Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Об операторе Шредингера с малым потенциалом типа возмущенной ступеньки, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 277–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf775>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:09:17

ОБ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА С МАЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА ВОЗМУЩЕННОЙ СТУПЕНЬКИ

Рассматривается оператор Шредингера с периодическим по двум переменным потенциалом, представляющим собой малую ступеньку, возмущенную убывающей по третьей переменной функцией. Показано, что при определенных условиях на величины ступеньки и возмущения вблизи существенного спектра имеется единственный уровень, который может быть собственным значением или резонансом. Найдено асимптотическое значение этого уровня.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть вещественная функция $W(x) \neq 0$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, является периодической по переменным x_1, x_2 с периодом единица и удовлетворяет оценке

$$|W(x)| \leq C \exp(-a|x_3|), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где C, a — некоторые положительные числа. Обозначим через $\theta(x_3)$ функцию Хевисайда, и пусть $V_0 < 0$. В данной работе рассматриваются самосопряженные операторы $H_0(k_{\parallel}) = -\Delta + V_0\theta(x_3)$ и $H_{\epsilon}(k_{\parallel}) = H_0(k_{\parallel}) + \epsilon W(x)$, $\epsilon > 0$, определенные на (достаточно гладких) блоховских по переменным x_1, x_2 функциях из пространства $L^2(\Omega)$, где $\Omega = [0, 1)^2 \times \mathbb{R}$; $k_{\parallel} = (k_1, k_2) \in \Omega^* = [-\pi, \pi)^2$ — квазиимпульс. Напомним, что блоховские по x_1, x_2 функции — это сужения на Ω функций $\phi(x)$, определенных на $\mathbb{R}^3$ и удовлетворяющих равенству

$$\phi(x + (n_{\parallel}, 0)) = e^{(k_{\parallel}, n_{\parallel})} \phi(x), \quad n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2.$$

Операторы $H_0(k_{\parallel})$, $H_{\epsilon}(k_{\parallel})$ можно рассматривать как гамильтонианы электрона вблизи кристаллической поверхности (вид более общего “поверхностного” потенциала указан в статье [1]). Заметим [2–4], что данные операторы порождаются разложением периодических операторов $H_0 = -\Delta + V_0\theta(x_3)$, $H_{\epsilon} = H_0 + \epsilon W(x)$, действующих в $L^2(\mathbb{R}^3)$, в прямом произведении пространств

$$\int_{\Omega^*}^{\oplus} L^2(\Omega) dk_{\parallel} \simeq L^2(\Omega \times \Omega^*).$$

* Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск, Россия. E-mail: arg@otf.fti.udmurtia.su

Случай “кристаллической пленки” для малого потенциала, что соответствует выбору $V_0 = 0$, рассмотрен в статье [5].

Символы $H_0(k_{\parallel})$, $H_{\epsilon}(k_{\parallel})$ будут также использоваться для обозначения соответствующих дифференциальных выражений. Для $z = \rho e^{i\phi}$, где $\rho > 0$, $-\pi < \phi \leq \pi$, полагаем $\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\phi/2}$.

Под функцией Грина оператора будет пониматься ядро его резольвенты, продолженное, вообще говоря, по параметру E в точки существенного спектра, а также через вещественную ось на второй лист.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЛЕММА 1. *Функция Грина оператора $H_0(k_{\parallel})$ имеет вид*

$$G_{k_{\parallel}}(x, y, E, V_0) = \sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2} \exp(i(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, x_{\parallel} - y_{\parallel})) G(x_3, y_3, E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2, V_0), \quad (1)$$

где $x_{\parallel} = (x_1, x_2)$ и т.д. *Функция Грина оператора $-d^2/dx_3^2 + V_0\theta(x_3)$ имеет вид*

$$\begin{aligned} G(x_3, y_3, E, V_0) = & -\theta(x_3)\theta(y_3) \left[\frac{\exp(i\sqrt{E-V_0}|x_3-y_3|)}{2i\sqrt{E-V_0}} + \right. \\ & + \frac{-\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0}}{2i\sqrt{E-V_0}(\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0})} \exp(i\sqrt{E-V_0}(x_3+y_3)) \Big] + \\ & + \theta(x_3)\theta(-y_3) \frac{\exp(i\sqrt{E-V_0}x_3 - i\sqrt{E}y_3)}{i(\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0})} + \\ & + \theta(-x_3)\theta(y_3) \frac{\exp(-i\sqrt{E}x_3 + i\sqrt{E-V_0}y_3)}{i(\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0})} + \\ & + \theta(-x_3)\theta(-y_3) \left[\frac{\exp(i\sqrt{E}|x_3-y_3|)}{2i\sqrt{E}} - \right. \\ & \left. - \frac{-\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0}}{2i\sqrt{E}(\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0})} \exp(-i\sqrt{E}(x_3+y_3)) \right]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что функция $G(x_3, y_3, E, V_0)$ является функцией Грина оператора $-d^2/dx_3^2 + V_0\theta(x_3)$, проверяется непосредственно. Для этого надо учесть, что функция

$$-\frac{1}{2i}\sqrt{E} \exp(i\sqrt{E}|x_3-y_3|)$$

— это функция Грина оператора $-d^2/dx_3^2$. Отсюда без труда можно получить, что функция $G_{k_{\parallel}}(x, y, E, V_0)$, определяемая формулой (1), является функцией Грина оператора $H_0(k_{\parallel})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существенный спектр оператора $H_{\epsilon}(k_{\parallel})$ совпадает со спектром оператора $H_0(k_{\parallel})$ и равен $[V_0 + k_{\parallel}^2, \infty)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектр оператора $H_0(k_{\parallel})$ не может быть больше промежутка $[V_0 + k_{\parallel}^2, \infty)$, поскольку для $E \notin [V_0 + k_{\parallel}^2, \infty)$ оператор, порожденный функцией Грина, действует в $L^2(\Omega)$ (см. вид функции Грина в лемме 1 и рассуждения для случая $V_0 = 0$ в работах [6, 7]). С другой стороны, для $E > V_0 + k_{\parallel}^2$, как легко видеть, существуют ограниченные решения уравнения $H_0(k_{\parallel})\psi = E\psi$. Поэтому спектр оператора $H_0(k_{\parallel})$ содержит промежуток $[V_0 + k_{\parallel}^2, \infty)$ [8], а значит, в силу сказанного выше совпадает с ним.

Далее, из леммы 1 вытекает, что

$$W(x)G_{k_{\parallel}}(x, y, i, V_0) \in L^2(\Omega \times \Omega)$$

(доказательство такое же, как и в случае $V_0 = 0$ [6, 7]). Утверждение о существенном спектре следует из теоремы об относительно компактных возмущениях [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Предположим, что $E \in \mathbb{R}$, причем $E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 \neq 0$ и $E - V_0 - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 \neq 0$ для $n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2$. Тогда всякое ограниченное блоховское по x_1, x_2 решение уравнения Шредингера*

$$H_{\epsilon}(k_{\parallel})\psi = E\psi \quad (2)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \epsilon \int_{\Omega} G_{k_{\parallel}}(x, y, E, V_0) W(y) \psi(y) dy, \quad (3)$$

где $\psi_0(x)$ — некоторое ограниченное блоховское по x_1, x_2 решение уравнения

$$H_0(k_{\parallel})\psi_0 = E\psi_0. \quad (4)$$

При этом, если $\psi \in L^2(\Omega_0)$, то $\psi_0 = 0$.

Наоборот, если ψ — ограниченное решение уравнения (3) для ограниченного блоховского по x_1, x_2 решения ψ_0 уравнения (4), то ψ — ограниченное блоховское по x_1, x_2 решение уравнения (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ — решение уравнения (2) из рассматриваемого класса. В силу леммы 1 и условий, наложенных на функции W, ψ , интеграл в правой части уравнения (3) существует для $E + i\delta$, где $\delta > 0$ [6, 7], и определяет блоховскую по переменным x_1, x_2 ограниченную функцию. Применяя к выражению

$$\psi(x) + \epsilon \int_{\Omega} G_{k_{\parallel}}(x, y, E + i\delta, V_0) W(y) \psi(y) dy,$$

где $\delta > 0$, оператор $H_0(k_{\parallel}) - E - i\delta$, пользуясь при этом леммой 1 и переходя затем к пределу $\delta \rightarrow 0$, получаем нуль. Подобными рассуждениями доказывается и обратное утверждение.

Пусть теперь $\psi \in L^2(\Omega_0)$. Устремляя x_3 к $+\infty$ и $-\infty$, получим согласно асимптотике функции $G_{k_{\parallel}}(x, y, E, V_0)$ (см. лемму 1) следующее выражение для функции ψ_0 :

$$\begin{aligned} \psi_0(x) = & \sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2: E - V_0 \theta(x_3) - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 > 0} A_{n_{\parallel}}^{\pm} \times \\ & \times \exp\left(i\left((k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, \pm \sqrt{E - V_0 \theta(x_3) - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2}, x)\right)\right) + \eta(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где $A^{\pm} = \text{const}$, знак $\pm$ есть $\text{sign } x_3$, $\eta \in L^2(\Omega)$. Заметим, что функция

$$\sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2: E - V_0 - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 < 0} \exp(i(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, x_{\parallel} - y_{\parallel})) G(x_3, y_3, E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2, V_0)$$

не дает вклада в неубывающие слагаемые; это доказывается, как и в случае $V_0 = 0$ [6, 7]. С другой стороны, функцию ψ_0 можно разложить в ряд Фурье по переменным x_1, x_2 :

$$\psi_0(x) = \sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2} c_{n_{\parallel}}(x_3) \exp(i(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, x_{\parallel})). \quad (6)$$

Очевидно в силу (4), что $c_{n_{\parallel}}(x_3)$ – ограниченные (как коэффициенты Фурье от ограниченной функции) решения уравнения

$$-c_{n_{\parallel}}'' + V_0 \theta(x_3) c_{n_{\parallel}} = (E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2) c_{n_{\parallel}}.$$

Следовательно, сумма (6) конечна, а функции $c_{n_{\parallel}}(x_3)$ представляют собой при $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$ линейную комбинацию ограниченных экспонент вида $\exp(\pm i \sqrt{E - V_0 - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2} x_3)$ и $\exp(\pm i \sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2} x_3)$, соответственно. В соответствии с (5) и ограниченностью экспонент знаки у корней равны $\text{sign } x_3$. Однако при $V_0 \neq 0$ гладкая “сшивка” в нуле функций $\exp(i \sqrt{E - V_0 - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2} x_3)$, $x_3 > 0$, и $C \exp(-i \sqrt{E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2} x_3)$, $x_3 < 0$, где $C = \text{const}$, невозможна. Поэтому в ряде (6) имеем $c_{n_{\parallel}}(x_3) = 0$ для всех $n_{\parallel}$, т.е. $\psi_0 = 0$. Предложение доказано.

В дальнейшем предполагается, что $\text{Im } E \leq 0$, причем величина $|\text{Im } E|$ достаточно мала, а также, что

$$\text{Re } E - V_0 - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2 < 0, \quad n_{\parallel} \neq 0,$$

и величины

$$k_3 = \sqrt{E - k_{\parallel}^2}, \quad \kappa_3 = \sqrt{E - V_0 - k_{\parallel}^2} \quad (7)$$

достаточно малы. Заметим, что в случае $E > k_{\parallel}^2$ величину k_3 можно рассматривать как третью компоненту импульса частицы в пустом полупространстве; малость κ_3 означает малость V_0 .

Пусть в уравнении (3) $\psi_0 = 0$. Отсутствие “налетающей волны” и экспоненциальное возрастание при $x_3 \rightarrow \infty$ для $\text{Re } E > V_0 + k_{\parallel}^2$, а для $\text{Re } E > k_{\parallel}^2$ и при $x_3 \rightarrow -\infty$

нетривиальных решений ψ такого уравнения для E на втором листе с $\text{Im } E < 0$ (экспоненциальное возрастание вытекает из вида функции Грина) позволяют рассматривать это уравнение для данных E как уравнение для определения резонансов [9].

Итак, с помощью уравнения (3) при $\psi_0 = 0$ определяются как собственные, так и резонансные уровни. Запишем уравнение (3) с $\psi_0 = 0$ для новой неизвестной функции $\phi(x) = \sqrt{\epsilon |W(x)|} \psi(x)$ [10] и $E \neq V_0 + k_{\parallel}^2$, $E \neq k_{\parallel}^2$ в виде

$$\phi(x) = -\epsilon \int_{\Omega} \sqrt{|W(x)|} G_{\parallel}(x, y, E, V_0) \sqrt{W(y)} \phi(y) dy, \quad (8)$$

где $\sqrt{W(x)} = \text{sign } W(x) \sqrt{|W(x)|}$. Перейдем от величин E, V_0 в выражении для функции Грина к величинам k_3, κ_3 , определяемым равенствами (7). При этом будем пользоваться обозначениями типа $G_{k_{\parallel}}(x, y, k_3, \kappa_3)$. Введем также обозначение

$$G_{\parallel}^{(1)}(x, y, k_3, \kappa_3) = \sum_{n_{\parallel} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \exp(i(k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel}, x_{\parallel} - y_{\parallel})) G(x_3, y_3, E - (k_{\parallel} + 2\pi n_{\parallel})^2, V_0).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $k_{\parallel}$ не принадлежит границе Ω^* (в $\mathbb{R}^2$). Имеет место равенство

$$\begin{aligned} G_{k_{\parallel}}(x, y, k_3, \kappa_3) = & -\frac{\exp(i(k_{\parallel}, x_{\parallel} - y_{\parallel}))}{i(k_3 + \kappa_3)} [\theta(x_3)\theta(y_3) \exp(i\kappa_3(x_3 + y_3)) + \\ & + \theta(x_3)\theta(-y_3) \exp(i\kappa_3 x_3 - ik_3 y_3) + \theta(-x_3)\theta(y_3) \exp(-ik_3 x_3 + i\kappa_3 y_3) + \\ & + \theta(-x_3)\theta(-y_3) \exp(-ik_3(x_3 + y_3))] + G_{k_{\parallel}}^{(2)}(x, y, k_3, \kappa_3), \end{aligned}$$

где функция $G_{k_{\parallel}}^{(2)}$ обладает тем свойством, что

$$\sqrt{|W(x)|} G_{k_{\parallel}}^{(2)}(x, y, k_3, \kappa_3) \sqrt{W(y)}$$

представляет собой аналитическую $L^2(\Omega \times \Omega)$ -значную функцию переменных k_3, κ_3 в некоторой комплексной окрестности U точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} G_{k_{\parallel}}(x, y, k_3, \kappa_3) = & -\frac{\exp(i(k_{\parallel}, x_{\parallel} - y_{\parallel}))}{i(k_3 + \kappa_3)} [\theta(x_3)\theta(y_3) \exp(i\kappa_3(x_3 + y_3)) + \\ & + \theta(x_3)\theta(-y_3) \exp(i\kappa_3 x_3 - ik_3 y_3) + \theta(-x_3)\theta(y_3) \exp(-ik_3 x_3 + i\kappa_3 y_3) + \\ & + \theta(-x_3)\theta(-y_3) \exp(-ik_3(x_3 + y_3))] - \\ & - \exp(i(k_{\parallel}, x_{\parallel} - y_{\parallel})) \left[\theta(x_3)\theta(y_3) \frac{\exp(i\kappa_3|x_3 - y_3|) - \exp(i\kappa_3(x_3 + y_3))}{2ik_3} + \right. \\ & \left. + \theta(-x_3)\theta(-y_3) \frac{\exp(ik_3|x_3 - y_3|) - \exp(ik_3(x_3 + y_3))}{2ik_3} \right] + G_{k_{\parallel}}^{(1)}(x, y, k_3, \kappa_3). \end{aligned}$$

Обозначим через $G_{k_{\parallel}}^{(2)}$ сумму двух последних слагаемых в полученном выражении. Для первого из этих слагаемых свойство, которым должна обладать функция $G_{k_{\parallel}}^{(2)}$, очевидно. Для функции $G_{k_{\parallel}}^{(1)}$ это свойство доказывается с учетом сделанных предположений и того обстоятельства, что в силу условия на $k_{\parallel}$ в формулировке теоремы знаменатели у слагаемых, входящих в состав функции $G_{k_{\parallel}}^{(1)}$, не обращаются в нуль. Данное доказательство вполне аналогично случаю $V_0 = 0$ [6, 7]. Предложение доказано.

Обозначим через $K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3)$ оператор с ядром $-\sqrt{|W(x)|} G_{k_{\parallel}}^{(2)}(x, y, k_3, \kappa_3) \sqrt{W(y)}$. Введем в рассмотрение для малых ϵ следующие величины:

$$\begin{aligned} \alpha_{k_{\parallel}}^{(1,1)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \int_{\Omega} \exp(-i((k_{\parallel}, -\kappa_3), y)) \theta(y_3) \sqrt{W(y)} (1 - \epsilon K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^{-1} \times \\ &\quad \times \left(\theta(y_3) \sqrt{|W(y)|} \exp(i((k_{\parallel}, \kappa_3), y)) \right) dy, \\ \alpha_{k_{\parallel}}^{(2,1)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \int_{\Omega} \exp(-i(k, y)) \theta(-y_3) \sqrt{W(y)} (1 - \epsilon K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^{-1} \times \\ &\quad \times \left(\theta(y_3) \sqrt{|W(y)|} \exp(i((k_{\parallel}, \kappa_3), y)) \right) dy, \\ \alpha_{k_{\parallel}}^{(1,2)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \int_{\Omega} \exp(-i((k_{\parallel}, -\kappa_3), y)) \theta(y_3) \sqrt{W(y)} (1 - \epsilon K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^{-1} \times \\ &\quad \times \left(\theta(-y_3) \sqrt{|W(y)|} \exp(i((k_{\parallel}, -\kappa_3), y)) \right) dy, \\ \alpha_{k_{\parallel}}^{(2,2)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \int_{\Omega} \exp(-i(k, y)) \theta(-y_3) \sqrt{W(y)} (1 - \epsilon K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^{-1} \times \\ &\quad \times \left(\theta(-y_3) \sqrt{|W(y)|} \exp(i((k_{\parallel}, -\kappa_3), y)) \right) dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Для достаточно малых ϵ получаем, пользуясь разложением операторнозначной функции $(1 - \epsilon K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^{-1}$ в ряд по степеням ϵ , следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_{k_{\parallel}}^{(1,1)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \int_{\Omega} \exp(2i\kappa_3 y_3) \theta(y_3) W(y) dy + \beta_{k_{\parallel}}^{(1,1)}(k_3, \kappa_3), \\ \alpha_{k_{\parallel}}^{(2,1)}(k_3, \kappa_3) &= \beta_{k_{\parallel}}^{(2,1)}(k_3, \kappa_3), \\ \alpha_{k_{\parallel}}^{(1,2)}(k_3, \kappa_3) &= \beta_{k_{\parallel}}^{(1,2)}(k_3, \kappa_3), \\ \alpha_{k_{\parallel}}^{(2,2)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \int_{\Omega} \exp(-2i\kappa_3 y_3) \theta(-y_3) W(y) dy + \beta_{k_{\parallel}}^{(2,2)}(k_3, \kappa_3), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{k_{\parallel}}^{(1,1)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \int_{\Omega} \exp(-i((k_{\parallel}, -\kappa_3), y)) \theta(y_3) \sqrt{W(y)} \times \\ &\quad \times (K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^n \left(\theta(y_3) \sqrt{|W(y)|} \exp(i((k_{\parallel}, \kappa_3), y)) \right) dy, \\ \beta_{k_{\parallel}}^{(2,1)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \int_{\Omega} \exp(-i(k, y)) \theta(-y_3) \sqrt{W(y)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^n \left(\theta(y_3) \sqrt{|W(y)|} \exp(i((k_{\parallel}, \kappa_3), y)) \right) dy, \quad (11) \\
\beta_{k_{\parallel}}^{(1,2)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \int_{\Omega} \exp(-i((k_{\parallel}, -\kappa_3), y)) \theta(y_3) \sqrt{|W(y)|} \times \\
& \times (K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^n \left(\theta(-y_3) \sqrt{|W(y)|} \exp(i((k_{\parallel}, -\kappa_3), y)) \right) dy, \\
\beta_{k_{\parallel}}^{(2,2)}(k_3, \kappa_3) &= \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \int_{\Omega} \exp(-i(k, y)) \theta(-y_3) \sqrt{|W(y)|} \times \\
& \times (K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^n \left(\theta(-y_3) \sqrt{|W(y)|} \exp(i((k_{\parallel}, -\kappa_3), y)) \right) dy.
\end{aligned}$$

В соответствии с предложением 3 и теоремой Вейерштрасса об аналитичности равномерно сходящихся рядов из аналитических функций функции $\alpha_{k_{\parallel}}^{(i,j)}(k_3, \kappa_3)$ и $\beta_{k_{\parallel}}^{(i,j)}(k_3, \kappa_3)$ ($i, j = 1, 2$) аналитически зависят от (k_3, κ_3) в некоторой комплексной окрестности нуля $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}^2$. При этом имеет место оценка

$$|\beta_{k_{\parallel}}^{(i,j)}(k_3, \kappa_3)| \leq C \epsilon^2, \quad (12)$$

где константу C можно считать не зависящей от $(k_3, \kappa_3) \in \mathcal{V}$.

Положим

$$\begin{aligned}
f_1(\kappa_3) &= \int_{\Omega} \exp(2i\kappa_3 y_3) \theta(y_3) W(y) dy, \\
f_2(k_3) &= \int_{\Omega} \exp(-2ik_3 y_3) \theta(-y_3) W(y) dy, \\
f(k_3, \kappa_3) &= f_1(\kappa_3) + f_2(k_3), \quad (13) \\
\beta_{k_{\parallel}}^{(1)} &= \beta_{k_{\parallel}}^{(1,1)} + \beta_{k_{\parallel}}^{(2,1)}, \quad \beta_{k_{\parallel}}^{(2)} = \beta_{k_{\parallel}}^{(1,2)} + \beta_{k_{\parallel}}^{(2,2)}, \\
\beta_{k_{\parallel}} &= \frac{1}{i} (\beta_{k_{\parallel}}^{(1)} + \beta_{k_{\parallel}}^{(2)}).
\end{aligned}$$

ЛЕММА 2. *Предположим, что*

$$f(0, 0) = \int_{\Omega} W(x) dx \neq 0.$$

Пусть для соответствующих величинам E и V_0 величин k_3 и κ_3 имеет место включение $(k_3, \kappa_3) \in \mathcal{V}$. Тогда уравнение (8) обладает ненулевым решением в классе $L^2(\Omega)$ для достаточно малых ϵ в том и только в том случае, если выполнено равенство

$$k_3 + \kappa_3 = \frac{\epsilon}{i} f(k_3, \kappa_3) + \beta_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3). \quad (14)$$

При этом решение уравнения (8) единственно с точностью до числового множителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. с [5]). Положим

$$\theta(x) = (1 - \epsilon K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))\phi(x),$$

тогда уравнение (8) с учетом предложения 3 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \frac{\epsilon \sqrt{|W(x)|}}{i(k_3 + \kappa_3)} e^{i(k_{\parallel}, x_{\parallel})} \int_{\Omega} e^{-i(k_{\parallel}, y_{\parallel})} \times \\ & \times [\theta(x_3)\theta(y_3) \exp(i\kappa_3(x_3 + y_3)) + \theta(x_3)\theta(-y_3) \exp(i\kappa_3 x_3 - ik_3 y_3) + \\ & + \theta(-x_3)\theta(y_3) \exp(-ik_3 x_3 + i\kappa_3 y_3) + \theta(-x_3)\theta(-y_3) \exp(-ik_3(x_3 + y_3))] \times \\ & \times \sqrt{W(y)} (1 - \epsilon K_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))^{-1} \theta(y) dy, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда

$$\begin{aligned} \theta(x) = & C_1 \theta(x_3) \sqrt{|W(x)|} \exp(i(k_{\parallel}, \kappa_3), x) + \\ & + C_2 \theta(-x_3) \sqrt{|W(x)|} \exp(i(k_{\parallel}, -\kappa_3), x), \end{aligned} \quad (16)$$

где C_1, C_2 — некоторые константы. Подставляя выражение (16) для функции $\theta(x_3)$ в (15) и полагая последовательно $x_3 > 0$ и $x_3 < 0$, получаем с учетом соотношений (9)–(11), (13) равенства

$$C_1 = \frac{1}{i(k_3 + \kappa_3)} [C_1(\epsilon f_1(\kappa_3) + \beta_{k_{\parallel}}^{(1)}(k_3, \kappa_3)) + C_2(\epsilon f_2(k_3) + \beta_{k_{\parallel}}^{(2)}(k_3, \kappa_3))], \quad (17)$$

$$C_2 = \frac{1}{i(k_3 + \kappa_3)} [C_1(\epsilon f_1(\kappa_3) + \beta_{k_{\parallel}}^{(1)}(k_3, \kappa_3)) + C_2(\epsilon f_2(k_3) + \beta_{k_{\parallel}}^{(2)}(k_3, \kappa_3))]. \quad (18)$$

Предположим, что $\theta(\pm x_3)W(x) \neq 0$ (случаи $\theta(x_3)W(x) = 0$ или $\theta(-x_3)W(x) = 0$ рассматриваются аналогично с соответствующими упрощениями). Тогда условие существования ненулевого решения уравнения (8), очевидно, эквивалентно существованию ненулевого решения (C_1, C_2) полученной однородной системы линейных уравнений (17), (18) или равенству нулю определителя ее матрицы

$$-\frac{1}{(k_3 + \kappa_3)^2} [-(k_3 + \kappa_3)^2 - i(k_3 + \kappa_3)(\epsilon f(k_3, \kappa_3) + i\beta_{k_{\parallel}}(k_3, \kappa_3))] = 0,$$

откуда сразу вытекает равенство (14). Единственность решения уравнения (8) с точностью до множителя следует из соотношения (16) и того факта, что ранг матрицы системы уравнений (17), (18) равен единице. Действительно, из условия $f(0, 0) \neq 0$ вытекает, что одно из чисел $f_1(0), f_2(0)$ отлично от нуля. Пусть, например, $f_1(0) \neq 0$. Тогда для малых κ_3 имеем $f_1(\kappa_3) \neq 0$ и элемент матрицы $\epsilon f_1(\kappa_3) + \beta_{k_{\parallel}}^{(1)}(k_3, \kappa_3) = \epsilon f_1(\kappa_3) + o(\epsilon)$ (см. (12)) при малых ϵ не равен нулю. Тем самым лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В случае существования для всех $\epsilon > 0$ решения уравнения (8) при условии ограниченности величины $V_0 = V_0(\epsilon)$ должно выполняться соотношение $V_0 = O(\epsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. В силу соотношений (14), (7) и (12) имеем $\sqrt{E - k_{\parallel}^2} + \sqrt{E - V_0 - k_{\parallel}^2} = O(\epsilon)$, откуда $V_0 = O(\epsilon)$.

3. АСИМПТОТИКА УРОВНЕЙ

Положим $V_0 = -A\epsilon^\sigma$, где $A > 0$, $\sigma \geq 1$ — некоторые константы. Пусть вначале $\sigma > 2$. Положим $\nu = \min(\sigma - 1, 2)$ и выберем числа $K > 0$ и $\delta \in (1, \nu)$. Далее будем предполагать, что

$$f(0, 0) = \int_{\Omega} W(x) dx \neq 0. \quad (19)$$

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (8) при всех достаточно малых ϵ для совокупности чисел E , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \sqrt{E - k_{\parallel}^2} - \frac{\epsilon}{2i} \int_{\Omega} W(x) dx \right| \leq K\epsilon^\delta, \quad (20)$$

имеет единственное с точностью до множителя ненулевое решение в классе $L^2(\Omega)$. Для соответствующего решения E справедливо соотношение

$$E = k_{\parallel}^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \left(\int_{\Omega} W(x) dx \right)^2 + O(\epsilon^{1+\nu}). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем равенство (14) в виде

$$k_3 = -\sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} + \frac{\epsilon}{i} f(k_3, \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma}) + \beta_{k_{\parallel}}(k_3, \epsilon). \quad (22)$$

Будем рассматривать равенство (22) как уравнение относительно k_3 в множестве вида (20). Множество (20) запишем для k_3 в виде

$$S_\epsilon = \left\{ k_3 \in \mathbb{C} : \left| k_3 - \frac{\epsilon}{2i} f(0, 0) \right| \leq K\epsilon^\delta \right\}.$$

Заметим, что для малых ϵ в силу условия (19) следует $0 \notin S_\epsilon$.

Имеем для $k_3 \in S_\epsilon$ равенство

$$\sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} = k_3 \sqrt{1 + \frac{A\epsilon^\sigma}{k_3^2}} = k_3 \left[1 + \frac{A\epsilon^\sigma}{2k_3^2} + O\left(\left(\frac{\epsilon^\sigma}{k_3^2}\right)^2\right) \right]. \quad (23)$$

Из того, что $k_3 \in S_\epsilon$, вытекают соотношения $k_3 = O(\epsilon)$ и $k_3^{-2} = O(\epsilon^{-2})$ (ϵ мало). Используя эти соотношения, запишем равенство (23) в виде

$$\sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} = k_3 - a(k_3, \epsilon), \quad (24)$$

где функция

$$a(k_3, \epsilon) = -k_3 \left[\frac{A\epsilon^\sigma}{2k_3^2} + O\left(\left(\frac{\epsilon^\sigma}{k_3^2}\right)^2\right) \right]$$

удовлетворяет оценке $|a(k_3, \epsilon)| \leq C\epsilon^{\sigma-1}$, причем константа C не зависит от $k_3 \in S_\epsilon$. Далее, в силу аналитичности функций f_1, f_2 и соотношения (24) имеем

$$\frac{\epsilon}{i} f(k_3, \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma}) = \frac{\epsilon}{i} f(0, 0) + b(k_3, \epsilon), \quad (25)$$

где функция $b(k_3, \epsilon)$ удовлетворяет оценке $|b(k_3, \epsilon)| \leq C'\epsilon^2$, причем C' не зависит от $k_3 \in S_\epsilon$. Такая же оценка в силу (12), (13) справедлива для функции $\beta_{k_\parallel}$. Положим

$$c(k_3, \epsilon) = \frac{1}{2}(a(k_3, \epsilon) + b(k_3, \epsilon) + \beta_{k_\parallel}(k_3, \epsilon)).$$

Вследствие соотношений (24), (25) равенство (22) можно переписать в виде

$$k_3 = \frac{1}{2} \left(k_3 - \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} + \frac{\epsilon}{i} f \left(k_3, \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} \right) + \beta_{k_\parallel}(k_3, \epsilon) \right) = \frac{\epsilon}{2i} f(0, 0) + c(k_3, \epsilon), \quad (26)$$

причем $|c(k_3, \epsilon)| \leq C''\epsilon^\nu$, где C'' не зависит от $k_3 \in S_\epsilon$.

Равенство (26) можно рассматривать как уравнение для неподвижной точки отображения (функции)

$$\begin{aligned} F(k_3) &= \frac{1}{2} \left(k_3 - \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} + \frac{\epsilon}{i} f \left(k_3, \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} \right) + \beta_{k_\parallel}(k_3, \epsilon) \right) = \\ &= \frac{\epsilon}{2i} f(0, 0) + c(k_3, \epsilon). \end{aligned} \quad (27)$$

Докажем, что отображение F переводит множество S_ϵ в себя и является сжимающим на данном множестве для всех достаточно малых ϵ . Пусть $k_3 \in S_\epsilon$. Тогда в силу сказанного выше

$$\left| F(k_3) - \frac{\epsilon}{2i} f(0, 0) \right| = |c(k_3, \epsilon)| \leq C\epsilon^\nu \leq K\epsilon^\delta$$

для достаточно малых ϵ , поскольку $\nu > \delta$. Отсюда следует, что $F(k_3) \in S_\epsilon$. Докажем, что F – сжимающее отображение. Пусть $k_3, \tilde{k}_3 \in S_\epsilon$. Используя формулу (27), имеем

$$\begin{aligned} |F(k_3) - F(\tilde{k}_3)| &\leq \frac{1}{2} \left| \left(k_3 - \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} \right) - \left(\tilde{k}_3 - \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^\sigma} \right) \right| + \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} \left| f \left(k_3, \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} \right) - f \left(\tilde{k}_3, \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^\sigma} \right) \right| + \\ &\quad + \frac{1}{2} |\beta_{k_\parallel}(k_3, \epsilon) - \beta_{k_\parallel}(\tilde{k}_3, \epsilon)|. \end{aligned} \quad (28)$$

Из соотношения (24) и равенства

$$k_3 = \frac{\epsilon}{2i} f(0, 0) + O(\epsilon^\delta),$$

вытекающего из определения множества S_ϵ , следует, что

$$\begin{aligned} \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} - \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^\sigma} &= \frac{k_3^2 - \tilde{k}_3^2}{\sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} + \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^\sigma}} = \\ &= (k_3 - \tilde{k}_3) \frac{f(0, 0) + O(\epsilon^{\delta-1})}{f(0, 0) + O(\epsilon^{\delta-1}) + O(\epsilon^{\sigma-2})}. \end{aligned} \quad (29)$$

В силу соотношений $\delta > 1$, $\sigma > 2$ и условия (19) полученное выражение (29) по модулю не превосходит $C_1|k_3 - \tilde{k}_3|$, где $C_1 = \text{const}$ не зависит от (малых) ϵ и $k_3, \tilde{k}_3 \in S_\epsilon$.

Из (29) следует, что

$$\left| \left(k_3 - \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} \right) - \left(\tilde{k}_3 - \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^\sigma} \right) \right| = |k_3 - \tilde{k}_3| O(\epsilon^\mu), \quad (30)$$

где $\mu = \min(\delta - 1, \sigma - 2) > 0$.

Далее, используя соотношения (13), (29) и аналитичность функций f_1, f_2 , получаем неравенство

$$\left| f\left(k_3, \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma}\right) - f\left(\tilde{k}_3, \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^\sigma}\right) \right| \leq C_2 |k_3 - \tilde{k}_3|. \quad (31)$$

Наконец, заметим, что функция $\beta_{k_{\parallel}} = \beta_{k_{\parallel}}(k_3, \epsilon)$ для достаточно малых k_3 и ϵ дифференцируема по k_3 , причем

$$\frac{d\beta_{k_{\parallel}}(k_3, \epsilon)}{dk_3} = O(\epsilon^2). \quad (32)$$

Соотношения (28), (30)–(32) доказывают сжимаемость отображения F , а следовательно, существование единственного решения уравнения (22) (или, что то же, уравнения (14)) для всех достаточно малых ϵ . Утверждения теоремы 1 вытекают из леммы 2 и равенства (26) (нужно возвести его в квадрат).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Асимптотическая формула (21), в отличие от аналогичной формулы в следующей ниже теореме 2, не является следствием того, что $k_3 \in S_\epsilon$. По своей структуре формула (21) идентична формуле для $V_0 = 0$ [5] (если $\sigma \geq 3$, то $\nu = 2$ и (21) совпадает с формулой для $V_0 = 0$), чего нельзя сказать о формуле из теоремы 2, в которой скорость убывания величины ступеньки меньше.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из равенств (3), (24) и предложения 3 вытекает, что в случае, если

$$\int_{\Omega} W(x) dx < 0,$$

уровень E – это собственное значение, а в случае, если

$$\int_{\Omega} W(x) dx > 0,$$

уровень E – резонанс. Аналогично в нижеследующей теореме 2 E – это собственное значение.

В теореме 2 в отличие от теоремы 1 предполагается, что $\sigma = 2$, а константа δ заключается в промежутке $(1, 2)$. По-прежнему число $K > 0$ произвольно.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнены условия*

$$\int_{\Omega} W(x) dx < 0, \quad A < \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} W(x) dx \right)^2. \quad (33)$$

Тогда уравнение (8) имеет при всех достаточно малых ϵ для совокупности чисел E , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \sqrt{E - k_{\parallel}^2} - \frac{\epsilon}{2i} \left(\int_{\Omega} W(x) dx + \frac{A}{\int_{\Omega} W(x) dx} \right) \right| \leq K\epsilon^\delta,$$

единственное с точностью до множителя ненулевое решение в классе $L^2(\Omega)$. Для соответствующего уровня E справедливо соотношение

$$E = k_{\parallel}^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \left(\int_{\Omega} W(x) dx + \frac{A}{\int_{\Omega} W(x) dx} \right)^2 + O(\epsilon^{1+\delta}). \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$S'_\epsilon = \left\{ k_3 \in \mathbb{C} : \left| k_3 - \frac{\epsilon}{2i} \frac{f^2(0,0) + A}{f(0,0)} \right| \leq K\epsilon^\delta \right\}.$$

Для $k_3 \in S'_\epsilon$ имеем

$$k_3 = -\frac{i\epsilon}{2} \frac{f^2(0,0) + A}{f(0,0)} + \gamma(k_3, \epsilon), \quad (35)$$

где $|\gamma(k_3, \epsilon)| \leq K\epsilon^\delta$. Уравнение (14) или, что то же, (22) будет рассматриваться в множестве S'_ϵ .

С помощью (35) и (33) найдем

$$\sqrt{k_3^2 + A\epsilon^2} = -\frac{i\epsilon}{2} \frac{f^2(0,0) - A}{f(0,0)} + \frac{f^2(0,0) + A}{f^2(0,0) - A} \gamma(k_3, \epsilon) + O(\epsilon^{2\delta-1}). \quad (36)$$

Докажем, что (в обозначениях предыдущей теоремы) отображение F переводит множество S'_ϵ в себя. Пусть $k_3 \in S'_\epsilon$. Пользуясь соотношениями (27), (35), (36) и (25), найдем

$$\left| F(k_3) + \frac{i\epsilon}{2} \frac{f^2(0,0) + A}{f(0,0)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{2A}{f^2(0,0) - A} \gamma(k_3, \epsilon) + O(\epsilon^{2\delta-1}) + O(\epsilon^2) \right|.$$

Полученное выражение не превосходит $K\epsilon^\delta$ для достаточно малых ϵ при условии, что

$$\left| \frac{A}{f^2(0,0) - A} \right| = \frac{A}{f^2(0,0) - A} < 1. \quad (37)$$

Условие (37) выполнено в силу предположения (33).

Докажем сжимаемость отображения F . Используя первое равенство в (29), а также соотношения (35) и (36), имеем

$$\frac{1}{2} \left| \left(k_3 - \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^2} \right) - \left(\tilde{k}_3 - \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^2} \right) \right| = \frac{|k_3 - \tilde{k}_3|}{2} \left| \frac{-2A + O(\epsilon^{\delta-1})}{f^2(0,0) - A + O(\epsilon^{\delta-1})} \right|. \quad (38)$$

Далее, аналогично оценке (31) с помощью также (38) получаем

$$\begin{aligned} & \left| f\left(k_3, \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^2}\right) - f\left(\tilde{k}_3, \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^2}\right) \right| \leq \\ & \leq C \left(\left| \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^2} - \sqrt{\tilde{k}_3^2 + A\epsilon^2} \right| + |k_3 - \tilde{k}_3| \right) = \\ & = C|k_3 - \tilde{k}_3| \left(\left| \frac{f^2(0,0) + A + O(\epsilon^{\delta-1})}{f^2(0,0) - A + O(\epsilon^{\delta-1})} \right| + 1 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Из соотношений (28), (38), (39) и (31), а также из справедливости неравенства (37) следует сжимаемость отображения F . Тем самым существование требуемого решения уравнения (8) доказано. Асимптотическая формула (34) вытекает из (35). Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 при выполнении некоторых условий исчерпывают возможности получения простых асимптотических формул для решений k_3 уравнения (14) (соответственно для уровня E уравнения (8)) в описываемой ситуации. Более точно, предположим,

что $V_0 = -A\epsilon^\sigma$, где $A > 0$, $\sigma \geq 1$ (см. следствие леммы 2). Рассмотрим возможность представления решения k_3 уравнения (14) (или (22)) в виде

$$k_3 = B\epsilon^a + O(\epsilon^{a+\mu}), \quad B \neq 0, \quad a, \mu > 0. \quad (40)$$

Предположим, что выполнены соотношения

$$\frac{A}{2B} + if(0, 0) \neq 0, \quad (41)$$

$$A + B^2 \neq 0. \quad (42)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть при всех достаточно малых $\epsilon > 0$ существует решение k_3 уравнения (22), для которого выполнены соотношения (40). Тогда для достаточно малых ϵ либо $\sigma > 2$, $a = 1$ и k_3 совпадает с решением из формулировки теоремы 1, либо $\sigma = 2$, $a = 1$; если в последнем случае $\mu > \delta - 1$, где δ взято из формулировки теоремы 2, и выполнены условия (33), то k_3 для малых ϵ совпадает с решением, определяемым теоремой 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства (22) имеем

$$k_3 = -\sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} + \frac{\epsilon}{i}f\left(k_3, \sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma}\right) + O(\epsilon^2). \quad (43)$$

Пусть вначале $\sigma > 2a$. Тогда вследствие соотношений (40), (43) получаем

$$k_3 = -k_3 + \phi(k_3, \epsilon) + \frac{\epsilon}{i}f(0, 0) + O(\epsilon^{1+a}) + O(\epsilon^2), \quad (44)$$

где

$$\phi(k_3, \epsilon) = -\frac{A\epsilon^\sigma}{2k_3} + o(\epsilon^{\sigma-a}) = -\frac{A\epsilon^{\sigma-a}}{2B} + o(\epsilon^{\sigma-a}) = O(\epsilon^{\sigma-a}). \quad (45)$$

Если при этом $a > 1$, то

$$k_3 = \frac{\epsilon}{2i}f(0, 0) + O(\epsilon^{\sigma-a}) + O(\epsilon^2). \quad (46)$$

Сравнение (46) с (40) приводит к противоречию, т.к. $a = 1$. Пусть $a < 1$. Сравнивая (44) с (40) (учитывая при этом (45)), также легко приходим к противоречию (в случае $\sigma - 1 = 1$ используем еще и условие (41)). Рассмотрим оставшуюся возможность $a = 1$, тогда $\sigma > 2$. Вследствие (44), (45) получаем

$$\left|k_3 - \frac{\epsilon}{2i}f(0, 0)\right| \leq C\epsilon^\nu,$$

где $\nu = \min(\sigma - 1, 2)$, так что для достаточно малых ϵ имеем $k_3 \in S_\epsilon$ (определение множества S_ϵ см. в доказательстве теоремы 1). Таким образом решение уравнения (22) совпадает с решением (21) из теоремы 1.

Рассмотрим теперь случай $\sigma < 2a$. В силу соотношений (40) и (43) имеем

$$k_3 = -\sqrt{A}\epsilon^{\sigma/2} + O(\epsilon^{2a-\sigma/2}) + \frac{\epsilon}{i}f(0, 0) + O(\epsilon^{1+\sigma/2}) + O(\epsilon^2). \quad (47)$$

Сравнение равенств (47) и (40) приводит к противоречию.

Рассмотрим оставшийся случай $\sigma = 2a$. Имеем согласно (40) и (42)

$$\sqrt{k_3^2 + A\epsilon^\sigma} = \sqrt{B^2 + A}\epsilon^a + O(\epsilon^{a+\mu}).$$

Вследствие (43)

$$k_3 = -\sqrt{B^2 + A}\epsilon^a + O(\epsilon^{a+\mu}) + \frac{\epsilon}{i}f(0,0) + O(\epsilon^{1+a}) + O(\epsilon^2). \quad (48)$$

Пусть $a > 1$, тогда из сравнения (48) с (40) следует, что $a = 1$ (противоречие). В случае $a < 1$ в силу условия (42) имеем $B = -\sqrt{B^2 + A}$, откуда $A = 0$, что также невозможно. Наконец, если $a = 1$, то $\sigma = 2$ и

$$k_3 = \left(-\sqrt{B^2 + A} + \frac{1}{i}f(0,0)\right)\epsilon + O(\epsilon^{1+\mu}) + O(\epsilon^2), \quad (49)$$

откуда согласно (40)

$$B = -\sqrt{B^2 + A} + \frac{1}{i}f(0,0). \quad (50)$$

Следовательно,

$$B = \frac{A + f^2(0,0)}{2if(0,0)}. \quad (51)$$

В соответствии с (49)–(51)

$$\left|k_3 - \frac{A + f^2(0,0)}{2if(0,0)}\epsilon\right| \leq C\epsilon^\rho,$$

где $\rho = \min(1 + \mu, 2)$. Если $\mu > \delta - 1$, то $\rho > \delta$ и $k_3 \in S'_\epsilon$ для малых ϵ (определение S'_ϵ см. в доказательстве теоремы 2). Теорема 3 доказана.

Список литературы

- [1] Ю. П. Чубурин. ТМФ. 1988. Т. 77. № 3. С. 472.
- [2] E. B. Davies. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1977. V. 82. P. 327.
- [3] E. B. Davies, B. Simon. Commun. Math. Phys. 1978. V. 63. P. 277.
- [4] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [5] Ю. П. Чубурин. Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 138.
- [6] Ю. П. Чубурин. О рассеянии на кристаллической пленке (спектр и асимптотика волновых функций уравнения Шредингера). Препринт. Свердловск: Физико-технический институт УНЦ АН СССР, 1985.
- [7] Ю. П. Чубурин. ТМФ. 1987. Т. 72. № 1. С. 120.
- [8] Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кириш, Б. Саймон. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [9] Ю. П. Чубурин. ТМФ. 1997. Т. 110. № 3. С. 443.
- [10] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 27.XI.1998 г.