Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, Ренормгруппа, операторное разложение и аномальный скейлинг в простой модели турбулентной диффузии, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 309–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:39:13

© 1999 г. Л. Ц. Аджемян*, Н. В. Антонов*, А. Н. Васильев*

РЕНОРМГРУППА, ОПЕРАТОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И АНОМАЛЬНЫЙ СКЕЙЛИНГ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

Аппарат ренормализационной группы и операторного разложения в модели Обухова–Крейчнана для перемешивания пассивной скалярной примеси случайным гауссовым полем скорости с коррелятором $\langle \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t', \mathbf{x}) \rangle - \langle \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t', \mathbf{x}') \rangle \propto \delta(t - t') |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^\varepsilon$ позволяет обосновать свойство аномального скейлинга в инерционном интервале как следствие наличия в модели “опасных” составных операторов (степеней скорости локальной диссипации), чьи отрицательные критические размерности определяют значения аномальных показателей. Эти показатели вычислены во втором порядке ε -разложения.

В последнее время проявляется заметный интерес к изучению сравнительно простой модели турбулентного перемешивания пассивной скалярной примеси случайным гауссовым полем скорости, предложенной еще в работах Обухова [1] и Крейчнана [2] (см., например, статьи [3–18] и ссылки в них). Этот интерес связан с тем, что для структурных функций модели удастся доказать наличие аномального скейлинга, свойственного, как считают, реальным турбулентным потокам, и явно вычислить соответствующие аномальные показатели, чего раньше не удавалось сделать в рамках какой-либо последовательной статистической модели. В настоящей работе на примере модели [1, 2] показано, что для изучения аномального скейлинга весьма эффективными оказываются методы ренормализационной группы (РГ) и операторного разложения (ОР).

Перемешивание пассивной скалярной примеси $\theta(x)$ (везде $x \equiv (t, \mathbf{x})$) турбулентными пульсациями поля скорости $\mathbf{v}(x)$ описывается стохастическим уравнением

$$\nabla_t \theta = \nu_0 \Delta \theta + f, \quad \nabla_t \equiv \partial_t + v_i \partial_i, \quad (1)$$

где ν_0 – коэффициент диффузии, $f(t, \mathbf{x})$ – случайная сила. Жидкость считается несжимаемой, так что поле скорости поперечно: $\partial_i v_i = 0$. Статистика поля скорости предполагается гауссовой с нулевым средним и коррелятором вида

$$\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = D_0 \frac{\delta(t - t')}{(2\pi)^d} \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) (k^2 + m^2)^{-d/2 - \varepsilon/2} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')], \quad (2)$$

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

здесь d – размерность пространства, $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор, а $D_0 > 0, m > 0, 0 < \varepsilon < 2$ – параметры. Величина $1/m$ имеет смысл интегрального масштаба турбулентности, пространственная часть выражения (2) для $\varepsilon = 2/3$ имеет при $k \gg m$ вид колмогоровского спектра. Распределение силы f также предполагается гауссовым с нулевым средним, коррелятором

$$\langle f(x)f(x') \rangle = \delta(t - t')F(Mr), \quad r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad (3)$$

и интегральным масштабом $L \equiv M^{-1}$. Функция $F(Mr)$ считается конечной при $L \rightarrow \infty$: $F(0) = \text{const} \neq 0$.

Структурные функции n -го порядка определяются как средние $S_n(r) \equiv \langle [\theta(x) - \theta(x')]^{2n} \rangle$, где $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ и $t = t'$. Характерными длинами для этих функций являются интегральные масштабы $L, 1/m$, а также длина диссипации $r_d \equiv 1/\Lambda \equiv (\nu_0/D_0)^{1/\varepsilon}$. Для развитой турбулентности $r_d \ll L, r_d \ll 1/m$; таким образом, в задаче существует инерционный (конвективный) интервал $r_d \ll r \ll L$, поведение в котором функций типа $S_n(r)$ и является основным предметом исследования. Если пренебречь в (1) нелинейностью (т.е. турбулентной конвекцией), то эти функции легко вычисляются и имеют вид $S_n(r) = \nu_0^{-n} r^{2n} F_n(Mr)$, где $F_n(0) = \text{const} \neq 0$. Для полной нелинейной задачи появляется зависимость от двух новых безразмерных переменных Λr и mr :

$$S_n(r) = \nu_0^{-n} r^{2n} F_n(\Lambda r, mr, Mr). \quad (4)$$

Выполненный в [3–9] анализ показывает, что в функциях (4) можно перейти к пределу $m = 0$ (что всегда предполагается в дальнейшем), тогда как их поведение при $\Lambda r \rightarrow \infty, Mr \rightarrow 0$ (инерционный интервал) оказывается нетривиальным:

$$S_n(r) \simeq C_n \nu_0^{-n} r^{2n} (\Lambda r)^{-\alpha_n} (Mr)^{-\beta_n}, \quad (5)$$

т.е. остается зависимость как от длины диссипации, так и от интегрального масштаба, с нелинейными по n показателями β_n (“аномальный скейлинг”). Соотношения (5) с явными выражениями для показателей α_n, β_n в первом порядке по ε или $1/d$ являются основным результатом работ [6–9]. В настоящей работе показано, что они легко могут быть получены методами РГ и ОР, позволяющими повысить точность вычисления показателей β_n (второй порядок по ε) и применимыми к задачам более общего типа. Подробное изложение метода РГ в стохастической теории турбулентности, включая ОР и анализ составных операторов, а также подробная библиография даны в обзорной статье [19] и книге [20]. Ниже мы приводим основные утверждения без доказательств, останавливаясь лишь на специфических свойствах модели (1)–(3).

Решение задачи разбивается на два этапа. На первом этапе методом РГ находится асимптотика функций F_n в (4) по первому аргументу ($\Lambda r \rightarrow \infty$) при фиксированном Mr (считаем $m = 0$). Это дает

$$S_n(r) \simeq \nu_0^{-n} r^{2n} (\Lambda r)^{-\alpha_n} F_n(Mr). \quad (6)$$

Показатели степеней ν_0 и r (без учета показателя множителя Λr) определяются каноническими размерностями рассматриваемого объекта, общая степень r – его критической размерностью с обратным знаком, вид скейлинговой функции $F_n(Mr)$ уравнением

РГ не определяется. Формула (6) является частным случаем предсказываемого методом РГ для задачи (1)–(3) свойства инфракрасного (ИК) скейлинга. Аналогичные асимптотики могут быть получены для любых корреляционных функций; в частности, для одновременных корреляторов $S_{nk}(r) = \langle \Phi_n(x) \Phi_k(x') \rangle$ мономов $\Phi_n = [\partial_i \theta(x) \partial_i \theta(x)]^n$ получается

$$S_{nk}(r) \simeq \nu_0^{-n-k} (\Lambda r)^{-\gamma_{nk}} F_{nk}(Mr). \quad (7)$$

В технике РГ показатели степеней α_n и γ_{nk} в (6), (7) вычисляются в виде рядов по параметру ε из (2), который тем самым оказывается аналогом величины $\varepsilon = 4 - d$ в ε -разложении для модели ϕ^4 в теории критического поведения [21, 22].

С точки зрения метода РГ в модели (1)–(3) имеется ряд упрощающих обстоятельств по сравнению с обычными моделями типа ϕ^4 : положение ИК-устойчивой неподвижной точки РГ точно дается однопетлевым приближением; отсутствует ренормировка как простых полей $\theta(x)$, так и их степеней $\theta^n(x)$ (в квантово-полевой терминологии – “составных операторов”); параметры M , t также не ренормируются. Как следствие, показатели α_n в (6) находятся точно: $\alpha_n = n\varepsilon$, т.е. не имеют поправок ε^2 , ε^3 и т.д. В отличие от них показатели γ_{nk} , являющиеся суммой $\Delta_n + \Delta_k$ критических размерностей Δ_n операторов Φ_n , имеют нетривиальное ε -разложение. Знание этих размерностей позволяет найти асимптотику средних значений самих операторов Φ_n при $M/\Lambda \rightarrow 0$:

$$\langle \Phi_n \rangle \simeq C_n \nu_0^{-n} \left(\frac{M}{\Lambda} \right)^{\Delta_n}. \quad (8)$$

Соотношение (8) дает неаналитический по M/Λ вклад в величину $\langle \Phi_n \rangle$; этот вклад является главным при $M/\Lambda \rightarrow 0$, если $\Delta_n < 0$ (“опасные операторы” – в терминологии [23]), как это и оказывается в действительности: в первом порядке по ε получается $\Delta_n = -2n(n-1)\varepsilon/(d+2)$ (ср. [8, 9]). Строго говоря, из-за смешивания при ренормировке моном Φ_n является конечной линейной комбинацией “базисных операторов” с определенными размерностями Δ_k , $k \leq n$; в представлениях (7) и (8) оставлен только главный вклад с максимальным $|\Delta_k|$.

Скейлинговые функции $F_n(Mr)$, $F_{nk}(Mr)$ в соотношениях типа (6), (7) могут быть вычислены в форме рядов по ε , но такое представление непригодно на втором этапе решения задачи – этапе исследования их асимптотики при $Mr \rightarrow 0$, поскольку реальным параметром разложения тогда оказывается $\varepsilon \ln(Mr)$. Суммирование таких “больших ИК-логарифмов”, в отличие от “больших УФ-логарифмов” типа $\ln(\Lambda r)$, выходит за рамки метода РГ, так как вид скейлинговых функций самим уравнением РГ никак не определяется. Как и в теории критического поведения [21, 22], асимптотика $Mr \rightarrow 0$ может быть найдена в рамках общего решения уравнений РГ с помощью техники ОР. В этом

случае произведение двух (ренормированных) составных операторов $O_1(x_1)O_2(x_2)$ (например, θ^n или ренормированных аналогов мономов Φ_n) при $t_1 = t_2 = t$, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rightarrow 0$ и фиксированном “центре тяжести” $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2 = \text{const}$ представляется в виде

$$O_1(x_1)O_2(x_2) = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(\mathbf{r})O_{\alpha}(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

где C_{α} — аналитические по $(Mr)^2$ коэффициенты, а суммирование в общем случае идет по всем локальным составным операторам $O_{\alpha}(x)$ с определенными критическими размерностями Δ_{α} . Корреляторы типа (6), (7) получаются усреднением соотношений (9), при этом в правых частях возникают средние $\langle O_{\alpha}(x) \rangle \propto M^{\Delta_{\alpha}}$, которым соответствуют вклады вида $(Mr)^{\Delta_{\alpha}}$ в скейлинговых функциях $F_n(Mr)$, $F_{nk}(Mr)$. Ведущие члены асимптотики $Mr \rightarrow 0$ определяются операторами с наименьшим значением Δ_{α} , в обычных моделях типа ϕ^4 главный член порождается простейшим оператором $O_{\alpha}(x) = 1$ с $\Delta_{\alpha} = 0$. Однако в модели (1)–(3) критические размерности всех операторов Φ_n отрицательны (см. выше), и поэтому именно они дают главный вклад в асимптотику $Mr \rightarrow 0$. Операторы, содержащие поля θ без производной ∂ , критические размерности которых также отрицательны, не дают вклада в ОР величин типа (6), (7) в силу инвариантности последних относительно сдвига $\theta \rightarrow \theta + \text{const}$ поля $\theta(x)$.

Если бы в ОР каждой функции (6), (7) давали вклад все операторы Φ_n , для нахождения асимптотики $Mr \rightarrow 0$ эти вклады нужно было бы как-то суммировать, поскольку спектр их размерностей не ограничен снизу (нет “самого опасного”). Именно так обстоит дело в более реалистических моделях развитой турбулентности (см. [19, 20, 23]). В модели (1)–(3) такой проблемы не возникает: анализ диаграмм теории возмущений показывает, что число полей θ в любом составном операторе $O_{\alpha}(x)$, входящем в правую часть соотношения (9), не может превосходить полного числа полей в его левой части. Таким образом, для величин (6), (7) получаем выражения

$$S_n(r) \simeq \nu_0^{-n} r^{2n} (\Lambda r)^{-n\varepsilon} \sum_{s \leq n} C_{n,s}(Mr)^{\Delta_s}, \quad (10)$$

$$S_{nk}(r) \simeq \nu_0^{-n-k} (\Lambda r)^{-\Delta_n - \Delta_k} \sum_{s \leq n+k} C_{nk,s}(Mr)^{\Delta_s} \quad (11)$$

с некоторыми зависящими от ε и d коэффициентами $C_{n,s}$, $C_{nk,s}$ и с возможными поправками порядка $(Mr)^{2+O(\varepsilon)}$. Поскольку размерности Δ_s отрицательны и монотонно возрастают по модулю с ростом s , главным при $Mr \rightarrow 0$ в (10), (11) является слагаемое с максимальным s , т.е. $s = n$ в (10) и $s = n + k$ в (11):

$$S_n(r) \simeq C_n \nu_0^{-n} r^{2n} (\Lambda r)^{-n\varepsilon} (Mr)^{\Delta_n}, \quad (12)$$

$$S_{nk}(r) \simeq C_{nk} \nu_0^{-n-k} (\Lambda r)^{-\Delta_n - \Delta_k} (Mr)^{\Delta_{n+k}}. \quad (13)$$

Мы вычислили критические размерности Δ_n с точностью до членов ε^2 включительно, что потребовало расчета соответствующих констант ренормировки в двухпетлевом

приближении. Результат имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_n = & -\frac{2n(n-1)\varepsilon}{d+2} + \frac{\varepsilon^2 n(n-1)}{(d-1)(d+2)^3(d+4)^2} \times \\ & \times [-4(d+1)(d+4)^2 + 3(d-1)(d+2)(d+4)(d+2n)h(d) - \\ & - 4(d+1)(d+2)(d+3n-2)h(d+2)] + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (14)$$

где обозначено

$$h(d) \equiv F\left(1, 1; \frac{d}{2} + 2; \frac{1}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \Gamma\left(\frac{d}{2} + 2\right)}{4^k \Gamma\left(\frac{d}{2} + 2 + k\right)} \quad (15)$$

и $F(a, b; c; z)$ – гипергеометрический ряд (см., например, [24]). Для целых d ряд в (15) суммируется явно, что, в частности, дает $h(2) = 1 - 24 \ln(4/3)$, $h(3) = 10(\pi\sqrt{3} - 16/3)$.

Уравнения Швингера позволяют доказать точное равенство $\Delta_1 = 0$, что согласуется с полученным в [2] точным решением для функции $S_1(r)$. Асимптотики (12), (13) совпадают с результатом, полученным другим способом в работах [8, 9], где показатели Δ_n были вычислены в первом порядке по ε . Они согласуются также с результатами, полученными в [6, 7] в первом порядке по $1/d$.

Заметим, что набор операторов Φ_n замкнут относительно “слияния” в том смысле, что главный вклад в ОР для коррелятора $\langle \Phi_n \Phi_m \rangle$ дается оператором из того же семейства Φ_{n+m} с суммарным индексом $n + m$. Этот факт вместе с вытекающим из явного вида Δ_n неравенством $\Delta_n + \Delta_m > \Delta_{n+m}$ означает, что корреляторы степеней локальной диссипации в модели (1)–(3) демонстрируют мультифрактальное поведение (ср. [25, 26]). Заметим также, что термин “аномальный скейлинг” обычно связывают с нелинейностью по n показателей β_n в соотношениях типа (5), хотя исключением является именно случай линейных показателей: например, в соотношениях (13) все показатели нелинейны.

Изложенный выше подход обобщается на случаи наличия сжимаемости, анизотропии, конечного времени корреляции, а также на случай корреляционных функций различных тензорных операторов (см. [27–29]).

В заключение упомянем кратко основанный на РГ и ОР подход к более реалистической модели развитой турбулентности – стохастическому уравнению Навье–Стокса с внешней случайной силой (подробнее см. обзор [19] и книгу [20]). “Опасные операторы” в этой задаче возникают лишь при конечных значениях РГ-параметра ε , и достоверно идентифицировать их можно только тогда, когда их размерности найдены точно с помощью уравнений Швингера или тождеств Уорда. Они входят в ОР в виде бесконечных семейств с не ограниченным снизу спектром размерностей, и для нахождения асимптотик $Mr \rightarrow 0$ их вклады в ОР необходимо дополнительно суммировать. Такое суммирование, выполненное в [23] для разновременных корреляторов, обнаружило их сингулярную зависимость от M , что феноменологически объясняется известным эффектом переноса турбулентных вихрей как целого крупномасштабными движениями (“sweeping effects”) (см. [30]). Это показывает, что данный эффект “не теряется” при использовании метода РГ, как иногда считают [31, 32], если аппарат РГ используется в сочетании с ОР и вне рамок ε -разложения. Анализ зависимости от M одновременных галилеево-инвариантных величин типа структурных функций (4) для стохастического

уравнения Навье–Стокса требует явного нахождения критических размерностей всех инвариантных скалярных “опасных операторов” и суммирования их вкладов в ОР типа (9). Очевидно, что это гораздо более сложная проблема по сравнению с изучением ИК-асимптотик упрощенной модели (1)–(3).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-16783) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза (грант № 97-0-14.1-30).

Список литературы

- [1] *A. M. Obukhov.* Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1949. Т. 13. С. 58.
- [2] *R. H. Kraichnan.* Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 945.
- [3] *R. H. Kraichnan.* Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1016; 1997. V. 78. P. 4922.
- [4] *R. H. Kraichnan, V. Yakhot, S. Chen.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 240.
- [5] *V. Yakhot.* Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 329.
- [6] *M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev.* Phys. Rev. E. 1995. V. 52. P. 4924.
- [7] *M. Chertkov, G. Falkovich.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 2706.
- [8] *K. Gawędzki, A. Kupiainen.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3834.
- [9] *D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 2564.
- [10] *D. Gutman, E. Balkovsky.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 4435.
- [11] *A. Pumir.* Europhys. Lett. 1996. V. 34. P. 25; 1997. V. 37. P. 529; Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 2914.
- [12] *G. L. Eyink.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 1497; *G. L. Eyink, J. Xin.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 4166.
- [13] *A. Pumir, B. I. Shraiman, E. D. Siggia.* Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. R1263.
- [14] *E. Balkovsky, G. Falkovich, V. Lebedev.* Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. R4881.
- [15] *M. Chertkov.* Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 2722.
- [16] *A. L. Fairhall, B. Galanti, V. S. L'vov, I. Procaccia.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 4166.
- [17] *O. Gat, V. S. L'vov, I. Procaccia.* Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 406.
- [18] *U. Frisch, A. Mazzino, M. Vergassola.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 5532.
- [19] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев.* УФН. 1996. Т. 166. С. 1257.
- [20] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasiliev.* Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence. London: Gordon and Breach Publ., 1999.
- [21] *J. Zinn-Justin.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon, 1989.
- [22] *А. Н. Васильев.* Квантово-полевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. С.-П.: Изд-во ПИЯФ, 1998.
- [23] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев.* ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 1272; *Н. В. Антонов.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1988. Т. 169. С. 18.
- [24] *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
- [25] *B. Duplantier, A. Ludwig.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 247.
- [26] *G. L. Eyink.* Phys. Lett. A. 1993. V. 172. P. 355.
- [27] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasiliev.* Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 1823.
- [28] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov.* Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 7381.
- [29] *N. V. Antonov.* Anomalous scaling regimes of a passive scalar advected by the synthetic velocity field. Preprint SPBU IP-98-16. St-P.: St-Petersburg Univ., 1998; chao-dyn/9808011.
- [30] *R. H. Kraichnan.* Phys. Fluids. 1964. V. 7. P. 1723; 1965. V. 8. P. 575.
- [31] *S. Chen, R. H. Kraichnan.* Phys. Fluids A. 1989. V. 1. P. 2019.
- [32] *S. L. Woodruff.* Phys. Fluids. [Formerly Phys. Fluids A]. 1994. V. 6. P. 3051.

Поступила в редакцию 1.XII.1997 г.