigma_3 \hat{r}' \right]. \quad (27)$$

Полученная система уже не содержит явной зависимости от t , а матрицы L_0 и A_0 являются периодическими по x функциями. Поэтому решение этой системы можно искать как

$$\Phi_0(t, x) = \Theta(x) e^{-i\gamma t}, \quad (28)$$

где $\Theta(x)$ имеет блоховский вид с квазиимпульсом p :

$$\Theta(x) = \theta_p e^{ipx}, \quad \theta_p(x + 2\omega) = \theta_p(x). \quad (29)$$

Условие разрешимости для этой системы задает дисперсионное соотношение $\gamma = \gamma(p)$.

Подстановка (28) в уравнение (21) показывает, что для нахождения искомого дисперсионного соотношения нужно решить вначале алгебраическое уравнение

$$-i\gamma\Theta = [A_0, \Theta].$$

Его условие разрешимости дает зависимость γ от спектрального параметра λ (этот факт проверяется прямыми вычислениями с использованием уравнений (4), (5)):

$$\gamma^2 = -8\kappa(2\lambda M - \epsilon) + (4\lambda^2 - \Omega)^2. \quad (30)$$

Третий корень тривиальный: $\gamma = 0$.

В соотношении (30) λ играет роль свободного параметра. Однако на этот параметр имеются ограничения, возникающие из требования ограниченности при всех x собственных функций. Это требование эквивалентно тому, что квазиимпульс p должен принимать чисто действительные значения.

Для нахождения $\Theta(x)$ удобно представить матрицу $\Theta(x)$ как бивектор (тензорное произведение двух векторов, столбца и строки):

$$\Theta = \xi \otimes \eta,$$

где вектор ξ находится из решения двух уравнений

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = L_0 \xi, \quad (31)$$

$$-i\frac{\gamma}{2}\xi = A_0 \xi. \quad (32)$$

Что касается вектора η , то он удовлетворяет сопряженным уравнениям:

$$-\frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta L_0, \quad (33)$$

$$-i\frac{\gamma}{2}\eta = \eta A_0. \quad (34)$$

Отсюда легко видно, что между решениями обеих систем (прямой и сопряженной) существует простая связь, а именно, если ξ – решение (31) (или (15)), то решение η сопряженной системы дается равенством

$$\eta^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xi,$$

где индекс Т – транспонирование. Эта связь означает, что матрица Θ записывается следующим образом:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 & -\xi_1^2 \\ \xi_2^2 & -\xi_1 \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Что касается возмущения, то оно согласно (20) выражается только через недиагональные элементы $\Theta_{\pm}$:

$$\phi = \xi_2^2 e^{-i(\Omega t + \gamma t - \varphi)}.$$

Таким образом, для получения дисперсионного соотношения $\gamma(p)$ достаточно знать решение системы (15). Тогда по (30) для известной функции γ уравнение (31) задает линейную связь между ξ_1 и ξ_2 :

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{i\kappa[r' + i(2\lambda - \varphi')r]}{\wp(x') - \wp(c)}, \quad x' = x + i\omega', \quad (35)$$

где для λ мы приняли следующую параметризацию:

$$\lambda = -\frac{i}{4} \frac{\wp'(a) - \wp'(c)}{\wp(a) - \wp(c)}. \quad (36)$$

Эдесь c – новый спектральный параметр, через посредство которого γ переписывается как

$$\gamma = \wp(c + a) - \wp(c). \quad (37)$$

Параметризация для λ с помощью уравнений (4), (5) и формул сложения для функций Вейерштрасса (см., например, [16]) может быть непосредственно найдена из соотношения

$$\gamma = -4\lambda^2 - \wp(a) - 2\wp(c).$$

Подстановка (35) в (31) дает

$$\frac{\partial \xi_2^2}{\partial x} = i \left[\varphi' + 2\lambda - i \frac{\wp'(x') + \wp'(c)}{\wp(x') - \wp(c)} \right] \xi_2^2. \quad (38)$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$\phi = \frac{\sigma^2(x' - c)}{\sigma^2(x')} e^{[\zeta(a+c) - \zeta(a) + \zeta(c)]x}.$$

Отсюда согласно определению (29) с учетом формулы преобразования σ -функций Вейерштрасса при трансляции на период

$$\sigma(x + 2\omega) = -\sigma(x) \exp[2(x + \omega)\zeta(\omega)]$$

можно явно выразить квазиимпульс через новый спектральный параметр c :

$$p = q(a + c) + q(c), \quad (39)$$

где функция

$$q(b) = -i \left[\zeta(b) - b \frac{\zeta(\omega)}{\omega} \right]$$

совпадает с выражением для квазиимпульса (10) стационарной волны. Функция $q(b)$ принимает действительные значения на линиях $\operatorname{Re} b = 0$ и $\operatorname{Re} b = \omega$. В частности,

$q(b) = 0$ при $b = \omega$. Эта функция растет с увеличением мнимой части b при движении вдоль линии $\operatorname{Re} b = \omega$, достигая своего максимального значения $\pi/2\omega$ при $b = \omega + i\omega'$. То же самое значение $q(b)$ имеет в точке $b = i\omega'$. При изменении b вдоль мнимой оси от $i\omega'$ до нуля эта функция неограниченно растет.

Кроме того, $q(b)$ антисимметрична относительно замены $\operatorname{Im} b \rightarrow -\operatorname{Im} b$. Важно отметить, что эллиптическая функция $\wp(b)$ на отрезках $(\theta, i\omega')$ и $(\omega, \omega + i\omega')$ принимает чисто действительные значения.

Таким образом, задача об устойчивости кноидальной волны сводится к анализу выражения (37) для γ при дополнительном условии

$$\operatorname{Im} p(c, a) = 0. \quad (40)$$

Последнее задает при фиксированном значении a некоторую кривую на комплексной плоскости параметра c .

4.1. Неустойчивость солитонной решетки для фокусирующей нелинейности. Вначале обратимся к задаче устойчивости для фокусирующей нелинейности. Достаточно просто она может быть проанализирована, если $a = \omega$, что соответствует границе стационарных решений для фокусирующей солитонной решетки с моментом импульса $M = 0$.

Рассмотрим следующую формулу (см. [13]):

$$\wp_1(u) = \wp(u) + \wp(u + \omega) - \wp(\omega).$$

Здесь $\wp_1(u)$ – функция Вейерштрасса с периодом ω (вдоль действительной оси) и с тем же самым периодом вдоль мнимой оси, что и функция $\wp(u)$. Интегрируя это соотношение от 0 до u и учитывая определение ζ -функций, можно получить

$$\zeta_1(u) - \frac{2u}{\omega} \zeta_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \zeta(u) + \zeta(u + \omega) - \frac{2u + \omega}{\omega} \zeta(\omega). \quad (41)$$

Данная формула показывает, что квазиимпульс p в точке $a = \omega$ может быть записан в виде

$$p(c, \omega) = q_1(c).$$

Здесь индекс 1 у q означает, что эта функция определена посредством соотношения (10) с заменой ω на $\omega/2$. Согласно уже описанным свойствам функции q разрешенные отрезки для спектрального параметра c следующие: $\operatorname{Re} c = 0$, $\operatorname{Re} c = \omega/2$, $\operatorname{Re} c = \omega$. Собственная частота γ (37) оказывается чисто действительной на интервалах $\operatorname{Re} c = 0$ и $\operatorname{Re} c = \omega$. Напротив, на интервале $c = \omega/2 + iy$, $-\omega' \leq y \leq \omega'$, собственная частота принимает чисто мнимые значения, что соответствует неустойчивости:

$$\gamma = \wp\left(\frac{\omega}{2} - iy\right) - \wp\left(\frac{\omega}{2} + iy\right) \equiv -2i \operatorname{Im} \wp\left(\frac{\omega}{2} + iy\right). \quad (42)$$

Максимум инкремента Γ неустойчивости может быть найден явно. С помощью соотношения

$$\wp(z + \omega) = e_1 + \frac{(e_1 - e_3)(e_1 - e_2)}{\wp(z) - e_1}$$

получаем, что Γ достигает максимального значения:

$$\Gamma_{\max} = 2\nu^2 s', \quad (43)$$

в точке c , определяемой из уравнения

$$(\wp(c) - e_1)^2 = -(e_1 - e_3)(e_1 - e_2).$$

В пределе $\omega'/\omega \rightarrow \infty$ ($s' \rightarrow 1$) выражение для инкремента (43) переходит в (22) для монохроматической волны. В обратном предельном случае $\omega/\omega' \rightarrow \infty$ (что соответствует переходу к солитону) инкремент стремится к нулю как s' :

$$\Gamma = 8 \left(\frac{\pi}{\omega'} \right)^2 \exp \left(-\frac{\pi\omega}{\omega'} \right). \quad (44)$$

В общем случае, когда угловой момент не равен нулю, неустойчивость остается. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим возмущения с малыми квазиимпульсами $|p(a, c)\omega| \ll 1$. Как видно из (42), собственная частота обращается в нуль в следующих точках:

$$2c + a = 0 \pmod{2\omega, 2i\omega'}. \quad (45)$$

Вблизи этих точек (42) и (39) дают

$$\gamma = -i \frac{\wp'(\frac{a}{2} + \frac{T}{2})}{\wp(\frac{a}{2} + \frac{T}{2}) + \frac{\zeta(\omega)}{\omega}} \delta q, \quad (46)$$

где δq – приведенное значение квазиимпульса, а $T/2$ – любой из полупериодов: $\pm\omega$, $\pm\omega \pm i\omega'$, $\pm i\omega'$ или 0. Для $a = \omega + i\gamma$ функция γ содержит ненулевую мнимую часть, которая изменяет свой знак при изменении знака δq , так что всегда найдутся возмущения с положительным инкрементом. В общем случае кривая $\text{Im } p(c, a) = 0$ для неустойчивых мод включает точки (45). В частности, при $a = \omega$ эта кривая трансформируется в прямую линию $\text{Re } c = \omega/2$. Что касается линий $\text{Re } c = 0, \omega$, то они являются все еще разрешенными и в общем случае. Соответствующие им собственные частоты γ остаются чисто действительными.

Таким образом, мы показали, что в фокусирующем случае солитонная решетка подвержена модуляционной неустойчивости. В пределе больших ω инкремент неустойчивости становится экспоненциально малым. Важно, что фазовая модуляция ($M \neq 0$) солитонной решетки не может препятствовать неустойчивости.

4.2. Устойчивость солитонной решетки в дефокусирующих средах. Обратимся теперь к дефокусирующему случаю. Рассмотрим уравнение (40) с $\operatorname{Re} a = 0$:

$$\operatorname{Im} [q(a + c) + q(c)] = 0,$$

которое определяет при заданном a кривую в комплексной плоскости спектрального параметра c . Благодаря свойствам функции $q(a)$ можно видеть, что уравнение (40) удовлетворяется, если $\operatorname{Re} c = 0$, ω , т.е. на прямых, параллельных мнимой оси. Можно показать, что это единственное (с точностью до эквивалентных отрезков) решение этого уравнения. Для всех разрешенных значений спектрального параметра c в соответствии со свойствами симметрии эллиптической функции $\wp(u)$,

$$\wp^*(z^*) = \wp(z) = \wp(-z),$$

и ее периодичностью собственные частоты γ (42), оказываются, принимают чисто действительные значения. Когда спектральный параметр c пробегает свои значения вдоль двух отрезков $(-i\omega', i\omega')$ и $(\omega + i\omega', \omega - i\omega')$, квазиимпульс p дважды покрывает действительную ось, порождая тем самым две ветви устойчивых колебаний. Более того, можно показать, что все собственные функции с параметром c , пробегающим значения вдоль этих двух отрезков $(-i\omega', i\omega')$ и $(\omega + i\omega', \omega - i\omega')$, образуют полный набор функций. Последнее доказывает устойчивость солитонной решетки для дефокусирующих сред.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами построено полное решение задачи об устойчивости солитонной решетки. Оно записывается в терминах функций Вейерштрасса. Мы показали, что решение в форме солитонной решетки неустойчиво относительно модуляционных возмущений для фокусирующей среды. Важно, что неустойчивость не стабилизируется за счет фазовой модуляции солитонной решетки. Когда расстояние между солитонами больше длительности солитона, инкремент неустойчивости оказывается экспоненциально малым. В этом случае в выражении для инкремента нами точно найден предэкспоненциальный множитель, что весьма важно с практической точки зрения (в инженерных приложениях используется аспектное отношение, близкое к 5). Для дефокусирующей нелинейности доказана устойчивость солитонной решетки во всей области ее параметров, что, по нашему мнению, дает определенное преимущество в применении темных солитонов в световолоконных линиях связи по сравнению с яркими солитонами.

Необходимо сказать, что использование ярких солитонов в световолоконных коммуникациях всегда будет источником их неустойчивости вследствие межсолитонного перекрытия. Это обстоятельство будет все более и более проявляться по мере роста информационных потоков в световолоконных линиях связи. Если к тому же учесть, что реальные коммуникационные системы далеки от идеальных, описываемых с помощью

НУШ (1), т.е. влияние на динамику солитонов диссипации, усиления и т.д. существенно, то становится ясным, что использовать дефокусирующие режимы более предпочтительно, чем фокусирующие. По крайней мере, в одном аспекте – в отсутствии модуляционной неустойчивости – кодирование информации с помощью темных солитонов предпочтительней использования ярких солитонов.

Благодарности. Работа Е.К. частично была поддержана грантом ИНТАС 96-0413 и грантом РФФИ 97-01-00093.

Список литературы

- [1] *A. Hasegawa, F. Tappet.* Appl. Phys. Lett. 1973. V. 23. P. 142.
- [2] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118.
- [3] *C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. B. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
- [4] *L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, M. N. Islam.* Opt. Lett. 1985. V. 10. P. 229.
- [5] *L. F. Mollenauer, E. Lichtman, M. J. Neibelt, G. T. Harvey.* Electron. Lett. 1993. V. 29. P. 910.
- [6] *L. F. Mollenauer, J. P. Gordon, P. V. Mamyshev.* Solitons in high bit-rate, long-distance transmission. In: Optical Fiber Telecommunications. Vol. III A. Chap. 12. Eds. I. P. Karamzin, T. L. Koch. San Diego: Academic Press, 1997. P. 373.
- [7] *T. V. Benjamin, J. E. Feir.* J. Fluid Mech. 1967. V. 27. P. 417.
- [8] *V. E. Zakharov.* Collapse and Self-Focusing of the Langmuir Waves. In: Handbook of Plasma Physics. V. 3. Eds. A. Galeev, R. Sudan. Amsterdam: Elsevier, 1984. P. 81.
- [9] *M. D. Spector.* 1988 (unpublished).
- [10] *E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, G. E. Falkovich.* Physica D. 1984. V. 10. P. 379.
- [11] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. С. 13.
- [12] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* ЖЭТФ. 1972. Т. 64. С. 1627.
- [13] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* Курс современного анализа. В двух частях. М.: Физматгиз, 1962–1963.
- [14] *Е. А. Кузнецов, А. В. Михайлов.* ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 1717.
- [15] *Е. А. Кузнецов.* ДАН СССР. 1977. Т. 326. С. 575.
- [16] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 29.X.1998 г.