Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Жислин, Спектральные свойства гамильтонианов с магнитным полем при фиксации псевдомомента. III, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 291–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf776>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:47:29

© 1999 г.

Г. М. Жислин*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГАМИЛЬТониАнов с МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ПРИ ФИКСАЦИИ ПСЕВДОМОМЕНТА. III

Доказана применимость полученных в [2] общих результатов о структуре дискретного спектра операторов энергии нейтральных систем в однородном магнитном поле при фиксации псевдомомента к гамильтонианам любых атомов. Установлена теорема о локализации существенного спектра положительных ионов при фиксации псевдомомента атома. Приводятся асимптотики дискретного спектра гамильтонианов с однородным магнитным полем для любых атомов. Работа завершает цикл исследований спектральных свойств гамильтонианов нейтральных систем в однородном магнитном поле при фиксации псевдомомента. Ранее для таких систем был найден существенный спектр [1] и получена характеристика дискретного спектра [2], однако вопрос о применимости теорем из [2] к реальным n -частичным системам при $n > 3$ оставался открытым.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа завершает цикл публикаций, посвященных применению геометрических методов к исследованию спектра операторов энергии нейтральных систем в однородном магнитном поле после фиксации псевдомомента. Ранее мы доказали теорему о локализации существенного спектра таких операторов [1] и получили условия конечности и бесконечности дискретного спектра, а также спектральные асимптотики [2]. Однако все результаты работы [2] о дискретном спектре были установлены при условии, что граница существенного (и дискретного) спектра рассматриваемой системы определяется только ее распадами $Z_2 = (A_1, A_2)$ на две устойчивых подсистемы A_1, A_2 , или, более точно, на такие подсистемы, что нижняя грань спектра соответствующего гамильтониана $H_0(Z_2)$ есть точка его дискретного спектра. Данное предположение является обычным при исследовании дискретного спектра гамильтонианов как в отсутствие, так и при наличии магнитного поля, однако проверка его выполнения для конкретных систем далеко не тривиальна даже для не слишком сложных систем. В работе [2] нам удалось доказать справедливость данного условия только для атомов водорода и гелия.

* Научно-исследовательский радиофизический институт Министерства общего и профессионального образования Российской Федерации, Нижний Новгород, Россия

Таким образом, вопрос о применимости результатов [2] к более сложным системам оставался открытым.

Позднее С. А. Вугальтер установил справедливость этого условия для любых атомов, и на этой основе результаты для гамильтонианов атомов были анонсированы в [3] (доказательство Вугальтера не опубликовано).

В настоящей работе дается полное доказательство предположений, обеспечивающих применимость найденных в [2] спектральных асимптотик к гамильтонианам произвольных атомов, и тем самым обосновываются результаты [3]. Мы формулируем вытекающие из [2] результаты для атомных гамильтонианов с учетом принципа Паули (в [3] симметрия не учитывалась).

Доказательство по существу сводится к изучению спектральных свойств нижней границы спектра гамильтониана положительного иона, полученного из гамильтониана атома с фиксированным псевдомоментом. Это выполнено в разделе 2, где также показано, что дискретный спектр не пуст (именно этот факт обеспечивает применимость к атомному гамильтониану результатов [2]), если для гамильтониана иона справедлива теорема Хунцикера–ван Винтера–Жислина. Справедливость этой теоремы для операторов энергии положительных ионов доказана в разделе 3. При этом широко используются специальные разбиения конфигурационного пространства, разработанные нами ранее [4]. Для простоты в приводимом доказательстве мы пренебрегаем перестановочной симметрией, однако все его технические конструкции выполнены так, чтобы они сохраняли перестановочную симметрию тех систем и подсистем, с которыми идет работа. Поэтому учет симметрии может быть осуществлен просто добавлением “симметричных рассуждений” к уже проведенным.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Пусть $Z_1 = \{1, 2, \dots, N\}$ – произвольная нейтральная система типа атома в однородном магнитном поле $(0, 0, B)$, направленном по оси z ; $m_i, e_i, r_i = (x_i, y_i, z_i)$ – масса, заряд и радиус-вектор i -й частицы, $e = e_2 = e_3 = \dots = e_N$, $e_1 = -(N-1)e$, $m = m_2 = m_3 = \dots = m_N$, $M = m_1 + (N-1)m$,

$$q_j = (q_{j\perp}, q_{j3}) = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}) = r_j - \sum_{t=1}^N m_t r_t M^{-1}, \quad q = (q_1, \dots, q_N).$$

Гамильтониан системы Z_1 после отделения движения центра масс в направлении оси z и сужения на подпространство состояний с фиксированными значениями ν_1, ν_2 компонент псевдомомента может быть записан в следующей форме [2]:

$$H_0 = T_{0\perp} + T_{03} + F + V(q), \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{0\perp} &= \sum_{t=1}^N m_t \sum_{p=1}^2 \left(\frac{1}{i} \nabla_{tp} - \mathcal{D}_{tp} \right)^2, \quad T_{03} = \sum_{t=1}^N m_t \left(\frac{1}{i} \nabla_{t3} \right)^2, \\
 \nabla_{tp} &= \frac{1}{m_t} \frac{\partial}{\partial q_{tp}} - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial q_{jp}}, \quad p = 1, 2, 3, \\
 \mathcal{D}_{tp} &= \nu_p \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{Nm_t} \right) + (-1)^{p+1} \sum_{j=1}^N (q_{j\bar{p}} - q_{t\bar{p}}) \left(\frac{e_t - e_j}{Nm_t} + \frac{2e_j}{M} \right), \quad \bar{p} = 3 - p, \\
 F &= (\nu_1 + \mathcal{E}_2)^2 + (\nu_2 - \mathcal{E}_1)^2, \quad \mathcal{E}_j = 2B \sum_{t=1}^N e_t q_{tj}, \quad V(q) = \sum_{s < t}^{1, N} V_{st}(|q_s - q_t|) \quad (1.3) \\
 V_{st}(|q_1|) &= e_s e_t |q_1|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 2.
 \end{aligned}$$

Для простоты будем называть рассматриваемую систему атомом, частицу с номером 1 – ядром, частицы с номерами 2, 3, ..., N – электронами, хотя случаю атома отвечает только $\gamma = 1$, а мы допускаем любые $\gamma \in (0, 2)$.

1.2. Пусть

$$R_0 = \left\{ q \mid q = (q_1, \dots, q_N) \mid q_i = r_i - \sum_{j=1}^N m_j r_j M^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

В пространстве $\mathcal{L}_2(R_0)$ расширим оператор H_0 с области $\mathcal{D}(H_0) \equiv C_0^2(R_0)$ до самосопряженного оператора, сохраняя для последнего и его области определения обозначения H_0 и $\mathcal{D}(H_0)$. Пусть S_p – группа перестановок p тождественных элементов, а $\alpha_k(p)$, $0 \leq k \leq p/2$, – типы неприводимых представлений этой группы, отвечающие разбиению числа p на k двоек и $p - 2k$ единиц, т.е. отвечающие одно- (при $k = 0$) или двухстолбцовым схемам Юнга. Пусть $S = S_{N-1}$, $\alpha = \alpha_k = \alpha_k(N-1)$, $0 \leq k \leq (N-1)/2$. Согласно принципу Паули только координатные волновые функции симметрии $\alpha = \alpha_k$ могут описывать состояния квантовой системы. Обозначим через $P^{(\alpha)}$ проектор в $\mathcal{L}_2(R_0)$ на подпространство функций симметрии α и положим $H_0^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} H_0$, $\mathcal{D}(H_0^{(\alpha)}) = P^{(\alpha)} \mathcal{D}(H_0)$.

В настоящей работе изучается дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$. Далее для произвольного самосопряженного оператора T мы будем обозначать через $\sigma_d(T)$, $\sigma_{\text{ess}}(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_{\text{pp}}(T)$ и $\sigma(T)$ соответственно дискретный, существенный, точечный, чисто точечный и полный спектры.

1.3. Пусть $Z_t = \{A_1, \dots, A_t\}$ – такое разбиение системы Z_1 на t непересекающихся кластеров A_j , в котором каждый из кластеров $A_2, \dots, A_t$ состоит из одного электрона, а ядро содержится в кластере A_1 . Число $|A_1|$ элементов кластера A_1 обозначим через n . Так как частицы с номерами 2, 3, ..., N тождественны, то, не ограничивая общности,

можно считать, что $A_1 = \{1, 2, \dots, n\}$, $A_j = \{n + j - 1\}$, $j = 2, 3, \dots, t$, где $n > 1$ – некоторое число и $t = N - n + 1$. Положим

$$\begin{aligned} M[A_1] &= \sum_{j=1}^n m_j = m_1 + (n-1)m, & Q[A_1] &= \sum_{j=1}^n e_j = (n-N)e, \\ R_{03}(Z_t) &= \left\{ q \mid q \in R_0, \sum_{j=1}^n m_j q_{j3} = 0, q_{j3} = 0, j = n+1, \dots, N \right\}, \\ R_{c3}(Z_t) &= \{ q \mid q \in R_0, q_j = (0, 0, q_{j3}), j = 1, \dots, N, \\ &\quad (q, \tilde{q})_1 = 0 \quad \forall \tilde{q} \in R_{03}(Z_t) \}, \end{aligned}$$

где для любых $q = (q_1, \dots, q_N)$, $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N)$ из R_0

$$(q, \tilde{q})_1 = \sum_{j=1}^N m_j (q_j, \tilde{q}_j)_{R^3}. \quad (1.4)$$

Оператор энергии составной системы Z_t , состоящей из положительного иона (кластера A_1) и не взаимодействующих между собой и с A_1 электронов с номерами $n+1, n+2, \dots, N$ (т.е. кластеров $A_2, \dots, A_t$), после отделения движения центра масс каждого кластера в направлении оси z записывается в виде

$$H_{03}(Z_t) = T_{0\perp} + T_{03}(Z_t) + F + V_{Z_t}, \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} T_{03}(Z_t) &= T_{03}[A_1] = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{m_j} \left(\frac{\partial}{\partial q_{j3}(Z_1)} - \frac{m_j}{M[A_1]} \sum_{p=1}^n \frac{\partial}{\partial q_{p3}(Z_t)} \right)^2, \\ V_{Z_s}(q) &= V[A_1] = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{1,n} e_i e_j |q_i - q_j|^{-\gamma}, \\ q_i - q_j &= (q_{i\perp} - q_{j\perp}, q_{i3}(Z_t) - q_{j3}(Z_t)), \\ q_{i3}(Z_s) &= q_{i3}[A_1] = q_{i3} - \frac{1}{M[A_1]} \sum_{j=1}^n m_j q_{j3}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Оператор $H_{03}(Z_t)$ будет рассматриваться в пространстве $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_t))$.

1.4. Пусть $\hat{S} = \hat{S}(Z_t)$ – группа перестановочной симметрии системы Z_1 . Ясно, что $\hat{S}$ является прямым произведением группы S_{n-1} перестановок $n-1$ тождественных электронов из A_1 и группы S_{t-1} перестановок тождественных кластеров – электронов $A_2, \dots, A_t$. Обозначим возможные типы неприводимых представлений группы $\hat{S}$ в $\mathcal{L}_2(R_0)$, $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_t))$ и $\mathcal{L}_2(R_{c3}(Z_t))$ и их матрицы соответственно $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_c$ и $\mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha})}, \mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_0)}, \mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_c)}$. Определим понятие индуцирования $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_0(Z_t) \prec \alpha$ так же, как в [2], но в дополнение отметим, что в частном случае $Z_t = Z_2 = \{A_1, A_2\}$, $A_2 = (N)$, множество $E(\alpha) = \{\hat{\alpha} | \hat{\alpha}_0 \prec \alpha_0\}$ легко описать явно [5]. Пусть $\hat{\alpha}'_0 = \alpha_k(N-2)$ при $k=0$, $\hat{\alpha}''_0 =$

$\alpha_{k-1}(N-2)$ при $k \geq 1$. Тогда $E(\alpha_k) = \{\hat{\alpha}'_0, \hat{\alpha}''_0\}$ при $0 < k < (N-1)/2$, $E(\alpha_0) = (\hat{\alpha}'_0)$, $E(\alpha_{(N-1)/2}) = (\hat{\alpha}''_0)$ при нечетном N . Отметим также, что кратность представлений типа $\hat{\alpha}_0 \in E(\alpha_k)$ группы $\hat{S}$ в представлении типа α_k группы S после сужения последнего с S на $\hat{S}$ равна единице. Обозначим через $P(\hat{\alpha}_0)$ проектор в $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_t))$ на подпространство функций симметрии $\hat{\alpha}_0$ и положим

$$H_{03}(\alpha; Z_t) = \sum_{\hat{\alpha}_0 \prec \alpha} H_{03}(Z_t) P^{(\hat{\alpha}_0)},$$

$$\mu^{(\alpha)} = \inf H_{03}(\alpha; Z_2).$$

ТЕОРЕМА 1.1. Число $\mu^{(\alpha)}$ есть дискретное собственное значение оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$ при любом α и $Z_2 = \{Z_1 \setminus N, N\}$.

Теорема 1.1 является основным результатом данной работы. Она устанавливает справедливость не доказанного ранее соотношения

$$\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2)), \quad (1.7)$$

выполнение которого было условием применимости теоремы об асимптотике дискретного спектра к системам типа атомов [2]. Теперь легко сформулировать теорему об асимптотике дискретного спектра оператора $H_0^{(\alpha)}$ для атомов, не содержащую никаких дополнительных условий. Эта теорема следует из теоремы 1.4 работы [2] и теоремы 1.1 и формулируется несколько проще и конкретней, чем теорема 1.4 [2] за счет свойств рассматриваемой системы Z_1 .

Пусть $W(\alpha; Z_2)$ – собственное подпространство оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$, отвечающее числу $\mu^{(\alpha)}$, и

$$d(\alpha) = \sum_{\hat{\alpha}_0 \prec \alpha} d(\alpha; \hat{\alpha}_0),$$

где $d(\alpha; \hat{\alpha}_0)$ – кратность представления типа $\hat{\alpha}_0$ группы $\hat{S}$ в $W(\alpha; Z_2)$ (т.е. $d(\alpha; \hat{\alpha}_0) = \dim P^{(\hat{\alpha}_0)} W(\alpha; Z_2) / \dim \mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_0)}$). Обозначим через $N(\mu^{(\alpha)} + \lambda; H_0^{(\alpha)})$ размерность линейной оболочки собственных функций оператора $H_0^{(\alpha)}$, отвечающих его собственным значениям, не превосходящим $\mu^{(\alpha)} + \lambda$, $\lambda < 0$.

ТЕОРЕМА 1.2. При $\lambda \rightarrow -0$

$$N(\mu^{(\alpha)} + \lambda; H_0^{(\alpha)}) = |\lambda|^{(\gamma-2)/2\gamma} d(\alpha) e^2 \left(\frac{m(M-m)}{M} \right) J(\gamma) + O(|\ln \lambda|),$$

где

$$J(\gamma) = \gamma^{-1} \int_1^\infty (u-1)^{1/2} u^{-(\gamma+1)/\gamma} du.$$

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Для кулоновских взаимодействий $\gamma = 1$ и $J(1) = \pi/2$.
2. Существуют предположения, что

$$d(\alpha_k; \hat{\alpha}'_0) = 1, \quad d(\alpha_k, \hat{\alpha}''_0) = 0$$

при $k \neq 0, (N-1)/2$;

$$d(\alpha_0; \hat{\alpha}'_0) = 1, \quad d_0(\alpha_{(N-1)/2}; \hat{\alpha}''_0) = 1;$$

и, значит,

$$d(\alpha) = 1.$$

Однако ни одно из этих соотношений пока не доказано.

Доказательство теоремы 1.1 приведено в разделах 2, 3.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1 (ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ)

2.1. Мы проведем доказательство без учета симметрии, т.е. вместо оператора $H_{03}(\alpha; Z_t)$ будем рассматривать оператор $H_{03}(Z_t)$. Сначала, используя индукцию по числу n частиц кластера A_1 , докажем, что

$$\inf H_{03}(Z_t) \in \sigma_{\text{pp}}(H_{03}(Z_t)) \quad (2.1)$$

при $Z_t = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$, $A_1 = \{1, \dots, n\}$, $A_j = \{n+j-1\}$ для $n = 1, 2, \dots, N-2$ (т.е. для $t = N, N-1, \dots, 3$), а потом, используя (2.1) для $n = N-2$ ($t = 3$), установим справедливость соотношения

$$\mu \equiv \inf H_{03}(Z_2) \in \sigma_d(H_{03}(Z_2)), \quad (2.2)$$

которое и составляет утверждение теоремы 1.1 в случае, когда не учитывается симметрия.

Предварительно преобразуем оператор $H_{03}(Z_t)$ к новым переменным, выбирая их так, чтобы отделить движение частиц из кластеров $A_2, \dots, A_t$, т.е. электронов с номерами $n+1, \dots, N$. С этой целью в плоскости x, y введем новые координаты $q_{j\perp}^0$ по отношению к центру масс системы $A_2, \dots, A_t$, а координаты в направлении оси z оставим прежними, т.е. полагаем

$$q_{j\perp}^0 = q_{j\perp}^0(Z_t) = q_{j\perp} - \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=n+1}^N q_{i\perp}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

где $\omega_n = N-n$ и $q_{j3}^0 = q_{j3}(Z_t)$, $j = 1, \dots, n$ (см. (1.6)); $q_{j3}^0 = 0$, $j = n+1, \dots, N$.

Отметим, что при $n \leq N-2$ новые координаты линейно зависимы, ибо

$$\sum_{j=n+1}^N m_j q_{j\perp}^0 = 0,$$

а при $n = N - 1$ (т.е. при $t = 2$) $q_{N\perp}^0 = 0$. В переменных $q_j^0 = (q_{j\perp}^0, q_{j3}^0)$ оператор $H_{03}(Z_t)$, определенный в (1.5), запишется в виде

$$\begin{aligned} H_{03}(Z_t) = & \sum_{p=1}^2 \sum_{k=n+1}^N m \left[\frac{1}{im} \sum_{l=n+1}^N \left(\delta_{kl} - \frac{1}{\omega_n} \right) \frac{\partial}{\partial q_{lp}^0} + (-1)^p \frac{Be}{m} q_{k\bar{p}}^0 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{im\omega_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_{jp}^0} + \varphi_{k\bar{p}} \right]^2 + \\ & + \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{im_k} \frac{\partial}{\partial q_{kp}^0} - \mathcal{D}_{kp}^0 \right)^2 + T_{03}^0(Z_t) + V_{Z_t}^0 + F^0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где операторы $T_{03}^0(Z_t)$, $V_{Z_t}^0$ и F^0 можно получить из $T_{03}(Z_t)$, V_{Z_t} и F , если вместо q_{jp} написать q_{jp}^0 ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{kp}^0 &= \varphi_{k\bar{p}} + (-1)^p B e_k m_k^{-1} q_{k\bar{p}}^0, \quad \bar{p} = 3 - p, \\ \varphi_{kp} &\equiv \nu_p \left(\frac{1}{M} - \frac{1}{m_k N} \right) + (-1)^{p+1} B \sum_{j=1}^n q_{j\bar{p}}^0 \left(\frac{e_k - e_j}{m_k N} + \frac{2e_j}{M} \right) \end{aligned}$$

и $\varphi_{k\bar{p}} = \varphi_{2\bar{p}}$, $k = 3, \dots, N$.

Отметим, что при переходе от (1.5) к (2.4) мы использовали очевидные равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_{i\perp}(Z_t)} &= \frac{\partial}{\partial q_{i\perp}^0}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial}{\partial q_{i\perp}(Z_t)} &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial q_{k\perp}^0} \left(\delta_{ki} - \frac{1}{\omega_n} \right), \quad i = n+1, \dots, N, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_{i\perp}(Z_t)} = 0.$$

Возведем в квадрат выражение в квадратных скобках в (2.4) и учтем, что

$$\sum_{j=n+1}^N q_{jp}^0 = 0, \quad \sum_{j=n+1}^N \left(\delta_{ij} - \frac{1}{\omega_n} \right) = 0, \quad i = n+1, \dots, N,$$

тогда оператор $H_{03}(Z_t)$ запишется в виде суммы операторов $H_{03}[A_1]$ и $H_{03}(\Sigma_{t-1})$, являющихся операторами энергии кластера A_1 и $(t-1)$ -кластерной составной системы $\Sigma_{t-1} = \{A_2, \dots, A_t\}$ (состоящей из не взаимодействующих между собой кластеров A_j). Эти операторы зависят соответственно от переменных q_j^0 , $j = 1, \dots, n$, и $q_{j\perp}^0$, $j = n+1, \dots, N$, т.е.

$$H_{03}(Z_t) = H_{03}[A_1] \otimes I(\Sigma_{t-1}) + I[A_1] \otimes H_{03}(\Sigma_{t-1}), \quad (2.5)$$

где

$$H_{03}[A_1] = T_{0\perp}^0[A_1] + T_{03}^0[A_1] + F^0 + V^0[A_1], \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} T_{0\perp}^0[A_1] = & \sum_{p=1}^2 \sum_{j=1}^n \left\{ m_j \left(\frac{1}{im_j} \frac{\partial}{\partial q_{jp}^0} - D_{jp}^0 \right)^2 + \right. \\ & \left. + \omega_n m \left(-\frac{1}{im\omega_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_{jp}^0} + \varphi_{2\bar{p}} \right)^2 \right\}, \\ H_{03}(\Sigma_{t-1}) = & \sum_{p=1}^2 \sum_{l=n+1}^N \frac{1}{m} \left[\frac{1}{i} \sum_{j=n+1}^N \left(\delta_{jl} - \frac{1}{\omega_n} \right) \frac{\partial}{\partial q_{jp}^0} + (-1)^p q_{l\bar{p}}^0 B e \right]^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$I[A_1]$ и $I(\Sigma_{t-1})$ – единичные операторы в пространствах функций, зависящих соответственно от $q_1^0, \dots, q_n^0$ и $q_{n+1\perp}^0, \dots, q_{N\perp}^0$; $T_{03}^0[A_1] = T_{03}^0(Z_t)$, $V^0[A_1] = V_{Z_t}^0$.

2.2. Оператор $H_{03}(\Sigma_{t-1})$ при $t > 2$ имеет чисто точечный спектр (при $t = 2$ в силу (2.7) $H_{03}(F) \equiv 0$). Действительно, по построению

$$H_{03}(\Sigma_{t-1}) + T_{0\perp}^0[A_1] + F^0 = T_{0\perp} + F = H_{03}(Z_N), \quad (2.8)$$

где $H_{03}(Z_N)$ – оператор кинетической энергии движения в плоскости x, y системы N не взаимодействующих между собой частиц, находящихся в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси z , после фиксации псевдомомента. До такой фиксации гамильтониан системы Z_N (отвечающей движению в плоскости x, y) имел бесконечно вырожденный точечный спектр, состоящий из сумм уровней Ландау по всем частицам системы. Поэтому и гамильтониан $H_{03}(Z_N)$, полученный после фиксации псевдомомента, также имеет чисто точечный спектр. Таким образом, в силу (2.8) сумма операторов $H_{03}(\Sigma_{t-1})$ и $T_{0\perp}^0[A_1] + F^0$ имеет чисто точечный спектр. Так как эти операторы зависят от различных переменных, то

$$\sigma(H_{03}(\Sigma_{t-1})) = \sigma_{pp}(H_{03}(\Sigma_{t-1})).$$

Далее, поскольку оператор $H_{03}(\Sigma_{t-1})$ зависит только от переменных $q_{n+1\perp}^0, \dots, q_{N\perp}^0$, а оператор $H_{03}[A_1]$ – только от $q_1^0, \dots, q_n^0$, то доказываемое нами включение (2.1) эквивалентно включению

$$\inf H_{03}[A_1] \in \sigma_{pp}(H_{03}[A_1]). \quad (2.9)$$

Именно (2.9) мы и установим ниже.

2.3. Для доказательства (2.9) применим индукцию по числу n элементов кластера A_1 . Пусть $n = 1$, т.е. $A_1 = (1)$. Тогда $t = N$, $Z_t = Z_N$ и включения (2.1), (2.9) следуют из уже проведенных рассуждений. Предположим, что для некоторого n , $1 \leq n \leq N-2$, разбиения $Z_t = \{A_1, \dots, A_t\}$ с $A_1 = (1, \dots, n)$, $A_j = (n+j-1)$, $j = 2, \dots, t$, выполняется включение (2.9) и, следовательно, (2.1). Пусть $Z'_{t-1} = \{A'_1, \dots, A'_{t-1}\}$,

$\Sigma'_{t-2} = \{A'_2, \dots, A'_{t-1}\}$, где $A'_1 = A_1 \cup A_2 = (1, 2, \dots, n+1)$, $A'_j = A_{j+1} = (n+j)$, $j = 2, \dots, t-1$.

Определим операторы $H_{03}(Z'_{t-1})$, $H_{03}[A'_1]$, $T_{0\perp}^0[A'_1]$, $T_{03}[A'_1]$, $V^0[A'_1]$, $H_{03}(\Sigma'_{t-2})$, $I[A'_1]$ и $I(\Sigma'_{t-2})$ так же, как были определены аналогичные операторы для распадения Z_t и Σ_{t-1} и кластера A_1 в (2.5)–(2.7), но заменив n на $n+1$, A_1 на A'_1 , Z_t на Z'_{t-1} , Σ_{t-1} на Σ'_{t-2} и переменные $q_j^0 = (q_{j1}^0, q_{j2}^0, q_{j3}^0)$ на $q'_j = (q'_{j1}, q'_{j2}, q'_{j3})$, где

$$q'_{j\perp} = q_{j\perp} - \frac{1}{\omega_{n+1}} \sum_{k=n+2}^N q_{k\perp}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$q'_{j3} = q_{j3} - \sum_{k=1}^{n+1} q_{k3} m_k M[A'_1], \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Тогда аналогично (2.5) получим

$$H_{03}(Z'_{t-1}) = H_{03}[A'_1] \otimes I(\Sigma'_{t-2}) + I[A'_1] \otimes H_{03}(\Sigma'_{t-2}). \quad (2.10)$$

Мы будем доказывать включение

$$\inf H_{03}[A'_1] \in \sigma_{\text{pp}}(H_{03}[A'_1]), \quad (2.11)$$

которое в силу (2.10) эквивалентно включению

$$\inf H_{03}(Z'_{t-1}) \in \sigma_{\text{pp}}(H_{03}(Z'_{t-1})) \quad (2.12)$$

(по тем же причинам, по которым равносильны соотношения (2.1) и (2.9)).

2.4. Положим

$$\widehat{H}_{03}[A'_1] = H_{03}[A'_1] - \sum_{j=1}^n \frac{e_j e_{n+1}}{|q'_j - q'_{n+1}|^\gamma} - T_{03}^0[A'_1] + T_{03}^0[A_1]. \quad (2.13)$$

$\widehat{H}_{03}[A'_1]$ – оператор энергии системы, полученной из кластера A'_1 после его разделения на не взаимодействующие друг с другом кластеры $A_1 = (1, 2, \dots, n)$, $A_2 = (n+1)$ и отделения движения центра масс этих кластеров в направлении оси z . Отметим, что оператор $\widehat{H}_{03}[A'_1]$ зависит от координат $q'_{j\perp}$ и q_{j3}^0 (для входящих в аргументы потенциалов разностей $q'_{j3} - q'_{i3}$ выполняется равенство $q'_{j3} - q'_{i3} = q_{i3}^0 - q_{j3}^0$).

Пусть

$$\hat{\mu} = \inf \widehat{H}_{03}[A'_1]. \quad (2.14)$$

Согласно теореме 3.1 (см. раздел 3)

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{03}[A'_1]) = [\hat{\mu}, +\infty). \quad (2.15)$$

Далее мы покажем, что

$$\inf H_{03}[A'_1] < \hat{\mu},$$

и, значит,

$$\inf H_{03}[A'_1] \in \sigma_{\text{d}}(H_{03}[A'_1]).$$

С этой целью сначала убедимся в том, что $\hat{\mu} \in \sigma_{\text{pp}}(\widehat{H}_{03}[A'_1])$ (п. 2.5), а затем построим пробную функцию ψ_s , для которой $(H_{03}[A'_1]\psi_s, \psi_s) < \hat{\mu}\|\psi_s\|^2$ (п. 2.6–2.8).

2.5. Положим

$$\hat{H}_{03}(Z_t) = \hat{H}_{03}[A'_1] \otimes I(\Sigma'_{t-1}) + I[A'_1] \otimes H_{03}(\Sigma'_{t-2}). \quad (2.16)$$

Здесь $\hat{H}_{03}(Z_t)$ и $H_{03}(Z_t)$ – операторы энергии одной и той же составной системы $Z_t = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$, состоящей из не взаимодействующих между собой кластеров A_j , после отделения движения центра масс каждого кластера в направлении оси z , но записаны они в разных переменных: оператор $\hat{H}_{03}(Z_t)$ зависит от $q'_{j\perp}$ ($j = 1, 2, \dots, N$), q^0_{j3} ($j = 1, 2, \dots, n$), а оператор $H_{03}(Z_t)$ – от переменных $q^0_{j\perp}$ ($j = 1, \dots, N$), q^0_{j3} ($j = 1, \dots, n$). Ясно, что оба эти оператора имеют один и тот же спектр. В силу предположения индукции (2.1) для системы Z_t справедливо

$$\inf \hat{H}_{03}(Z_t) \in \sigma_{\text{pp}}(\hat{H}_{03}(Z_t)). \quad (2.17)$$

В силу (2.16) оператор $\hat{H}_{03}(Z_t)$ есть сумма операторов $\hat{H}_{03}[A'_1]$ и $H_{03}(\Sigma'_{t-2})$, зависящих от различных переменных, поэтому

$$\hat{\mu} = \inf \hat{H}_{03}[A'_1] \in \sigma_{\text{pp}}(\hat{H}_{03}[A'_1]). \quad (2.18)$$

2.6. Пусть u – нормированная собственная функция оператора $\hat{H}_{03}[A'_1]$, отвечающая его собственному значению $\hat{\mu}$. Функция u зависит от переменных $q'_{j\perp}$ ($j = 1, \dots, n+1$), q^0_{j3} ($j = 1, 2, \dots, n$). Пусть

$$q^0_{n+1,3} = q_{n+1,3} - M[A_1]^{-1} \sum_{k=1}^n m_k q^0_{k3},$$

$$\psi_s = s^{1/2} f(sq^0_{n+1,3})u,$$

где $f(\cdot)$ – произвольная нормированная гладкая функция одной переменной, равная нулю в окрестности нуля, $s > 0$ – параметр. В п. 2.7 мы покажем, что при малых s

$$(H_{03}[A'_1]\psi_s, \psi_s) < \hat{\mu}. \quad (2.19)$$

Из (2.15) и (2.19) следует, что

$$\inf H_{03}[A'_1] \in \sigma_d(H_{03}[A'_1]), \quad (2.20)$$

а значит, и справедливость соотношений (2.11), (2.12) для $n = 1, 2, \dots, N-2$ (т.е. для $t = N, N-1, \dots, 3$). Это завершит доказательство по индукции и одновременно будет доказано, что из (2.9) следует (2.20).

Положим $n = N-2$. Тогда $t = 3$ и $H_{03}(\Sigma'_{t-2}) = H_{03}[A'_2] \equiv 0$. Поэтому в силу (2.10) для разбиения $Z'_2 = \{A'_1, A'_2\}$ с $A'_1 = (1, 2, \dots, N-1)$, $A'_2 = (N)$ выполняется

$$H_{03}(Z'_2) = H_{03}[A'_1]. \quad (2.21)$$

Используя теперь (2.9) для $n = 2$, мы в силу (2.20), (2.21) получаем требуемое включение (2.2):

$$\inf H_{03}(Z'_2) \in \sigma_d(H_{03}(Z'_2)).$$

2.7. Чтобы доказать (2.19), воспользуемся выражением оператора $H_{03}[A'_1]$ из (2.13). Предварительно заметим, что после замены координат q'_{j3} на q^0_{j3} в операторе $T^0_{03}[A'_1]$ получим

$$T^0_{03}[A'_1] = T^0_{03}[A_1] - d_0 \frac{\partial^2}{\partial q^0_{n+1,3}},$$

где $d_0 = M[A_1]^{-1} + m^{-1}$. Поэтому и в силу (2.13)

$$H_{03}[A'_1] = \widehat{H}_{03}[A_1] + \sum_{j=1}^n \frac{e_j e}{|q'_j - q'_{n+1}|^\gamma} - d_0 \frac{\partial^2}{\partial q^0_{n+1,3}}$$

и, значит,

$$(H_{03}[A'_1]\psi_s, \psi_s) = \hat{\mu} + d_0 s^2 \int \left| \frac{df}{dq^0_{n+1,3}} \right|^2 dq^0_{n+1,3} + s^\gamma e \sum_{j=1}^n e_j c_j(s), \quad (2.22)$$

где

$$c_j(s) = \int \frac{|u|^2 |f(q^0_{n+1,3})|^2 dq'_1 \dots dq'_n dq'_{n+1,\perp} dq^0_{n+1,3}}{[s^2(q'_{j1} - q'_{n+1,1})^2 + s^2(q'_{j2} - q'_{n+1,2})^2 + (sq^0_{j3} - q^0_{n+1,3})^2]^{\gamma/2}}.$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} c_j(s) = c_1(0) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда с учетом того, что

$$\sum_{j=1}^N e_j = 0, \quad e_j = e \quad \text{при} \quad j > 2,$$

имеем

$$\lim_{s \rightarrow 0} e \sum_{j=1}^n e_j c_j(s) = -c_1(0)(N - n)e^2 < 0. \quad (2.23)$$

Поскольку $\gamma < 2$, то из (2.22) и (2.23) при малом s следует (2.19). Таким образом, теорема 1.1 верна, если верно равенство (2.15) или хотя бы включение

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{03}[A'_1]) \subseteq [\hat{\mu}, +\infty), \quad (2.24)$$

ибо именно на нем основан вывод соотношения (2.20) из неравенства (2.19). Мы докажем (2.24) в разделе 3.

3. О СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ГАМИЛЬТОНИАНОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ИОНОВ

3.1. Пусть $A'_1 = (1, 2, \dots, n+1)$, операторы $H_{03}[A'_1]$, $\widehat{H}_{03}[A'_1]$ и число $\hat{\mu}$ те же, что в пп. 2.3, 2.4. Имеет место

ТЕОРЕМА 3.1. Для оператора $H_{03}[A'_1]$

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{03}[A'_1]) = [\hat{\mu}, +\infty). \quad (3.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3.1 отвечает на вопрос о локализации существенного спектра оператора энергии $H_{03}[A'_1]$ положительного иона A'_1 с зарядом $(n-N+1)e$, полученного из оператора нейтрального атома в однородном магнитном поле после фиксации обеих компонент псевдомомента атома, отделения движения центра масс иона A'_1 в направлении оси z и удаления из атома $(N-n-1)$ электронов. Согласно теореме 3.1 граница $\hat{\mu}$ существенного спектра оператора $H_{03}[A'_1]$ определяется распадением иона A'_1 на ион $A_1 = (1, 2, \dots, n)$ с зарядом $(n-N)e$ и электрон с номером $n+1$. Другими словами, теорема 3.1 утверждает справедливость теоремы Хунцикера–ван Винтера–Жислина [1] для оператора $H_{03}[A'_1]$. Однако теорема 3.1 имеет и самостоятельное значение, ибо является первым результатом о спектре гамильтонианов положительных ионов в однородном магнитном поле после фиксации псевдомомента *атома*. В то же время следует отметить, что для исследования гамильтонианов положительных ионов в магнитном поле возможен и другой подход, когда изучается оператор, полученный из гамильтониана положительного иона после редукции этого оператора на подпространство состояний с фиксированной компонентой псевдомомента *иона*; фиксировать обе компоненты, как в случае нейтрального атома, нельзя: хотя операторы (компоненты псевдомомента) перестановочны с оператором энергии иона, они не коммутируют друг с другом. Для полученного при таком подходе оператора существенный спектр найден в [6], однако этот оператор отличен от $H_{03}[A'_1]$, поэтому мы не можем воспользоваться результатами [6].

3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Мы будем доказывать не равенство (3.1), а только включение (2.24). Это связано с тем, что, во-первых, именно оно используется в доказательстве теоремы 1.1 и, во-вторых, противоположное включение проверяется стандартным образом. Для краткости положим

$$n_0 = n+1, \quad \sigma_1 = A'_1 = (1, 2, \dots, n), \quad \mathcal{H}_0 = H_{03}[A'_1].$$

Таким образом, $\mathcal{H}_0$ – гамильтониан n_0 -частичной подсистемы σ_1 из Z_1 , полученный следующим образом: мы фиксировали обе компоненты псевдомомента всей системы Z_1 , пренебрегли взаимодействием частиц из $Z_1 \setminus \sigma_1$ между собой и с частицами из σ_1 , отделили движение центров масс σ_1 и каждой частицы из $Z_1 \setminus \sigma_1$ в направлении оси z , ввели относительные координаты (2.3) с заменой n на n_0 и после этого убрали из полученного гамильтониана (2.10) члены с переменными q_j^0 , $j = n+1, \dots, N$.

Для доказательства соотношения (2.24) используется та же схема разбиения конфигурационного пространства системы, которая была применена нами в [4] для локализации существенного спектра гамильтонианов не нейтральных систем в невозрастающих магнитных полях на подпространстве функций фиксированного типа, обладающих $SO(2)$ -симметрией. Эта схема обсуждается в пп. 3.3–3.5, а в пп. 3.6, 3.7 она применена к оператору $\mathcal{H}_0$. Однако, поскольку оператор $\mathcal{H}_0$ не обладает $SO(2)$ -симметрией, существенная часть оценок из [4] требует здесь другого доказательства. Мы проводим его в п. 3.8.

3.3. Пусть

$$R'_0 = \left\{ q' \mid q' = (q'_1, \dots, q'_{n_0}), \quad q'_j = (q'_{j\perp}, q'_{j3}), \quad \sum_{j=1}^{n_0} m_j q'_{j3} = 0 \right\}$$

и последовательность функций $g_k(q')$ такова, что $g_k(q') \in C_0^2(R'_0)$, $\|g_k\| = 1$, $g_k \rightharpoonup 0$ в $\mathcal{L}_2(R'_0)$. Для доказательства (2.24) достаточно проверить, что

$$\underline{\lim}(\mathcal{H}_0 g_k, g_k) \geq \hat{\mu}. \quad (3.2)$$

Вывод неравенства (3.2) содержится в пп. 3.6, 3.7, а здесь и в пп. 3.4, 3.5 мы обсудим основные идеи этого вывода.

Проведем специальное разбиение конфигурационного пространства R'_0 : выделим в R'_0 области Ω' , Ω'' такие, что

а) в них спектр оператора $\mathcal{H}_0$ с граничными условиями Дирихле дискретен и нормы функций g_k стремятся к нулю;

б) вне $\Omega' \cup \Omega''$ каждая точка q' отвечает какому-либо распадению $\sigma_s = \{C_1, \dots, C_s\}$ системы σ_1 на не взаимодействующие и не пересекающиеся между собой кластеры $C_1, \dots, C_s$.

Тогда в силу свойства “б” мы сможем разбить область $R'_0 \setminus (\Omega' \cup \Omega'')$ на подобласти $\Omega(\sigma_s)$, отвечающие всевозможным распадениям σ_s , и после этого оценить снизу квадратичную форму $(\mathcal{H}_0 g_k u_{\sigma_s}, g_k u_{\sigma_s})_{\Omega(\sigma_s)}$ по всем $\Omega(\sigma_s)$, $s \geq 2$ (здесь u_{σ_s} – сглаживающая функция). Суммируя найденные оценки по всем σ_s , получим

$$\underline{\lim}(\mathcal{H}_0 g_k, g_k) \geq \mu',$$

где $\mu' = \inf \mathcal{H}_{03}(\sigma_s)$, $\mathcal{H}_{03}(\sigma_s)$ – оператор энергии составной системы $\sigma_s = \{C_1, \dots, C_s\}$ после отделения движения центра масс каждого кластера в направлении оси z (см. ниже п. 3.6). Но $\mu' = \hat{\mu}$ (см. п. 3.6) и тем самым (3.2) будет доказано.

3.4. Опишем теперь идею построения областей Ω' , Ω'' с требуемыми свойствами “а”, “б”.

Пусть

$$X'_3 = \{q'_{13}, \dots, q'_{n_0 3}\}, \quad R'_{03} = \left\{ X'_3 \mid \sum_{j=1}^{n_0} m_j q'_{j3} = 0 \right\},$$

$$\Omega = \{q' \mid q' \in R'_0, \quad |X'_3|_1 \leq b(1)\}, \quad \overline{\Omega} = R'_0 \setminus \Omega,$$

где

$$|X'_3|_1^2 = \sum_{j=1}^{n_0} m_j q_{j3}^2,$$

$b(1)$ – большое число. Поскольку координата z центра масс системы σ_1 в R'_0 равна нулю, а в области $\bar{\Omega}$ выполняется $|X'_3|_1 > b(1)$, то при нахождении системы σ_1 в $\bar{\Omega}$ расстояние хотя бы одной частицы до центра масс будет велико за счет составляющей этого расстояния в направлении оси z . Поэтому область $\bar{\Omega}$ представима в виде суперпозиции областей $\bar{\Omega}_0(\sigma_s)$, отвечающих при $b(1) \gg 1$ всевозможным разбиениям σ_s , $s \geq 2$, системы $\sigma_1 \equiv A'_1$ при больших расстояниях $|q'_{i3} - q'_{j3}|$ для i, j , принадлежащих различным кластерам из σ_s . Исходя из этого, как и в [4], мы проводим разбиение области $\bar{\Omega}$ по переменным $X'_3 \in R'_{03}$ при любых фиксированных значениях остальных переменных.

3.5. Далее осуществим разбиение области Ω по переменным $q'_\perp = (q'_{1\perp}, \dots, q'_{n_0\perp})$ при фиксированных X'_3 . Для этого в пространстве $R^{2n_0} = \{q'_\perp \mid q'_\perp = (q'_{1\perp}, \dots, q'_{n_0\perp})\}$ введем подпространство относительного движения

$$R'_{0\perp} = \left\{ q'_\perp \mid q'_\perp \in R^{2n_0}, \sum_{j=1}^{n_0} m_j q_{j\perp} = 0 \right\},$$

новое скалярное произведение

$$(q', \tilde{q}')_2 = \sum_{j=1}^{n_0} (q'_{j1} \tilde{q}'_{j1} + q'_{j2} \tilde{q}'_{j2}) m_j$$

и (в смысле $(\cdot, \cdot)_2$) ортогональные проекторы $P'_{0\perp}$ на $R'_{0\perp}$ и $P'_{c\perp}$ на $R^{2n_0} \ominus R'_{0\perp}$. Определим в R^{2n_0} “усеченный конус”

$$K(a; \beta) = \{q'_\perp \mid q'_\perp \in R^{2n_0}, |q'_\perp|_2 \geq a, |P_{0\perp} q'_\perp|_2 \leq \beta |P_{c\perp} q'_\perp|_2\} \quad (3.3)$$

и области

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega} &= \{q'_\perp \mid q'_\perp \in R^{2n_0}, |q'_\perp|_2 < a\}, \\ \Omega^0 &= \{q'_\perp \mid q'_\perp \in R^{2n_0}, |q'_\perp|_2 \geq a, |P_{0\perp} q'_\perp|_2 > \beta |P_{c\perp} q'_\perp|_2\}, \\ \overline{K}(a, \beta) &\equiv R^{2n_0} \setminus K(a, \beta) = \widehat{\Omega} \cup \Omega^0, \end{aligned}$$

где в силу равенств (1.5) работы [4]

$$\begin{aligned} |P_{0\perp} q'_\perp|_2^2 &= \sum_{j=1}^{n_0} m_j |q'_{j\perp} - q'_{c\perp}|^2, & |P_{c\perp} q'_\perp|_2^2 &= M[\sigma_1] \|q_{c\perp}\|^2, \\ q'_{c\perp} &= \sum_{j=1}^{n_0} m_j q'_{j\perp} M[\sigma_1]^{-1}, & M[\sigma_1] &= \sum_{j=1}^{n_0} m_j. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку

$$|P_{0\perp}q'_{\perp}|_2^2 + |P_{c\perp}q'_{\perp}|_2^2 = |q'_{\perp}|_2^2,$$

в области Ω^0 выполняется

$$(1 + \beta^{-2})|P_{0\perp}q'_{\perp}|_2^2 \geq a^2,$$

и, значит, при большом $a = a(\beta)$ величина $|P_{0\perp}q'_{\perp}|_2$ велика. Поэтому и в силу (3.4) при $q'_{\perp} \in \Omega^0$ расстояние в R^{2n_0} хотя бы одной частицы из системы σ_1 до ее центра масс велико. Следовательно, область $\Omega^0 \otimes R'_{03}$ состоит из точек, отвечающих распадам σ_s системы σ_1 в R'_0 за счет распадов в R^{2n_0} , и оценка квадратичной формы оператора $\mathcal{H}_0$ в $\Omega^0 \otimes R'_{03}$ может быть проведена путем разбиения $\Omega^0 \otimes R'_0$ на области, порожденные разбиением Ω^0 на подобласти, соответствующие распадам σ_s в R^{2n_0} .

Таким образом, из всех точек конфигурационного пространства R'_0 остались не рассмотренными только точки, лежащие в областях

$$\Omega' = (\widehat{\Omega} \otimes R'_{03}) \cap \Omega, \quad \Omega'' = (K(a; \beta) \otimes R_{03}) \cap \Omega.$$

В этих областях на функциях, равных нулю на $\partial\Omega'$, $\partial\Omega''$, оператор $\mathcal{H}_0$ имеет чисто дискретный спектр. Для области Ω' это очевидно, ибо она ограничена. Для области Ω'' сделанное утверждение доказывается в п. 3.8. Это доказательство является принципиально новым моментом по сравнению с [4]. Действительно, в работе [4] дискретность спектра в области Ω'' доказывалась только для ограничений рассматриваемых там операторов на подпространства функций фиксированной $SO(2)$ -симметрии, в то время как здесь нам необходимо установить дискретность спектра $\mathcal{H}_0$ в Ω'' без ограничения оператора $\mathcal{H}_0$ на какие-либо подпространства. К тому же оператор $\mathcal{H}_0$ вообще не обладает $SO(2)$ -симметрией, так что подход [4] для доказательства дискретности спектра $\mathcal{H}_0$ в Ω'' не может быть применен.

Из свойств спектра $\mathcal{H}_0$ и леммы 3.1 работы [4] следует, что

$$\lim \|g_k\|_{\Omega'} = \lim \|g_k\|_{\Omega''} = 0.$$

Таким образом, области Ω' , Ω'' обладают требуемыми свойствами.

3.6. Обсудив основные идеи доказательства, переходим к его реализации.

Пусть $\sigma_s = \{C_1, \dots, C_s\}$,

$$M[C_k] = \sum_{j \in C_k} m_j,$$

$$R'_0(\sigma_s) = \left\{ q' \mid q' = \{q'_1, \dots, q'_{n_0}\}, q'_i = (q'_{i\perp}, q'_{i3}), \sum_{j \in C_k} m_j q'_{j3} = 0, k = 1, 2, \dots, s \right\},$$

$$V_{\sigma_s} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{i,j \in C_k} e_i e_j |q'_i - q'_j|^{-\gamma},$$

$$T_{\perp}^0(\sigma_s) = T_{0\perp}^0[A'_1],$$

$$T_{03}(\sigma_s) = \sum_{k=1}^s \sum_{j \in C_k} \frac{1}{m_j} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial q'_{j3}} - \frac{1}{M[C_k]} \sum_{p \in C_k} \frac{\partial}{\partial q'_{p3}} \right)^2,$$

$$\mathcal{H}_{03}(\sigma_s) = T_{\perp}^0(\sigma_s) + T_{03}(\sigma_s) + V_{\sigma_s}.$$

Оператор $\mathcal{H}_{03}(\sigma_s)$ мы рассматриваем в пространстве $\mathcal{L}_2(R'_0(\sigma_s))$. Пусть

$$\mu(\sigma_s) = \inf \mathcal{H}_{03}(\sigma_s), \quad \mu' = \min_{\sigma_s, s \geq 2} \mu(\sigma_s).$$

Покажем, что

$$\mu' = \hat{\mu}. \quad (3.5)$$

В разбиении $\sigma_s = \{C_1, \dots, C_s\}$ обозначим через C_1 кластер, содержащий ядро (частицу с номером 1). Не ограничивая общности, можно считать, что C_1 состоит из частиц с номерами $1, 2, \dots, p$, $p \geq 1$. Тогда кластеры C_s , $s \geq 2$, для которых $|C_s| \geq 2$, содержат положительные потенциалы взаимодействия частиц из C_s между собой. Поэтому дробление каждого из них на отдельные частицы может только уменьшить оператор, и, следовательно, для распада $\sigma_{n_0-p+1}^{(1)} = \{C_1, C'_2, \dots, C'_{n_0-p+1}\}$ с $C'_j = (p+j-1)$, $j = 2, 3, \dots, n_0 - p + 1$, выполняется неравенство

$$\mathcal{H}(\sigma_{n_0-p+1}^{(1)}) < \mathcal{H}(\sigma_s). \quad (3.6)$$

Рассмотрим, далее, разбиение $\sigma_{n_0-p}^{(2)} = \{C_1^{(1)}, C'_3, \dots, C'_{n_0-p+1}\}$, полученное из $\sigma_{n_0-p+1}^{(1)}$ объединением кластеров C_1 и C'_2 : $C_1^{(1)} = C_1 \cup C'_2$, и покажем, что такое объединение не приводит к возрастанию нижней грани оператора энергии, т.е.

$$\inf \mathcal{H}_0(\sigma_{n_0-p}^{(2)}) \leq \inf \mathcal{H}_0(\sigma_{n_0-p+1}^{(1)}). \quad (3.7)$$

Действительно, пусть функции $\varphi, f \in C_0^2$; φ зависит от переменных $q'_{j\perp}$, $j = 1, \dots, n_0$, и q'_{j3} , $j = 1, \dots, p$, где

$$\sum_{j \in C'_1} m_j q'_{j3} = 0;$$

f зависит от

$$\hat{q}_{p+1,3} \equiv q'_{p+1,3} - M[C_1]^{-1} \sum_{t=1}^p m_t q'_{t3},$$

$\|f\| = 1$, $f_\alpha = \alpha^{1/2} f(\alpha \hat{q}_{p+1,3})$ и $\psi_\alpha = \varphi f_\alpha$. Тогда легко показать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\mathcal{H}_0(\sigma_{n_0-p}^{(2)}), \psi_\alpha, \psi_\alpha) = (\mathcal{H}_0(\sigma_{n_0-p+1}^{(1)}), \varphi, \varphi),$$

откуда и следует (3.7).

Далее, присоединим к $C_1^{(1)}$ кластер $C'_3 = (p+2)$, положим $C_1^{(2)} = C_1^{(1)} \cup C'_3$ и для разбиения $\sigma_{n_0-p-1}^{(3)} = \{C_1^{(2)}, C'_4, \dots, C'_{n_0-p+1}\}$ аналогично (3.7) получим

$$\inf \mathcal{H}_0(\sigma_{n_0-p-1}^{(3)}) \leq \inf \mathcal{H}_0(\sigma_{n_0-p}^{(2)}),$$

и т.д. вплоть до разбиения

$$\sigma_2^{(n_0-p)} = \{(1, 2, \dots, n_0 - 1), (n_0)\} = \sigma_2,$$

и, значит, $\mu' = \hat{\mu}$.

3.7. Пусть последовательность g_k – та же, что в п. 3.3. Чтобы доказать включение (2.24), достаточно установить (3.2). Это достигается с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям в работе [4, п. 3.2 и далее] (величины $H_0, \mu^{(m)}, Z_s, R_0, n, k_i, X_3, x_{i3}, r, r_j, \rho, \rho_j$ заменяются соответственно на $\mathcal{H}_0, \mu', \sigma_s, R'_0, n_0, m_i, X'_3, q'_{i3}, q', q'_j, q'_\perp, q'_{j\perp}$ и проектор $P^{(m)}$ – на единичный оператор). Доказательство того факта, что оператор $\mathcal{H}_0$ в области

$$\Omega_0 = \{q' \mid q' \in R'_0, |X'_3|_1 \leq b(1), q'_\perp \in K(b(1), b(2))\}$$

с нулевым граничным условием на $\partial\Omega_0$ имеет чисто дискретный спектр, приведено ниже.

3.8. Обозначим замыкание оператора $\mathcal{H}_0$ в пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega_0)$ с области $C_0^2(\Omega_0)$ через $\mathcal{H}_{0,0}$ и докажем, что $\sigma(\mathcal{H}_{0,0}) = \sigma_d(\mathcal{H}_{0,0})$, или, что то же,

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_{0,0}) = \emptyset. \quad (3.8)$$

Положим $W_2 = W_1 + V_{\sigma_1}$,

$$W_1 = \frac{1}{2}(T_\perp^0[\sigma_1] + T_{03}[\sigma_1] + F^0), \quad (3.9)$$

где операторы в правой части (3.9) те же, что в определении $\mathcal{H}_0$. Оператор W_2 полуограничен снизу, так как этим свойством обладал оператор, полученный из оператора энергии системы $Z_1 = \{1, 2, \dots, N\}$ до фиксации псевдомомента в результате умножения “кинетической части” этого оператора на $1/2$. Поэтому для некоторого $c > 0$

$$\mathcal{H}_{0,0} \equiv W_1 + W_2 \geq W_1 - c. \quad (3.10)$$

Покажем, что $\sigma_{\text{ess}}(W_1) = \emptyset$, откуда в силу (3.10) будет следовать, что $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_{0,0}) = \emptyset$. Предположим, что $\sigma_{\text{ess}}(W_1) \neq \emptyset$ и $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(W_1)$. Тогда найдется такая последовательность функций φ_p из $C_0^2(\Omega_0)$, $\|\varphi_p\| = 1$, $\varphi_p \rightarrow 0$ в $\mathcal{L}_2(\Omega_0)$, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (W_1 \varphi_p, \varphi_p) = \lambda.$$

Так как оператор W_1 есть сумма трех неотрицательных операторов, то

$$\overline{\lim}(F^0 \varphi_p, \varphi_p) \leq \lambda. \quad (3.11)$$

Покажем, что (3.11) не выполняется. Для этого оценим функцию F^0 снизу в области Ω_0 . Имеем

$$F^0 = M^{-1}[(\nu_1 + 2\mathcal{E}_2^0)^2 + (\nu_2 - 2\mathcal{E}_1^0)^2],$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p^0 &= \sum_{j=1}^{n_0} q'_{jp} e_j = \sum_{j=1}^{n_0} e_j (q'_{jp} - q'_{cp}) + Q[A_1]q'_{cp} = f_p(q') + Q[A'_1]q'_{cp}, \\ Q[A'_1] &= \sum_{j=1}^{n_0} e_j = e_1 + (n_0 - 1) \neq 0, \end{aligned}$$

и при $q' \in \Omega_0$ в силу (3.4) выполняется неравенство

$$|f_p(q')| \leq d_1 b(2) |q'_{c\perp}|,$$

здесь и далее d_j — некоторые константы. Тогда при малом $b(2)$ получим

$$F^0 = \frac{4Q^2[A'_1]}{M} |q'_{c\perp}|^2 + h(q'_{c\perp}),$$

где $|h(q'_{c\perp})| \leq b(2)d_2 |q_{c\perp}|^2 + d_3$. Следовательно, при малом $b(2)$ и $|q_{c\perp}| \gg 1$

$$F^0 \geq 2Q^2[A'_1]M^{-1} |q'_{c\perp}|^2. \quad (3.12)$$

Пусть $L > 0$ — произвольное число,

$$\Omega_0(L) = \{q' \mid q' \in \Omega_0, |q'_{c\perp}| \leq L\}, \quad \omega(L) = \Omega_0 \setminus \Omega_0(L).$$

При $q' \in \Omega_0(L)$ в силу (3.4) выполняется $|q'_{c\perp}|_2^2 \leq (1 + b^2(2))M[A'_1]L$, следовательно, область $\Omega_0(L)$ ограничена при любом L . Поскольку $\varphi_p \rightarrow 0$ в $\mathcal{L}_2(\Omega_0)$, то в силу теоремы вложения

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\varphi_p\|_{\Omega_0(L)} = 0,$$

и поэтому $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\varphi_p\|_{\omega(L)} = 1$.

Тогда в силу (3.12)

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} (F^0 \varphi_p, \varphi_p) \geq \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} (F^0 \varphi_p, \varphi_p)_{\omega(L)} \geq L \cdot 2Q^2[A'_1]M^{-1}.$$

Так как число $L > 0$ любое, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (F^0 \varphi_p, \varphi_p) = +\infty,$$

что противоречит (3.11). Следовательно,

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{H}_{0,0}) = \emptyset,$$

что и требовалось доказать.

Благодарности. Работа поддержана грантами Министерства образования № 97-0-14.3-65 и INTAS № 95-0414.

Список литературы

- [1] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. ТМФ. 1997. Т. 113. № 3. С. 413.
- [2] Г. М. Жислин. ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 15.
- [3] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. О дискретном спектре гамильтонианов атомов в однородном магнитном поле. Функц. анализ и его прилож. (в печати).
- [4] Г. М. Жислин. ТМФ. 1996. Т. 107. № 3. С. 372.
- [5] Г. М. Жислин, А. Г. Сугалов. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 4. С. 835.
- [6] J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon. Ann. Phys. 1978. V. 114. P. 431.

Поступила в редакцию 10.II.1999 г.