Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Л. Воронов, И. В. Тютин, Ш. С. Шахвердиев, О локальных операторах в вариационных производных в теории поля, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 256–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf774>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:07:06

© 1999 г. Б. Л. Воронов*, И. В. Тютин*, Ш. С. Шахвердиев†

О ЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ВАРИАЦИОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Развит математически последовательный формализм, в котором результат действия локальных дифференциальных операторов в вариационных производных высших порядков на локальные функционалы не содержит неопределенных выражений типа $\delta(0)$. Предлагаемый формализм применяется к формулировке Баталина–Вилковского локальной калибровочной теории поля общего вида и ее $Sp(2)$ -симметричному обобщению. Обсуждается связь с квазиклассическим разложением.

1. ВВЕДЕНИЕ

В функциональном формализме локальной квантовой теории поля нередко приходится сталкиваться с трудностью, имеющей жаргонное название “трудность $\delta(0)$ ”. Суть ее может быть проиллюстрирована следующим простым примером. Пусть $S(\varphi)$ – локальный функционал поля $\varphi(x)$, например действие,

$$S(\varphi) = \int dx \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \dots), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Тогда вторая вариационная производная $\delta^2 S(\varphi)/\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)$ этого функционала есть квазилокальная обобщенная функция (уточнение понятия квазилокальной обобщенной функции см. в п. 2.3), символически $\delta^2 S(\varphi)/\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2) \sim \delta(x_1 - x_2)$. Соответственно локальные дифференциальные операторы в вариационных производных второго порядка вида

$$\Delta_2 = \int dx E_2(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \dots) \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}$$

не определены на локальных функционалах: $\Delta_2 S \sim \delta(0)$. Не определены такие операторы и на произведениях $S_1(\varphi)S_2(\varphi) \dots$ локальных функционалов и вообще на функциях $f(S_1, S_2, \dots)$ от последних, если принимать стандартные правила Лейбница

$$\begin{aligned} \Delta_2(S_1(\varphi)S_2(\varphi) \dots) &= (\Delta_2 S_1(\varphi))S_2(\varphi) \dots + \\ &+ 2 \int dx E_2(\dots) \frac{\delta S_1}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta S_2}{\delta\varphi(x)} \dots + S_1(\Delta_2 S_2) \dots + \dots \end{aligned}$$

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: voronov@td.lpi.ac.ru; tyutin@td.lpi.ac.ru

†Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: shahv@td.lpi.ac.ru

Аналогичные утверждения справедливы для высших вариационных производных $\delta^n S(\varphi)/\delta\varphi(x_1)\dots\delta\varphi(x_n)$, $n > 2$, и соответственно для локальных дифференциальных операторов высшего порядка

$$\Delta_n = \int dx E_n(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \dots) \left(\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \right)^n.$$

Между тем появление подобных операторов неизбежно в локальной теории поля. Например, они возникают при рассмотрении локальных замен переменных в определяющих теорию функциональных интегралах, в частности при поисках инвариантной меры интегрирования в локальных калибровочных теориях общего вида. Более того, оператор вида Δ_2 лежит в основании квантования Баталина–Вилковыского (БВ) калибровочных теорий [1]. Появляющаяся при этом величина $\delta(0)$ должна компенсироваться соответствующей “локальной мерой”, которая изначально сингулярна.

Случается, как например в теориях Янга–Миллса или суперсимметричных теориях, что коэффициент при $\delta(0)$ по специфическим алгебраическим причинам оказывается равным нулю с самого начала, тогда неопределенность $0 \times \infty$ разрешается в пользу нуля.

В общем случае стандартный способ обхода трудности $\delta(0)$ состоит в применении рассуждений типа: “при использовании размерной регуляризации соответствующая сингулярность, пропорциональная $\delta(0)$, равна нулю” [2]. Короче, принимается формальное правило “ $\delta(0) = 0$ ” на промежуточных этапах формулировки. Успешный опыт работы с этим правилом заставляет предположить возможность такого математически последовательного формализма, в котором величина $\delta(0)$ не возникает вовсе. В данной работе мы реализуем такую возможность. В предлагаемом формализме избавление от $\delta(0)$ является следствием определений. Этот формализм применяется прежде всего к БВ-формулировке локальной калибровочной теории общего вида. Оказывается, что вся содержательная часть теории остается при этом неизменной.

Предлагаемый формализм специфичен именно для локальной теории поля и не имеет прямых аналогов в теории функций конечного числа переменных. Это лишний раз предостерегает [3] против возможных попыток оправдывать некоторые, иногда основополагающие, утверждения в локальной теории поля ссылками на конечномерные аналоги, тем более заменять доказательства такими ссылками. С другой стороны, как будет видно ниже, предлагаемый формализм реализует последовательное квазиклассическое (по постоянной Планка $\hbar$) квантование.

В разделе 2 дается определение рассматриваемых классов функционалов и операторов, формулируются правила действия операторов на функционалы и обсуждаются их свойства. В разделе 3 рассмотрены специальный класс операторов вида $\exp \nabla$ и специальный класс функционалов вида $\exp S$, а также связь предлагаемого формализма с квазиклассическим разложением. В разделе 4 рассмотрены локальные замены переменных. В разделе 5 обсуждается применение предлагаемого формализма к БВ-формулировке калибровочных теорий и в разделе 6 – к ее $Sp(2)$ -симметричному обобщению.

2. ФУНКЦИОНАЛЫ, ОПЕРАТОРЫ ∇

2.1. Поля. Исходные поля будем обозначать через $\Gamma = \{\Gamma^A(x)\}$ и использовать сокращенные обозначения типа $\Gamma^{A_k} = \Gamma^{A_k}(x_k)$, $E_n^{(A)^n} = E_n^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma)$. Поля принимают значения в алгебре Березина, включающей равноправно бозе- и ферми-поля, их грассмановы четности обозначаются через $\varepsilon(\Gamma^A) = \varepsilon_A$. Производные по полям левые,

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma^{A_k}(x_k)} = \delta_{A_k}, \quad \varepsilon(\delta_{A_k}) = \varepsilon_{A_k}.$$

Кроме того, используются следующие сокращения:

$$(\delta_A)^n = \delta_{A_1} \dots \delta_{A_n}, \quad \varepsilon((\delta_A)^n) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{A_k},$$

$$(A)_m = A_1 \dots A_m.$$

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование (интегрирование).

2.2. Функционалы. Существенным для дальнейшего является ограничение на класс рассматриваемых функционалов Φ полей Γ . Этот класс включает всевозможные гладкие локальные функционалы $S_i(\Gamma)$, $i = 1, 2, \dots$, с определенной грассмановой четностью $\varepsilon(S_i) = \varepsilon(i)$ вида

$$S_i(\Gamma) = \int dx \mathcal{L}_i(x, \Gamma(x), \partial_\mu \Gamma(x), \dots), \quad (1)$$

где локальная плотность $\mathcal{L}_i$ — гладкая функция координат x , полей $\Gamma(x)$ и их производных конечного порядка. Локальность функционала $S(\Gamma)$ означает, что его вариационные производные

$$(\delta_A)^n S(\Gamma) = \frac{\delta}{\delta \Gamma^{A_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \Gamma^{A_n}(x_n)} S(\Gamma)$$

являются квазилокальными обобщенными функциями. Символически это можно записать как

$$(\delta_A)^n S(\Gamma) \sim \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_{n-1} - x_n).$$

Функционалы Φ общего вида — это гладкие функции локальных функционалов

$$\Phi(\Gamma) = f(S_1, S_2, \dots) = f(S) \quad (2)$$

обычно с определенной грассмановой четностью $\varepsilon(f)$. Будем называть такие функционалы мультилокальными функционалами. Производные по S_i левые,

$$\frac{\partial}{\partial S_i} = \partial_i, \quad \varepsilon(\partial_i) = \varepsilon(i).$$

Ниже будут использоваться следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned}(S_i)^n &= S_{i_1} \dots S_{i_n}, & \varepsilon((S_i)^n) &= \sum_{k=1}^n \varepsilon(i_k), \\ (\delta_A S_i)^n &= \delta_{A_1} S_{i_1} \dots \delta_{A_n} S_{i_n}, & \varepsilon((\delta_A S_i)^n) &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_{A_k} + \sum_{k=1}^n \varepsilon(i_k), \\ (\delta_A \circ S_i)^n &= (\delta_A S_i)^n (-1)^{\sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(i_j) \sum_{k=j+1}^n \varepsilon_{A_k}}, \\ f_{,i_1 \dots i_n} &= \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} f, \\ (i)_n &= i_1 \dots i_n, & \overleftarrow{(i)}_n &= i_n \dots i_1,\end{aligned}$$

так что, например,

$$f_{, (i)_n} = f_{, i_1 \dots i_n}, \quad f_{, \overleftarrow{(i)}_n} = f_{, i_n \dots i_1}.$$

2.3. Локальные дифференциальные операторы ∇ . Определим на рассматриваемом пространстве функционалов мультилокальные дифференциальные операторы. Мультилокальность в данном случае означает, что образ оператора лежит в том же пространстве мультилокальных функционалов.

Начнем с однородных локальных дифференциальных операторов ∇_n произвольного порядка n . Рассмотрим локальное дифференциальное выражение

$$\nabla_n = \int dx_1 \dots dx_n E_n^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma) \frac{\delta}{\delta \Gamma^{A_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \Gamma^{A_n}(x_n)} = E_n^{(A)_n} (\delta_A)^n, \quad (3)$$

обладающее определенной грассмановой четностью $\varepsilon(\nabla_n)$, с коэффициентными функциями

$$\begin{aligned}E_n^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma) &= \sum_{m_1 \dots m_n} \int dx E_n^{A_1 \dots A_n}_{|m_1 \dots m_n}(x, \Gamma(x), \partial_\mu \Gamma(x), \dots) \times \\ &\times \prod_{k=1}^n (\partial_\mu)^{m_k} \delta(x - x_k),\end{aligned} \quad (4)$$

где $E_n^{A_1 \dots A_n}_{|m_1 \dots m_n}(x, \Gamma(x), \partial_\mu \Gamma(x), \dots)$ — гладкие функции своих аргументов. Коэффициентные функции $E_n^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma) = E_n^{(A)_n}$ — обобщенные функции по пространственным аргументам $x_1, \dots, x_n$ с носителем в совпадающих точках $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Следуя установившейся в теории поля традиции [4], будем называть такие обобщенные функции квазилокальными. Функции $E_n^{(A)_n}$ локально зависят от поля Γ , так что вариационные производные $\delta_{A_{n+1}} \dots \delta_{A_{n+m}} E_n^{(A)_n}$ являются квазилокальными обобщенными функциями по всем пространственным аргументам $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$. Функции $E_n^{(A)_n}$ симметричны относительно одновременных перестановок индексов и координат

$$\begin{aligned}E_n^{A_1 \dots A_k A_{k+1} \dots A_n}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n; \Gamma) &= \\ &= (-1)^{\varepsilon_{A_k} \varepsilon_{A_{k+1}}} E_n^{A_1 \dots A_{k+1} A_k \dots A_n}(x_1, \dots, x_{k+1}, x_k, \dots, x_n; \Gamma)\end{aligned}$$

и обладают грассмановой четностью

$$\varepsilon(E_n^{(A)_n}) = \varepsilon(\nabla_n) + \sum_1^n \varepsilon_{A_k}.$$

Оператор ∇_n на функционалах $f(S)$ определяется следующим образом:

$$(\nabla_n f)(S) = E_n^{(A)_n}(\delta_A \circ S_i)^n f_{,\overleftarrow{(i)_n}}(S) \equiv S_{\nabla_n(i)_n} f_{,\overleftarrow{(i)_n}}(S), \quad (5)$$

где

$$S_{\nabla_n(i)_n} = S_{\nabla_n(i)_n}[S] = \frac{1}{n!} \nabla_n(S_i)^n = E_n^{(A)_n}(\delta_A \circ S_i)^n$$

— производный от $S_{i_1}, \dots, S_{i_n}$ **локальный** функционал с единым (мульти)индексом “ $\nabla_n(i)_n$ ”, а

$$\varepsilon(S_{\nabla_n(i)_n}) = \varepsilon(\nabla_n) + \sum_{k=1}^n \varepsilon(i_k).$$

Очевидно, что $(\nabla_n f)(S)$ есть функционал рассматриваемого вида. Разумеется, определение (5) распространяется и на тот случай, когда функционалы S_i не обязательно локальны.

Общий локальный дифференциальный оператор ∇ является линейной комбинацией операторов ∇_n ,

$$\nabla = \sum_{n=0} c_n \nabla_n,$$

где c_n — константы (не зависят от x и Γ). $\nabla_0 = S_0$ — произвольный локальный функционал: формула (5) позволяет считать оператор умножения на локальный функционал дифференциальным оператором нулевого порядка. Ниже мы распространяем это определение на бесконечные суммы и оперируем в таком случае с формальными рядами, откладывая вопрос о смысле сходимости этих рядов.

Общий вид операторов, которые “хорошо” определены на рассматриваемом пространстве мультилокальных функционалов, — это произвольные гладкие функции $\omega(\nabla) = \omega(\nabla_{n_1}, \nabla_{n_2}, \dots)$ локальных операторов ∇_n . Мы будем называть их мультилокальными операторами. Будем считать, что функции ω заданы в виде формальных рядов, что также определяет правило действия мультилокальных операторов на мультилокальные функционалы. Очевидно, что образ мультилокального оператора принадлежит пространству мультилокальных функционалов.

Вернемся к определению дифференциального оператора ∇_n . Данное определение этого оператора по дифференциальному выражению (3) отличается от стандартного определения, задающего оператор Δ_n (ниже мы будем называть такие операторы каноническими дифференциальными операторами), тем дополнительным требованием, что “запрещается” действовать двум и более производным $\delta/\delta\Gamma^A(x)$ в одной и той же точке x на один и тот же локальный функционал. Это требование эквивалентно правилу

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma^{A_1}(x)} \frac{\delta}{\delta\Gamma^{A_2}(x)} S(\Gamma) = 0,$$

т.е. предписанию $\delta(0) = 0$, в частности,

$$\nabla_n(S_i)^m = 0, \quad n \geq m + 1.$$

Соотношение между операторами ∇_n и Δ_n можно пояснить также с точки зрения квазиклассического разложения. Давно замечено, что в квантовой теории появление величины $\delta(0)$ сопровождается дополнительной малостью по степеням постоянной Планка $\hbar$, параметра квазиклассического разложения (разложения по петлям). Соответственно оператор ∇_n , отвечающий дифференциальному выражению (3), можно рассматривать как главное квазиклассическое приближение к каноническому дифференциальному оператору Δ_n . Точный смысл этого утверждения состоит в следующем. Произведем подстановки $S_i \rightarrow S_i/\hbar$, $f(S) \rightarrow f(S/\hbar)$ в функционалах, $\delta/\delta\Gamma \rightarrow \hbar\delta/\delta\Gamma$ в производных по полям и, наконец, подстановку

$$\nabla_n \rightarrow \nabla_n(\hbar) = \frac{1}{\hbar} E_n^{(A)n} (\hbar\delta_A)^n$$

в дифференциальном выражении (3).

Чтобы нижеследующая формула имела смысл, необходимо отказаться от локальности либо дифференциальных операторов, регуляризовав их коэффициентные функции $E_n^{(A)n}(x_1, \dots, x_n)$, либо функционалов, считая функционалы S_i регуляризованными нелокальными функционалами (можно, естественно, принять и то, и другое). Тогда нетрудно видеть, что для действия канонического оператора $\Delta_n(\hbar)$ на функционал $f(S/\hbar)$ имеем

$$\Delta_n(\hbar)f\left(\frac{S}{\hbar}\right) = \left(\frac{1}{\hbar} S_{\nabla_n(i)_n}\right) f, \overleftarrow{(i)_n} \left(\frac{S}{\hbar}\right) + \sum_{k=1}^n \hbar^k \left(\frac{1}{\hbar} S_{\nabla_n(i)_{n-k}}\right) f, \overleftarrow{(i)_{n-k}} \left(\frac{S}{\hbar}\right),$$

где функционалы

$$S_{\nabla_n(i)_{n-k}} = E_n^{(A)k(B)n-k} (\delta_A)^k (\delta_B \circ S_i)^{n-k},$$

так что

$$\Delta_n(\hbar)f\left(\frac{S}{\hbar}\right) = \nabla_n(\hbar)f\left(\frac{S}{\hbar}\right) + O\left(\hbar, \frac{S}{\hbar}\right)$$

и $O(\hbar, S/\hbar)$ как функция $S/\hbar$ имеет ненулевой порядок малости по $\hbar$. При снятии регуляризации функционалы $S_{\nabla_n(i)_{n-k}}$ ($k \geq 1$), а с ними и $O(\hbar, S/\hbar)$ становятся сингулярностями, пропорциональными $\delta(0)$.

Удобно сопоставить оператору ∇_n его символ $\tilde{\nabla}_n = \tilde{\nabla}_n(\Gamma, p)$, являющийся функционалом полей $\Gamma = \{\Gamma^A(x)\}$ и сопряженных им переменных $p = \{p_A(x)\}$, $\varepsilon(p_A) = \varepsilon(\Gamma^A) = \varepsilon_A$. Этот символ получается из дифференциального выражения (3) формальной заменой символа вариационной производной $\delta/\delta\Gamma^A(x)$ на переменную $p_A(x)$, т.е.

$$\tilde{\nabla}_n = \int dx_1 \dots dx_n E_n^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma) p_{A_1}(x_1) \dots p_{A_n}(x_n) = E_n^{(A)n}(p_A)^n.$$

2.4. Алгебра операторов. Рассматриваемое пространство функционалов замкнуто относительно действия мультилокальных операторов $\omega(\nabla)$, которые поэтому образуют ассоциативную алгебру.

Алгебра локальных операторов как ассоциативная алгебра не замкнута в себе. Произведение двух операторов $\nabla_n \nabla_m$ не есть локальный дифференциальный оператор типа ∇ . Действительно, результат действия (билокального) оператора $\nabla_n \nabla_m$ на функционал $f(S)$ будет содержать вторые вариационные производные локальных функционалов S_i в разных точках, что невозможно при действии локального оператора типа ∇ .

Однако как алгебра Ли алгебра операторов ∇ оказывается замкнутой, т.е. если операторы $\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}$ локальны, то их коммутатор

$$[\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}] = \nabla^{(1)} \nabla^{(2)} - (-1)^{\varepsilon(\nabla^{(1)})\varepsilon(\nabla^{(2)})} \nabla^{(2)} \nabla^{(1)}$$

оказывается тоже локальным дифференциальным оператором. Другими словами, можно сказать, что пространство локальных операторов замкнуто относительно операции ad ,

$$\text{ad } \nabla^{(1)}(\nabla^{(2)}) = [\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}] = \nabla^{(3)}. \quad (6)$$

Достаточно убедиться в этом для однородных операторов ∇_n . Если операторы

$$\nabla_m = E_m^{(A)m} (\delta_A)^m, \quad \nabla_n = E_n^{(A)n} (\delta_A)^n$$

локальны, то коммутатор

$$\begin{aligned} [\nabla_m, \nabla_n] &= m E_m^{C(A)m-1} \delta_C E_n^{(B)n} (-1)^{\varepsilon(E_n^{(B)n}) \sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_{A_k}} (\delta_A)^{m-1} (\delta_B)^n - \\ &- (-1)^{\varepsilon(\nabla_m)\varepsilon(\nabla_n)} n E_n^{C(A)n-1} \delta_C E_m^{(B)m} \times \\ &\times (-1)^{\varepsilon(E_m^{(B)m}) \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{A_k}} (\delta_A)^{n-1} (\delta_B)^m \equiv \\ &\equiv E_{m+n-1}^{([m,n])(A)m+n-1} (\delta_A)^{m+n-1} = \nabla_{m+n-1}^{([m,n])} \end{aligned}$$

также локален. Действительно, определяемые предпоследним равенством коэффициенты функции $E_{m+n-1}^{([m,n])(A)m+n-1}$ суть квазилокальные обобщенные функции по всем координатам $x_1, \dots, x_{n+m-1}$ (поскольку они фактически являются свертками квазилокальных обобщенных функций). В классе функций, симметричных относительно одновременных перестановок координат и индексов, они определяются однозначно. Этот факт простым образом формулируется на языке символов $\tilde{\nabla}$. Рассмотрим алгебру Ли функционалов $F(\Gamma, p)$, порождаемую канонической скобкой Пуассона. Если $F = F(\Gamma, p)$, $G = G(\Gamma, p)$, то

$$\{F, G\} = \frac{\delta_r F}{\delta p_A} \frac{\delta G}{\delta \Gamma^A} - (-1)^{\varepsilon(F)\varepsilon(G)} \frac{\delta_r G}{\delta p_A} \frac{\delta F}{\delta \Gamma^A}.$$

Здесь и ниже индекс r при символе производной означает правую производную. Переменные Γ и p сопряжены именно в смысле этой скобки, т.е.

$$\{p_A(x_1), \Gamma^B(x_2)\} = \delta_A^B \delta(x_1 - x_2).$$

Нетрудно убедиться, что если $\tilde{\nabla}_m, \tilde{\nabla}_n$ — символы операторов ∇_m и ∇_n , соответственно, а $\tilde{\nabla}_{m+n-1}^{([m,n])}$ — символ их коммутатора, то

$$\tilde{\nabla}_{m+n-1}^{([m,n])} = \{\tilde{\nabla}_m, \tilde{\nabla}_n\}.$$

На любые операторы ∇ этот результат переносится по линейности.

3. ОПЕРАТОРЫ $\exp \nabla$ И ФУНКЦИОНАЛЫ $\exp S$

В дальнейшем нам понадобятся мультилокальные операторы вида $\exp \nabla$, понимаемые как формальные ряды

$$e^{\nabla} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \nabla^n.$$

Значение этих операторов определяется тем, что с их помощью записываются многие преобразования в теории поля, в частности замена переменных $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ в функционалах.

Остановимся на свойствах этих операторов, вытекающих из только что доказанного факта замкнутости алгебры Ли операторов ∇ или, эквивалентно, замкнутости множества этих операторов относительно операции ad : если $\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}$ – локальные дифференциальные операторы, то $\text{ad } \nabla^{(1)}(\nabla^{(2)}) = [\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}]$ также локальный дифференциальный оператор. По индукции можно показать, что то же самое верно для операторов

$$(\text{ad } \nabla^{(1)})^n(\nabla^{(2)}) = \underbrace{[\nabla^{(1)}, [\nabla^{(1)}, \dots, [\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}] \dots]]}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а следовательно, и для оператора

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^{\nabla^{(1)}})(\nabla^{(2)}) &\equiv e^{\nabla^{(1)}} \nabla^{(2)} e^{-\nabla^{(1)}} = e^{\text{ad } \nabla^{(1)}}(\nabla^{(2)}) = \\ &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} (\text{ad } \nabla^{(1)})^n(\nabla^{(2)}) = \nabla^{(3)}, \end{aligned} \quad (7)$$

т.е. $\nabla^{(3)}$ есть локальный оператор. Другими словами, пространство локальных дифференциальных операторов замкнуто и относительно операции Ad . Кроме того, выполняется равенство

$$e^{\nabla^{(1)}} e^{\nabla^{(2)}} = e^{\nabla^{(3)}}, \quad (8)$$

где $\nabla^{(3)}$ – локальный дифференциальный оператор. Этот факт является прямым следствием формулы Бейкера–Хаусдорфа–Дынкина [5],

$$\nabla^{(3)} = \nabla^{(1)} + \nabla^{(2)} + \frac{1}{2} [\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}] + \dots,$$

где многоточие символизирует ряд по повторным коммутаторам $\nabla^{(1)}$ и $\nabla^{(2)}$. Другими словами, множество операторов вида $\exp \nabla$ замкнуто относительно ассоциативного умножения (и естественным образом определяет соответствующую ассоциативную алгебру).

В квантовой теории особую роль играют функционалы $f(S) = \exp S$, где S – локальный функционал вида (1). Ниже мы ограничимся случаем, когда S – бозевские функционалы, $\varepsilon(S) = 0$. Для таких функционалов действие локального оператора $\nabla = \sum_{n=0} c_n \nabla_n$ сводится к умножению на локальный функционал

$$\nabla e^S = S_{\nabla}[S] e^S, \quad S_{\nabla}[S] = \sum_{n=0} c_n \frac{1}{n!} \nabla_n S^n = \sum_{n=0} c_n E_n^{(A)n} (\delta_A S)^n. \quad (9)$$

Оказывается, что множество функционалов этого вида замкнуто относительно действия операторов $\exp \nabla$:

$$e^{\nabla} e^S = e^{S'}, \quad (10)$$

где S' – локальный функционал. Для доказательства рассмотрим однопараметрическое семейство операторов $\exp(\alpha \nabla)$, где $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда

$$e^{\alpha \nabla} e^S = e^{S'(\alpha)}, \quad (11)$$

где функционал $S'(\alpha)$ гладко зависит от α , $S'(0) = S$, $S'(1) = S'$,

$$S'(\alpha) = S + \alpha S^{(1)} + \dots = \sum_{m=0} \alpha^m S^{(m)}, \quad S^{(0)} = S. \quad (12)$$

Для функционала (12) можно получить дифференциальное уравнение. Дифференцируя соотношение (11) по α , имеем

$$\nabla e^{S'(\alpha)} = \frac{\partial S'(\alpha)}{\partial \alpha} e^{S'(\alpha)}.$$

Однако согласно формулам (9), справедливым и для не обязательно локальных функционалов, находим

$$\begin{aligned} \nabla e^{S'(\alpha)} &= S_{\nabla}[S'(\alpha)] e^{S'(\alpha)}, \\ S_{\nabla}[S'(\alpha)] &= \sum_{n=0} c_n E_n^{(A)n} (\delta_A S'(\alpha))^n. \end{aligned}$$

Окончательно получаем дифференциальное уравнение для $S'(\alpha)$

$$\frac{\partial S'(\alpha)}{\partial \alpha} = S_{\nabla}[S'(\alpha)] \quad (13)$$

с начальным условием

$$S'(0) = S. \quad (14)$$

В классе гладких по α функционалов решение уравнения (13) при условии (14) единственно. Именно, подставляя в (13) разложение (12), получаем для $S^{(m)}$ рекуррентные соотношения. В частности,

$$S^{(1)} = S_{\nabla}[S].$$

Интересно, что алгебра локальных операторов, в частности операция $\exp \nabla$, согласована с квазиклассическим разложением в следующем смысле. Сделаем подстановки

$$\nabla \rightarrow \nabla(\hbar) = \sum_{n=0} c_n \nabla_n(\hbar) = \sum_{n=0} c_n \left(\frac{1}{\hbar} E_n^{(A)n} (\hbar \delta_A)^n \right), \quad S \rightarrow \frac{1}{\hbar} S.$$

Рассмотрим тройку операторов $\nabla^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда оказывается, что если операторы $\nabla^{(i)}$ связаны соотношением (6), то то же верно и для операторов $\nabla^{(i)}(\hbar)$, т.е.

$$[\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}] = \nabla^{(3)} \longrightarrow [\nabla^{(1)}(\hbar), \nabla^{(2)}(\hbar)] = \nabla^{(3)}(\hbar).$$

Достаточно в этом убедиться для однородных операторов ∇_n . Как следствие, если $\nabla^{(i)}$ связаны соотношением (7) или (8), то то же верно и для $\nabla^{(i)}(\hbar)$:

$$\begin{aligned} e^{\nabla^{(1)}} \nabla^{(2)} e^{-\nabla^{(1)}} &= \nabla^{(3)} \longrightarrow e^{\nabla^{(1)}(\hbar)} \nabla^{(2)}(\hbar) e^{-\nabla^{(1)}(\hbar)} = \nabla^{(3)}(\hbar), \\ e^{\nabla^{(1)}} e^{\nabla^{(2)}} &= e^{\nabla^{(3)}} \longrightarrow e^{\nabla^{(1)}(\hbar)} e^{\nabla^{(2)}(\hbar)} = e^{\nabla^{(3)}(\hbar)}. \end{aligned}$$

Легко также проверить, что если оператор ∇ и функционалы S и $S_\nabla[S]$ связаны соотношением (9), то аналогичная связь имеет место и для $\nabla(\hbar)$, $S/\hbar$, $S_\nabla/\hbar$ (с тем же самым S_∇), т.е.

$$\nabla(\hbar) e^{\frac{1}{\hbar} S} = \frac{1}{\hbar} S_\nabla[S] e^{\frac{1}{\hbar} S}.$$

Наконец, если оператор ∇ , функционалы S и S' связаны соотношением (10), то справедливо соотношение

$$e^{\nabla(\hbar)} e^{\frac{1}{\hbar} S} = e^{\frac{1}{\hbar} S'},$$

где функционал S' не зависит от $\hbar$. Доказательство повторяет доказательство формулы (10). При этом $\hbar$ сокращается в уравнении для $S'(\alpha)$, которое тождественно совпадает с уравнением (13) при условии (14). Решение $S'(\alpha)$ не зависит от $\hbar$.

4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Мультилокальные функционалы $\Phi(\Gamma)$ и мультилокальные дифференциальные операторы $\omega(\nabla)$ допускают локальные замены переменных

$$\Gamma^A = \Gamma^A(x) \longrightarrow \Gamma'^A = \Gamma'^A(x, \Gamma(x), \partial_\mu \Gamma(x), \dots),$$

где $\Gamma'^A(x, \Gamma(x), \partial_\mu \Gamma(x), \dots)$ — гладкие локальные функции полей $\Gamma(x)$ и их производных (до конечного порядка). Это означает, что $\delta \Gamma'^A(x) / \delta \Gamma^B(y)$ — квазилокальные обобщенные функции:

$$\frac{\delta \Gamma'^A(x)}{\delta \Gamma^B(y)} = P_B^A(x, \Gamma(x), \partial_\mu \Gamma(x), \dots, \partial_\mu) \delta(x - y),$$

где $P_B^A(x, \Gamma(x), \partial_\mu \Gamma(x), \dots, \partial_\mu)$ — полином по производным ∂_μ с коэффициентами, являющимися локальными функциями полей $\Gamma(x)$ и их производных. Предполагается, что замена переменных сохраняет грассманову четность, $\varepsilon(\Gamma'^A) = \varepsilon(\Gamma^A)$. Примем также, что замена является обратимой (по крайней мере, пертурбативно по степеням производных полей Γ), причем обратная замена

$$\Gamma'^A \longrightarrow \Gamma^A = \Gamma^A(x, \Gamma'(x), \partial_\mu \Gamma'(x), \dots)$$

также является локальной,

$$\frac{\delta \Gamma^A(x)}{\delta \Gamma'^B(y)} = Q_B^A(x, \Gamma'(x), \partial_\mu \Gamma'(x), \dots, \partial_\mu) \delta(x - y).$$

Таким образом, локальные замены переменных образуют группу диффеоморфизмов, по крайней мере, в окрестности точки $\Gamma^A = 0$.

Локальные замены переменных естественным образом определяют локальные преобразования функционалов.

Примем, что функционалы $\Phi(\Gamma)$ преобразуются по скалярному (анти)представлению группы диффеоморфизмов, $\Phi'(\Gamma) = \Phi(\Gamma')$. Очевидно, что если $S(\Gamma)$ представляет собой локальный функционал вида (1), то $S'(\Gamma)$ также локален. Для мультилокальных функционалов общего вида (2) имеем

$$(f'(S))(\Gamma) = (f(S'))(\Gamma) = (f(S))(\Gamma').$$

Таким образом, локальные преобразования переводят рассматриваемый класс функционалов в себя.

Соответственно локальные замены переменных индуцируют преобразования локальных дифференциальных операторов ∇ :

$$\nabla_{(\Gamma)} \longrightarrow \nabla'_{(\Gamma)} = \nabla_{(\Gamma')}, \quad (15)$$

определяемые как

$$(\nabla f(S))(\Gamma) = \nabla_{(\Gamma)} f(S(\Gamma)) \longrightarrow (\nabla' f'(S))(\Gamma) = (\nabla f(S))(\Gamma') = \nabla_{(\Gamma')} f(S(\Gamma')).$$

Для дифференциального оператора ∇_n (3), (4) этот закон преобразования имеет вид

$$\nabla'_n = E_n'^{(A)^n} (\delta_A)^n, \quad (16)$$

где

$$E_n'^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma) = \int dy_1 \dots dy_n (-1)^{\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{A_k} \sum_{i=k+1}^n (\varepsilon_{A_i} + \varepsilon_{B_i})} \times \\ \times E_n^{B_1 \dots B_n}(y_1, \dots, y_n; \Gamma') \frac{\delta \Gamma^{A_1}(x_1)}{\delta \Gamma^{B_1}(y_1)} \dots \frac{\delta \Gamma^{A_n}(x_n)}{\delta \Gamma^{B_n}(y_n)}.$$

Коэффициентные функции $E_n^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma)$ преобразуются по тензорному (анти)представлению. Очевидно, что если $E_n^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma)$ – квазилокальная обобщенная функция, то $E_n'^{A_1 \dots A_n}(x_1, \dots, x_n; \Gamma)$ – также квазилокальная обобщенная функция (как свертка квазилокальных функций). Следовательно, оператор ∇'_n является локальным. На произвольные операторы $\nabla = \sum c_n \nabla_n$ правило замены переменных переносится по линейности. Наконец, для мультилокальных операторов $\omega(\nabla)$ правило замены переменных имеет вид

$$\omega(\nabla) \longrightarrow \omega(\nabla').$$

Очевидно, что аналогичные свойства сохраняются, если определить преобразования функционалов и дифференциальных операторов при замене переменных по скалярному представлению

$$\Phi'(\Gamma') = \Phi(\Gamma), \quad \nabla'_{(\Gamma')} = \nabla_{(\Gamma)}.$$

Локальные замены переменных реализуются операторами $\exp \nabla_1$. Именно, имеют место формулы

$$\Gamma'^A(x) = e^{\nabla_1} \Gamma^A(x)$$

с некоторым локальным дифференциальным оператором ∇_1 ,

$$S'(\Gamma) = S(\Gamma') = e^{\nabla_1} S(\Gamma), \quad e^{\nabla_1} f(S) = f(S').$$

Если $\Phi(\Gamma)$ рассматривается как оператор умножения в пространстве функционалов, то

$$e^{\nabla_1} \Phi(\Gamma) e^{-\nabla_1} = \Phi'(\Gamma) = \Phi(\Gamma'),$$

тогда как

$$e^{\nabla_1} \frac{\delta}{\delta \Gamma^A(x)} e^{-\nabla_1} = \frac{\delta}{\delta \Gamma'^A(x)} = \int dy \frac{\delta \Gamma^B(y)}{\delta \Gamma'^A(x)} \frac{\delta}{\delta \Gamma^B(y)}$$

и соответственно

$$e^{\nabla_1} \nabla e^{-\nabla_1} = \nabla'.$$

5. АНТИСКОБКА, МАСТЕР-УРАВНЕНИЕ, КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.1. Антискобка, канонические преобразования. Пусть ∇_2 – локальный дифференциальный оператор второго порядка:

$$\nabla_2 = \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 E_2^{A_1 A_2}(x_1, x_2; \Gamma) \frac{\delta}{\delta \Gamma^{A_1}(x_1)} \frac{\delta}{\delta \Gamma^{A_2}(x_2)}, \quad (17)$$

грассмановой четности 1, $\varepsilon(\nabla_2) = 1$, нильпотентный, т.е.

$$\nabla_2^2 = \frac{1}{2} [\nabla_2, \nabla_2] = 0. \quad (18)$$

Такой оператор определяет билинейную операцию на локальных функционалах, называемую антискобкой. Именно, если S_1, S_2 – любые локальные функционалы, то локальный функционал – антискобка (S_1, S_2) определяется как

$$\begin{aligned} (S_1, S_2) &= (-1)^{\varepsilon(S_1)} \nabla_2(S_1 S_2) = 2(-1)^{\varepsilon(S_1)} S_{\nabla_2 12} = \\ &= \int dx_1 dx_2 E_2^{A_1 A_2}(x_1, x_2; \Gamma) (-1)^{(\varepsilon_{A_2} + 1)\varepsilon(S_1)} \frac{\delta S_1}{\delta \Gamma^{A_1}(x_1)} \frac{\delta S_2}{\delta \Gamma^{A_2}(x_2)}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\varepsilon((S_1, S_2)) = \varepsilon(S_1) + \varepsilon(S_2) + 1.$$

Теперь можно написать (см. (5)), что

$$\nabla_2 f(S) = \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon(S_{i_1})} (S_{i_1}, S_{i_2}) f_{, i_2 i_1}(S). \quad (20)$$

Антискобку удобно представить в виде

$$(S_1, S_2) = \int dx_1 dx_2 \frac{\delta_r S_1}{\delta \Gamma^{A_1}(x_1)} \tilde{E}_2^{A_1 A_2}(x_1, x_2; \Gamma) \frac{\delta S_2}{\delta \Gamma^{A_2}(x_2)},$$

где метрический тензор антискобки $\tilde{E}_2^{A_1 A_2}$ есть

$$\tilde{E}_2^{A_1 A_2} = (-1)^{\varepsilon_{A_1}(\varepsilon_{A_2}+1)} E_2^{A_1 A_2} = -(-1)^{(\varepsilon_{A_1}+1)(\varepsilon_{A_2}+1)} \tilde{E}_2^{A_2 A_1}. \quad (21)$$

Очевидно, что антискобка обладает свойством антисимметрии

$$(S_1, S_2) = -(-1)^{(\varepsilon(S_1)+1)(\varepsilon(S_2)+1)} (S_2, S_1).$$

Как следует из формул (19), (20), свойство нильпотентности (18) эквивалентно тождеству Якоби для антискобки, т.е.

$$\nabla_2^2(S_1 S_2 S_3) \equiv 0 \longrightarrow (-1)^{(\varepsilon(S_1)+1)(\varepsilon(S_3)+1)} (S_1, (S_2, S_3)) + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0. \quad (22)$$

В терминах коэффициентных функций $\tilde{E}_2^{A_1 A_2}$ это свойство означает (достаточно в (22) взять $S_1 = \Gamma^A(x)$, $S_2 = \Gamma^B(y)$, $S_3 = \Gamma^C(z)$), что

$$(-1)^{(\varepsilon_A+1)(\varepsilon_C+1)} \int du \tilde{E}_2^{AD}(x, u; \Gamma) \frac{\delta}{\delta \Gamma^D(u)} \tilde{E}_2^{BC}(y, z; \Gamma) + \text{цикл}(A, B, C) = 0$$

или в сокращенных обозначениях

$$(-1)^{(\varepsilon_A+1)(\varepsilon_C+1)} \tilde{E}_2^{AD} \delta_D \tilde{E}_2^{BC} + \text{цикл}(A, B, C) = 0. \quad (23)$$

Конечно, справедливо и обратное. Если тензор $\tilde{E}_2^{A_1 A_2}$ удовлетворяет условию антисимметрии (21) и тождеству Якоби (23), то оператор ∇_2 (17) с тензором $\tilde{E}_2^{A_1 A_2}$, определяемым соотношением (21), является нильпотентным.

Стандартно полагается, что при замене переменных $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ антискобка преобразуется, $(.,.) \rightarrow (.,.)'$ (штрих при скобке есть символ новой антискобки), по следующему правилу:

$$(S_1, S_2)(\Gamma) \longrightarrow (S_1, S_2)(\Gamma') = (S'_1, S'_2)'(\Gamma) = \delta_{rA} S'_1 \tilde{E}_2'^{AB} \delta_B S'_2(\Gamma),$$

откуда следует, что метрический тензор антискобки преобразуется по тензорному (анти)представлению

$$\tilde{E}_2'^{A_1 A_2}(x_1, \dots, x_n; \Gamma) = \int dy_1 dy_2 \frac{\delta_r \Gamma^{A_1}(x_1)}{\delta \Gamma'^{B_1}(y_1)} \tilde{E}_2^{B_1 B_2}(y_1, y_2; \Gamma') \frac{\delta \Gamma^{A_2}(x_2)}{\delta \Gamma'^{B_2}(y_2)}.$$

Эти трансформационные свойства антискобки согласуются с правилами, получаемыми из определения (19) антискобки $(S_1, S_2) = (-1)^{\varepsilon(S_1)} \nabla_2(S_1 S_2)$, $(S_1, S_2)' = (-1)^{\varepsilon(S_1)} \nabla_2'(S_1 S_2)$ и трансформационных свойств (15) операторов ∇ .

В связи с антискобкой (а также в связи с мастер-уравнением, см. ниже) возникает вопрос о преобразованиях полей $\Gamma \rightarrow \Gamma' = e^{\nabla_1} \Gamma$, которые ее сохраняют (локальных канонических заменах переменных):

$$(S_1, S_2)'(\Gamma) = (S_1, S_2)(\Gamma).$$

На языке операторов это означает, что

$$e^{\nabla_1} \nabla_2 e^{-\nabla_1} = \nabla_2 \quad (24)$$

или

$$[e^{\nabla_1}, \nabla_2] = 0,$$

т.е. преобразование сохраняет оператор ∇_2 . На языке коэффициентных функций это означает, что

$$\tilde{E}_2'^{A_1 A_2}(x_1, x_2; \Gamma) = \tilde{E}_2^{A_1 A_2}(x_1, x_2; \Gamma).$$

Класс таких преобразований существенно зависит от свойств коэффициентных функции $\tilde{E}_2^{A_1 A_2}$ (например, в тривиальном случае $\tilde{E}_2^{A_1 A_2} = 0$ он включает вообще все преобразования). В конечномерном случае, когда коэффициентные функции суть конечномерные матрицы $\tilde{E}_2^{ij}$, этот класс преобразований определяется рангом матрицы $\tilde{E}_2^{ij}$.

Легко видеть, что свойство (24) удовлетворяется, если

$$\nabla_1 = [\nabla_2, F] = \nabla_2 F + F \nabla_2 = - \int dx_1 dx_2 \frac{\delta_r F}{\delta \Gamma^{A_1}(x_1)} \tilde{E}_2^{A_1 A_2}(x_1, x_2; \Gamma) \frac{\delta}{\delta \Gamma^{A_2}(x_2)},$$

где F – локальный фермионный функционал, $\varepsilon(F) = 1$. Это следует из легко проверяемого соотношения $[\nabla_1, \nabla_2] = 0$. Очевидно, что $\nabla_1 S = (S, F)$. Таким образом, преобразование

$$\Gamma^A \rightarrow \Gamma'^A = e^{[\nabla_2, F]} \Gamma^A \quad (25)$$

является каноническим.

В конечномерном случае можно показать, что если матрица $\tilde{E}_2^{ij}$ невырождена, то преобразования, порождаемые оператором $e^{[\nabla_2, F]}$, исчерпывают все преобразования, сохраняющие антискобку или, что то же самое, оператор ∇_2 .

5.2. Мастер-уравнение, калибровочные преобразования. Нильпотентный локальный оператор ∇_2 , $\varepsilon(\nabla_2) = 1$, определяет на локальных функционалах $S(\Gamma)$ мастер-уравнение

$$\nabla_2 e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0$$

или

$$(S, S) = \nabla_2 S^2 = 0. \quad (26)$$

Оно нетривиально только для бозевских функционалов.

Очевидно, что это уравнение инвариантно относительно канонических преобразований функционалов, индуцированных локальными каноническими преобразованиями полей Γ , сохраняющими антискобку. В частности, если S – решение мастер-уравнения, то

$$S' = e^{[\nabla_2, F]} S, \quad \varepsilon(F) = 1, \quad (27)$$

также решение. Преобразование (27) можно представить как

$$e^{\frac{i}{\hbar} S} \longrightarrow e^{\frac{i}{\hbar} S'} = e^{[\nabla_2, F]} e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (28)$$

Инвариантность мастер-уравнения, как и антискобки, относительно канонических преобразований (28) есть следствие того, что для нильпотентного оператора ∇_2 оператор $[\nabla_2, F]$ коммутирует с ∇_2 . С другой стороны, любой оператор вида $[\nabla_2, \nabla]$ с произвольным ∇ коммутирует с ∇_2 . Отсюда следует, что любое преобразование вида

$$e^{\frac{i}{\hbar}S} \longrightarrow e^{\frac{i}{\hbar}S'} = e^{[\nabla_2(\hbar), \nabla(\hbar)]} e^{\frac{i}{\hbar}S} \quad (29)$$

с произвольным локальным оператором ∇ , $\varepsilon(\nabla) = 1$, переводит локальное решение S мастер-уравнения в локальное решение S' (не зависящее от $\hbar$). Преобразования вида (29) будем называть калибровочными преобразованиями. Заметим, что представить калибровочное преобразование в виде оператора, действующего непосредственно на S , довольно сложно. Замечательно также, что операторы калибровочных преобразований $e^{[\nabla_2, \nabla]}$ образуют ассоциативную алгебру.

Оказывается, однако, что на решениях мастер-уравнения любое калибровочное преобразование (29) сводится к каноническому преобразованию (28) с некоторым локальным фермиевским функционалом $F(\Gamma)$. Тот факт, что функционал F существует, можно доказать, например, следующим образом. Вместо оператора ∇ рассмотрим оператор $\alpha \nabla$. Тогда соотношение

$$e^{\alpha[\nabla_2(\hbar), \nabla(\hbar)]} e^{\frac{i}{\hbar}S} = e^{[\nabla_2, F(\alpha)]} e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

будет выполняться, если, например, $F(\alpha)$ является решением уравнения

$$\int_0^1 d\beta e^{\beta[\nabla_2, F(\alpha)]} \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha} = S_{\nabla}(\alpha), \quad F(0) = 0, \quad (30)$$

а локальный, не зависящий от $\hbar$, фермиевский функционал $S_{\nabla}(\alpha)$ определяется из соотношения

$$\hbar \nabla(\hbar) e^{\alpha[\nabla_2(\hbar), \nabla(\hbar)]} e^{\frac{i}{\hbar}S} = S_{\nabla}(\alpha) e^{\alpha[\nabla_2(\hbar), \nabla(\hbar)]} e^{\frac{i}{\hbar}S}.$$

Пертурбативно по α формальное локальное решение уравнения (30) для $F(\alpha)$ существует.

Вопрос о том, когда калибровочные преобразования действуют на решениях транзитивно, определяется свойствами оператора ∇_2 , т.е. его коэффициентных функций $E_2^{A_1 A_2}$, и дополнительными условиями на S (ясно, что $S=0$ всегда является решением).

В рамках стандартной БВ-формулировки калибровочных теорий поля метрика $\tilde{E}_2^{A_1 A_2}$ является неособенной, а поля Γ представляют собой координаты Дарбу для метрики:

$$\begin{aligned} \Gamma^A(x) &= \{\Phi^a(x), \Phi_a^*(x)\}, \quad \varepsilon(\Phi_a^*) = \varepsilon(\Phi^a) + 1, \\ \nabla_2 &= \int dx (-1)^{\varepsilon(\Phi^a)} \frac{\delta}{\delta \Phi^a(x)} \frac{\delta}{\delta \Phi_a^*(x)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Поля Φ^a подразделяются на две группы: $\Phi^a = \{\varphi^i, C^\alpha\}$, где φ^i — поля исходной классической теории, C^α — гостовские поля. Аналогичным образом подразделяются и поля Φ_a^* (называемые антиполями). Всем переменным приписывается гостовское число gh:

$\text{gh}(\varphi^i) = 0$, $\text{gh}(C^\alpha) = 1$, $\text{gh}(\Phi_a^*) = -\text{gh}(\Phi^a) - 1$. Решение S мастер-уравнения (26) ищется в виде ряда по C :

$$S = \mathcal{S} + \sum_{n=1} S^{(n)}, \quad S^{(n)} = O(C^n), \quad \varepsilon(S) = \text{gh}(S) = 0, \quad (32)$$

где $\mathcal{S}$ – локальное действие классической теории. Предполагается, что действие $\mathcal{S}$ обладает калибровочной симметрией, т.е. удовлетворяет калибровочным тождествам

$$R_\alpha^i(x, \varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \dots, \partial_\mu) \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi^i(x)} = 0,$$

где $R_\alpha^i(x, \varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \dots, \partial_\mu)$ – полином по ∂_μ с локальными по координатам x коэффициентами. Кроме того, действие $\mathcal{S}$ удовлетворяет некоторым условиям, так называемым условиям регулярности (см. [6] и цитированную там литературу), смысл которых состоит в том, что среди произвольного набора из экстремалей $\delta \mathcal{S} / \delta \varphi^i(x)$ и их производных по координатам можно выделить линейно (с локальными коэффициентами) независимые и линейно зависимые элементы, а единственными связями между ними являются линейные комбинации (с локальными коэффициентами) калибровочных тождеств и их производных по координатам. При выполнении условий регулярности доказано [6], что мастер-уравнение имеет локальные решения вида (32), а произвол в решении описывается каноническими преобразованиями (27), т.е. канонические преобразования действуют на пространстве решений типа (32) транзитивно.

Сравним вышеприведенные выражения с аналогичными формальными выражениями канонического БВ-формализма [1]. Аналогом нильпотентного оператора ∇_2 является канонический дифференциальный оператор второго порядка Δ_2 (мы ограничимся случаем, когда переменные $\Gamma^A(x)$ – координаты Дарбу для метрики $E_2^{A_1 A_2}$, т.е. дифференциальные выражения для ∇_2 и Δ_2 имеют вид (31)). Формально действие в квантовой теории поля должно удовлетворять квантовому мастер-уравнению

$$\Delta_2 e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0$$

или

$$\frac{1}{2}(S, S) = i\hbar \Delta_2 S. \quad (33)$$

Уравнение (26) и формальное уравнение (33) отличаются слагаемыми, пропорциональными $\hbar \delta(0)$, т.е. мастер-уравнение (26) является квазиклассическим приближением квантового мастер-уравнения (33), а решения мастер-уравнения (26) являются нулевыми по $\hbar$ (квазиклассическими) приближениями решений квантового мастер-уравнения (33).

Формальный оператор калибровочных преобразований есть

$$e^{[\Delta_2, F]} = D e^{[\nabla_2, F]} = e^{\frac{i}{\hbar}(-i\hbar \ln D)} e^{[\nabla_2, F]}, \quad (34)$$

где

$$D = \frac{D(\Phi')}{D(\Phi)} = \left(\frac{D(\Gamma')}{D(\Gamma)} \right)^{1/2}, \quad \Gamma'^A = e^{[\nabla_2, F]} \Gamma^A.$$

При этом функционал S' , связанный с функционалом S соотношением

$$e^{\frac{i}{\hbar} S'} = e^{[\Delta_2, F]} e^{\frac{i}{\hbar} S},$$

есть решение квантового мастер-уравнения, если таковым является S .

Таким образом, оператор $\exp([\nabla_2, F])$ – квазиклассическое приближение формального оператора (34).

Отметим также следующий факт. Обычно на решение квантового мастер-уравнения (33) накладываются граничные условия

$$S|_{\hbar=0, C=0} = \mathcal{S}.$$

В этом случае операторы вида (34) хотя и переводят решение квантового мастер-уравнения в решение, однако не действуют на решениях транзитивно [7].

6. $Sp(2)$ -МАСТЕР-УРАВНЕНИЕ

В этом разделе мы рассмотрим $Sp(2)$ -мастер-уравнение [8], описывающее $Sp(2)$ -симметричное обобщение БВ-формализма. Полный набор переменных теории Γ^Σ (в этом разделе мы слегка изменяем обозначения индексов у переменных Γ) разбивается на группы $\Phi^A, \Phi_{Aa}^*, \bar{\Phi}_A$, $a, b, c = 1, 2$, каждая из переменных является функцией координат x^μ . Переменные Φ^A , в свою очередь, разбиты на группы $\Phi^A = (\varphi^i, C^{\alpha b}, B^\alpha)$, где φ^i – переменные классической теории, $C^{\alpha b}$ – поля гостов и антигостов, B^α – поля, вводящие калибровку. Всем полям приписывается грасманова четность $\varepsilon(\Phi^A) = \varepsilon(\bar{\Phi}_A) = \varepsilon_A$, $\varepsilon(\Phi_{Aa}^*) = \varepsilon_A + 1$, $\varepsilon(B^\alpha) = \varepsilon_\alpha$, $\varepsilon(C^{\alpha b}) = \varepsilon_\alpha + 1$ и новое гостовское число ngh : $\text{ngh}(\varphi) = 0$, $\text{ngh}(C^b) = 1$, $\text{ngh}(B) = 2$, $\text{ngh}(\bar{\Phi}) = -2 - \text{ngh}(\Phi)$, $\text{ngh}(\Phi_a^*) = -1 - \text{ngh}(\Phi)$, $\text{ngh}(FM) = \text{ngh}(F) + \text{ngh}(M)$.

В $Sp(2)$ -формализме эффективное действие $S(\Phi, \Phi_a^*, \bar{\Phi})$, $\text{ngh}(S) = \varepsilon(S) = 0$, удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(S, S)^a + \int dx \varepsilon^{ab} \Phi_{Ab}^*(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}(x)_A} S &= 0, \\ \varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}, \quad \varepsilon_{ab} \varepsilon^{bc} = \delta_a^c, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon^{21} = 1, \end{aligned} \quad (35)$$

и начальному условию

$$S|_{\Phi_a^* = \bar{\Phi} = 0} = \mathcal{S}(\varphi),$$

где $\mathcal{S}(\varphi)$ – исходное классическое действие, обладающее калибровочной симметрией $R_\alpha^i \delta S / \delta \varphi^i = 0$. В формуле (35) $(\dots)^a$ означает дублет антискобок:

$$(S_1, S_2)^a \equiv \int dx \left(\frac{\delta_r S_1}{\delta \Phi^A(x)} \frac{\delta S_2}{\delta \Phi_{Aa}^*(x)} - \frac{\delta_r S_1}{\delta \Phi_{Aa}^*(x)} \frac{\delta S_2}{\delta \Phi^A(x)} \right).$$

Введем дублет операторов

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^a &= \nabla_2^a + \nabla_1^a, & \varepsilon(\bar{\nabla}^a) &= 1, \\ \nabla_2^a &= \int dx (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta}{\delta \Phi^A(x)} \frac{\delta}{\delta \Phi_{Aa}^*(x)}, & \varepsilon(\nabla_2^a) &= 1, \\ \nabla_1^a &= i \int dx \varepsilon^{ab} \Phi_{Ab}^*(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(x)}, & \varepsilon(\nabla_1^a) &= 1. \end{aligned}$$

Эти операторы нильпотентны:

$$\nabla_2^a \nabla_2^b + \nabla_2^b \nabla_2^a = 0, \quad \nabla_1^a \nabla_1^b + \nabla_1^b \nabla_1^a = 0, \quad \nabla_2^a \nabla_1^b + \nabla_2^b \nabla_1^a + \nabla_1^a \nabla_2^b + \nabla_1^b \nabla_2^a = 0, \\ \bar{\nabla}^a \bar{\nabla}^b + \bar{\nabla}^b \bar{\nabla}^a = 0.$$

Введенный выше дублет антискобок связан с дублетом операторов ∇_2^a соотношением

$$(S_1, S_2)^a = (-1)^{\varepsilon(S_1)} \nabla_2^a (S_1 S_2).$$

С использованием операторов $\bar{\nabla}^a$ $Sp(2)$ -мастер-уравнение записывается в следующей эквивалентной форме:

$$\bar{\nabla}^a (\hbar) e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0. \quad (36)$$

При тех же предположениях, что и в п. 5.2, в статье [9] было доказано, что $Sp(2)$ -мастер-уравнение имеет локальные решения и найден произвол общего решения. Мы покажем, что рассматриваемый здесь формализм является естественным аппаратом для этой цели.

Введем класс операторов, которые мы будем называть операторами калибровочных преобразований:

$$K = e^U, \quad U = \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\nabla}^b, [\bar{\nabla}^a, \nabla]], \quad \varepsilon(U) = 0, \quad (37)$$

где ∇ — произвольный локальный оператор, $\varepsilon(\nabla) = 0$. Очевидно, что оператор U обладает свойством

$$[\bar{\nabla}^a, U] = 0, \quad (38)$$

и, как следствие, оператор калибровочного преобразования коммутирует с операторами $\bar{\nabla}^a$, т.е.

$$[\bar{\nabla}^a, K] = [\bar{\nabla}^a, e^U] = 0. \quad (39)$$

Из формулы (38) следует, что операторы вида U образуют алгебру Ли:

$$[U^{(1)}, U^{(2)}] = \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\nabla}^b, [\bar{\nabla}^a, \nabla_3]] = U^{(3)}, \quad \nabla_3 = [U^{(1)}, \nabla^{(2)}].$$

По формуле Бейкера–Хаусдорфа–Дынкина получаем, что

$$e^{U^{(1)}} e^{U^{(2)}} = e^{U^{(3)}}.$$

Следовательно, операторы калибровочных преобразований образуют ассоциативную алгебру.

Из результатов раздела 3 следует, что если S — локальный функционал, не зависящий от $\hbar$, то и функционал S' , определенный равенством

$$e^{\frac{i}{\hbar} S'} = K(\hbar) e^{\frac{i}{\hbar} S},$$

где

$$K(\hbar) = e^{U(\hbar)}, \quad U(\hbar) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}[\bar{\nabla}^b(\hbar), [\bar{\nabla}^a(\hbar), \nabla(\hbar)]],$$

является локальным функционалом и не зависит от $\hbar$. Кроме того, если функционал S удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению (35), то в силу свойства (39) функционал S' также удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению:

$$\bar{\nabla}^a(\hbar)e^{\frac{i}{\hbar}S'} = 0.$$

Для функционалов S , удовлетворяющих $Sp(2)$ -мастер-уравнению, справедливо соотношение

$$e^{\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}[\bar{\nabla}^b(\hbar), [\bar{\nabla}^a(\hbar), \nabla(\hbar)]]}e^{\frac{i}{\hbar}S} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}[\bar{\nabla}^b(\hbar), [\bar{\nabla}^a(\hbar), \nabla_0(\hbar)]]}e^{\frac{i}{\hbar}S},$$

где

$$\nabla_0(\hbar) = \frac{1}{\hbar}Y,$$

Y – некоторый локальный функционал, не зависящий от $\hbar$, $\varepsilon(Y) = 0$. Действительно, если вместо оператора ∇ рассмотреть оператор $\alpha\nabla$, то можно показать, что соотношение

$$e^{\frac{i}{\hbar}S'}(\alpha) = e^{\frac{\alpha}{2}\varepsilon_{ab}[\bar{\nabla}^b(\hbar), [\bar{\nabla}^a(\hbar), \nabla(\hbar)]]}e^{\frac{i}{\hbar}S} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}[\bar{\nabla}^b(\hbar), [\bar{\nabla}^a(\hbar), \frac{1}{\hbar}Y(\alpha)]]}e^{\frac{i}{\hbar}S}$$

будет выполнено, например, для функционала $Y(\alpha)$, удовлетворяющего уравнению

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\beta e^{\beta\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}[\bar{\nabla}^b(\hbar), [\bar{\nabla}^a(\hbar), \frac{1}{\hbar}Y(\alpha)]]} \frac{\partial Y(\alpha)}{\partial \alpha} e^{-\beta\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}[\bar{\nabla}^b(\hbar), [\bar{\nabla}^a(\hbar), \frac{1}{\hbar}Y(\alpha)]]} e^{\frac{i}{\hbar}S'}(\alpha) = \\ = \nabla(\hbar)e^{\frac{i}{\hbar}S'}(\alpha) = \frac{i}{\hbar}S_{\nabla}(\alpha)e^{\frac{i}{\hbar}S'}(\alpha), \quad Y(0) = 0, \end{aligned}$$

пертурбативное по α решение которого существует. Таким образом, если рассматривается действие операторов калибровочных преобразований (37) на функционалы $\exp(\frac{i}{\hbar}S)$, где S удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению, то можно ограничиться операторами K с $\nabla = \nabla_0$.

Заметим, что любая замена полей

$$\Phi^A \rightarrow \Phi'^A = \Phi'^A(\Phi) = e^{E_1^B(\Phi)\delta_B} \Phi^A$$

может быть расширена до калибровочного преобразования в следующем смысле:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2}\varepsilon_{ab}[\bar{\nabla}^b, [\bar{\nabla}^a, \bar{\Phi}_A T^A]]} G(\Gamma) \Big|_{\Phi_a^* = \bar{\Phi} = 0} = e^{T^A \delta_A} g(\Phi) = g(\Phi'), \\ g(\Phi) = G(\Gamma) \Big|_{\Phi^* = \bar{\Phi} = 0}. \end{aligned}$$

Перейдем к описанию произвола в решении $Sp(2)$ -мастер-уравнения. Пусть

$$S = \mathcal{S} + \sum_{n=1} S_{(n)}, \quad S_{(n)} \sim C^k B^{n-k},$$

– решение $Sp(2)$ -мастер-уравнения с

$$S_{(1)} = \int dx (C^{\alpha a} R_{\alpha}^i \varphi_{ia}^* + \varepsilon^{ab} C_{\alpha b|a}^* B^{\alpha} + B^{\alpha} R_{\alpha}^i \bar{\varphi}_i (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_{\alpha}}).$$

В статье [9] было показано, что если два решения S и S_1 совпадают с точностью до n -го порядка разложения в ряд по переменным $C^{\alpha b}$, B^{α} , то их разность $\delta S_{(n+1)}$ в $(n+1)$ -приближении

$$S_1 - S = \delta S_{(n+1)} + O(C^k B^{n+2-k}), \quad \delta S_{(n+1)} \sim C^k B^{n+1-k},$$

может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \delta S_{(n+1)} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \omega^b \omega^a X_{(n+1)}, \quad X_{(n+1)} \sim C^k B^{n+1-k}, \\ \omega^a &= \int dx \left((-1)^{\varepsilon_i} L_i \frac{\delta}{\delta \varphi_{ia}^*} - (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} R_{\alpha}^i \varphi_{ib}^* \frac{\delta}{\delta C_{\alpha b|a}^*} + \right. \\ &\quad \left. + ((-1)^{\varepsilon_i} R_{\alpha}^i \bar{\varphi}_i + \varepsilon^{cb} C_{\alpha b|c}^*) \frac{\delta}{\delta B_{\alpha a}^*} - (-1)^{\varepsilon_{\alpha}} \varepsilon^{ab} B^{\alpha} \frac{\delta}{\delta C^{\alpha b}} + \varepsilon^{ab} \Phi_{Ab}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A} \right), \\ L_i(x) &\equiv \frac{\delta S}{\delta \varphi^i(x)}, \end{aligned}$$

где $X_{(n+1)}$ – локальный функционал, $\varepsilon(X_{(n+1)}) = 0$. Введем операторы

$$W^a = (S, \dots)^a + \int dx \varepsilon^{ab} \Phi_{Ab}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A}.$$

Справедливо соотношение

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \omega^b \omega^a X_{(n+1)} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ab} W^b W^a X_{(n+1)} \right)_{(n+1)}.$$

Прямой проверкой (с учетом уравнений (35), (36)) можно убедиться в справедливости соотношения

$$\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ab} W^b W^a X_{(n+1)} \right) e^{\frac{i}{\hbar} S} = -\frac{i}{2} \varepsilon_{ab} \left[\bar{\nabla}^b(\hbar), \left[\bar{\nabla}^a(\hbar), \frac{1}{\hbar} X_{(n+1)} \right] \right] e^{\frac{i}{\hbar} S}.$$

Принимая во внимание равенство (39), мы получаем, что действие S'_1 ,

$$e^{\frac{i}{\hbar} S'_1} = e^{\frac{i}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\nabla}^b(\hbar), [\bar{\nabla}^a(\hbar), \frac{1}{\hbar} X_{(n+1)}]]} e^{\frac{i}{\hbar} S_1},$$

удовлетворяет $Sp(2)$ -мастер-уравнению и отличается от действия S начиная с $(n+2)$ -го приближения. Поскольку все решения совпадают в нулевом по C и B приближении, с использованием метода индукции получаем окончательно, что общее локальное решение $\tilde{S}$ для $Sp(2)$ -мастер-уравнения может быть построено из частного решения S с помощью оператора калибровочного преобразования,

$$e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{S}} = K(\hbar) e^{\frac{i}{\hbar} S},$$

т.е. калибровочные преобразования действуют на решениях $Sp(2)$ -мастер-уравнения транзитивно, причем можно ограничиться операторами калибровочных преобразований вида (37) с $\nabla = \nabla_0$.

Так же, как и в п. 5.2, можно проверить, что операторы $\bar{\nabla}^a$ и операторы калибровочных преобразований (37) являются квазиклассическими приближениями соответственно формальных нильпотентных операторов $\bar{\Delta}^a$ и операторов калибровочных преобразований вида (37) с

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} [\bar{\Delta}^b, [\bar{\Delta}^a, \Delta]].$$

Напомним, что дифференциальные выражения для канонических операторов $\bar{\Delta}^a$ и Δ совпадают с соответствующими выражениями для операторов $\bar{\nabla}^a$ и ∇ . При этом действие квантовой теории формально должно удовлетворять квантовому $Sp(2)$ -мастер-уравнению

$$\bar{\Delta}^a(\hbar) e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0$$

или

$$\frac{1}{2} (S, S)^a + \int dx \varepsilon^{ab} \Phi_{Ab}^*(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}(x)_A} S = i\hbar \Delta_2^a S.$$

Дифференциальное выражение для Δ_2^a совпадает с дифференциальным выражением для ∇_2^a .

Благодарности. Б.Л.В. благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований, грант № 99-01-00-376. И.В.Т. благодарит за поддержку Российский фонд фундаментальных исследований и Комиссию европейского сообщества, гранты РФФИ № 99-01-00980, INTAS № 96-0308. Ш.С.Ш. благодарит за финансовую поддержку Российский фонд фундаментальных исследований и Комиссию европейского сообщества, гранты РФФИ № 99-02-17916, INTAS № 96-0308, РФФИ-INTAS № 95-829.

Список литературы

- [1] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27.
- [2] *G. Leibbrandt.* Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 847.
- [3] *И. А. Баталин, И. В. Тютин.* ТМФ. 1998. Т. 114. С. 250.
- [4] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
- [5] *М. А. Наймарк.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.
- [6] *G. Barnich, F. Brandt, M. Henneaux.* Commun. Math. Phys. 1995. V. 174. P. 57.
- [7] *П. М. Лавров, И. В. Тютин.* Изв. вузов. Физика. 1982. № 7. С. 64; ЯФ. 1985. Т. 41. С. 1658.
- [8] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1487.
- [9] *И. В. Тютин, Ш. С. Шахвердиев.* ТМФ. 1998. Т. 115. С. 373.

Поступила в редакцию 3.11.1999 г.