Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Павленко, А. И. Торопова, Новый класс решений уравнения Дирака,
ТМФ, 1999, том 120, номер 2, 315–323

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:10:13

НОВЫЙ КЛАСС РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Получен класс точных решений уравнений Дирака для электрона в электромагнитном поле волновода, образованного двумя парами гиперболических поверхностей. Спиновые коэффициенты определены в терминах собственных значений инвариантного оператора поляризации. Предложенный метод решения может быть применен при произвольном способе возбуждения волновода.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой электродинамике исследование процессов электромагнитного взаимодействия частиц в сильном внешнем поле основано на представлении Фарри. В этом подходе используется формализм Фейнмана–Дайсона в гильбертовом пространстве, базис которого включает полную систему функций, представляющих собой решения уравнения для волновой функции частицы во внешнем поле. Однако точные решения уравнений Клейна–Гордона и Дирака известны для ограниченного числа реализуемых в эксперименте конфигураций внешнего поля [1]. В частности, для анализа процессов в высокочастотных электромагнитных полях важную роль играет конфигурация плоскостного поля. К этому классу относятся решение задачи о движении электрона в поле плоской волны [2] и решение задачи о движении электрона в поле волны круговой поляризации, распространяющейся вдоль вектора индукции однородного постоянного магнитного поля [3]. В работах [4, 5] найдено решение задачи о движении релятивистской частицы в поле волны круговой поляризации, распространяющейся в прозрачной среде.

В предлагаемой работе получен новый класс решений уравнения Дирака для электрона в поле электромагнитной волны, возбуждаемой в гиперболическом волноводе. В случае движения пучка нерелятивистских частиц эта электродинамическая система, впервые предложенная Паулем, позволила создать масс-спектрометр высокого разрешения [6]. Анализ областей устойчивости движения релятивистских частиц показывает, что в гиперболическом волноводе можно реализовать режимы фокусировки и сепарации частиц по массам, удельному заряду, подавить разброс поперечных скоростей частиц пучка [7].

*Московский государственный университет, Москва, Россия

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Волновод образован двумя парами металлических поверхностей $y^2 = x^2 - R^2$ и $y^2 = x^2 + R^2$, к которым приложено напряжение с постоянной и высокочастотной составляющими. Основная волна, которую можно возбудить в волноводе, имеет нулевую критическую частоту и распространяется со скоростью света в вакууме [7].

Решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее граничным условиям на поверхностях волновода, можно представить в терминах 4-потенциала

$$A^\mu(x) = n^\mu[(e_{(1)}x)^2 - (e_{(2)}x)^2]G(kx)R^{-2}, \quad (1)$$

где

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad e_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0), \quad e_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0), \quad n^\mu = (1, 0, 0, 1), \quad k^\mu = \frac{\omega}{c}n^\mu,$$

ω – постоянная величина, $G(kx)$ – произвольная функция. Мы используем метрику $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; скалярное произведение 4-векторов $ab = a^\mu b_\mu$, 4-потенциал удовлетворяет условию Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$. Очевидно, что $A^2 = 0$. Напряженности электрического и магнитного полей соответственно равны: $\mathbf{E} = (-x, y, 0)2G(kx)/R^2$, $\mathbf{B} = -(y, x, 0)2G(kx)/R^2$. Отметим, что $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = \mathbf{E}\mathbf{B} = 0$. Уникальная особенность рассматриваемой открытой системы состоит в том, что конфигурации поля основной волны и поля в статическом случае совпадают.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Найдем решение уравнения Дирака для электрона во внешнем поле, задаваемом 4-потенциалом (1),

$$D\psi = 0. \quad (2)$$

Здесь $D = \gamma P - mc$, $P^\mu = p^\mu - eA^\mu/c$, $p^\mu = i\hbar\partial^\mu$, $\partial^\mu = (\partial_0, -\nabla)$. Подставляя (1) в (2), получим уравнение

$$[\gamma p - \gamma nF - mc]\psi = 0, \quad (3)$$

где

$$F = e[(e_{(1)}x)^2 - (e_{(2)}x)^2]G(kx)(cR^2)^{-1}.$$

Поскольку функция F зависит только от переменных x, y и $nx = \xi$, $\xi = ct - z$, то оператор $nP = p_0 - p_z = 2i\hbar\partial/\partial\eta$ ($\eta = ct + z$) коммутирует с гамильтонианом $H = c\gamma^0 D$. Тогда биспинор ψ будет собственной функцией оператора nP с собственным значением q :

$$nP\psi = q\psi. \quad (4)$$

Используя стандартные представления матриц γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) и биспинора ψ через двухкомпонентные спиноры φ и χ , получим уравнение (3) в виде пары уравнений

$$(p_0 - F - mc)\varphi - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - \sigma_3 F)\chi = 0, \quad (5)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - \sigma_3 F)\varphi - (p_0 - F + mc)\chi = 0. \quad (6)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ – матрицы Паули. Складывая и вычитая уравнения (5) и (6), получим систему

$$(p_0 - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - F + \sigma_3 F)(\varphi + \chi) - mc(\varphi - \chi) = 0, \quad (7)$$

$$(p_0 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - F - \sigma_3 F)(\varphi - \chi) - mc(\varphi + \chi) = 0. \quad (8)$$

Двухкомпонентные спиноры φ и χ представляют собой столбцы с компонентами φ_1 , φ_2 и φ_3 , φ_4 . Решения уравнений (7), (8) ищем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_3 &= S_{13} \exp\left(\frac{iS_0}{\hbar}\right), & \varphi_2 + \varphi_4 &= S_{24} \exp\left(\frac{iS_0}{\hbar}\right), \\ \varphi_1 - \varphi_3 &= D_{13} \exp\left(\frac{iS_0}{\hbar}\right), & \varphi_2 - \varphi_4 &= D_{24} \exp\left(\frac{iS_0}{\hbar}\right), \end{aligned}$$

где $S_0 = -q\eta/2 - m^2 c^2 \xi/(2q)$. Поскольку $p_0 + p_z = 2i\hbar\partial/\partial\xi$, то система (7), (8) приобретает вид

$$qS_{13} - p_- S_{24} - mcD_{13} = 0, \quad (9)$$

$$-p_+ S_{13} + \left(2i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{m^2 c^2}{q} - 2F\right)S_{24} - mcD_{24} = 0, \quad (10)$$

$$\left(2i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{m^2 c^2}{q} - 2F\right)D_{13} + p_- D_{24} - mcS_{13} = 0, \quad (11)$$

$$p_+ D_{13} + qD_{24} - mcS_{24} = 0, \quad (12)$$

где $p_\pm = p_x \pm ip_y$. Из уравнений (9), (12) находим

$$S_{13} = (mcD_{13} + p_- S_{24})q^{-1}, \quad (13)$$

$$D_{24} = (mcS_{24} - p_+ D_{13})q^{-1}. \quad (14)$$

Подставляя выражения (13), (14) в уравнения (10), (11), получим уравнения

$$\Lambda S_{24} = 0, \quad \Lambda D_{13} = 0, \quad (15)$$

где

$$\Lambda = 2i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\hbar^2}{q}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 2F\left(x, y, \omega\frac{\xi}{c}\right).$$

Очевидно, что решения уравнений (15) можно искать в виде $S_{24} = C_{24}g$, $D_{13} = C_{13}g$, где C_{24} , C_{13} – постоянные коэффициенты. Далее удобно перейти к безразмерной переменной $s = \omega\xi/2c$. Тогда функция $g(x, y, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_s g = 0, \quad (16)$$

где

$$\Lambda_s = i\hbar \frac{\partial}{\partial s} + \frac{c\hbar^2}{\omega q} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2eG(2s)(x^2 - y^2)(\omega R^2)^{-1}.$$

Следовательно, решение уравнения Дирака (3) может быть представлено в виде

$$\varphi_{1,3} = \exp\left(\frac{iS_0}{\hbar}\right) (mcC_{13} + p_- C_{24} \pm qC_{13})g(2q)^{-1}, \quad (17)$$

$$\varphi_{2,4} = \exp\left(\frac{iS_0}{\hbar}\right) [qC_{24} \pm (mcC_{24} - p_+ C_{13})]g(2q)^{-1}. \quad (18)$$

Решение уравнения (16) ищем в виде волнового пакета

$$g(x, y, s) = \exp\left[\frac{i\sigma(x, s)}{\hbar} + \frac{i\rho(y, s)}{\hbar}\right].$$

Подставляя g в (16), получим два уравнения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} + \frac{c}{\omega q} \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 - i\hbar \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right] + 2eG(2s)x^2(\omega R^2)^{-1} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{c}{\omega q} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 - i\hbar \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right] - 2eG(2s)y^2(\omega R^2)^{-1} = 0. \quad (20)$$

Найдем вначале решение уравнения (19). Полагая

$$\sigma(x, s) = \frac{1}{2} [A(s)x^2 + 2B(s)x + C(s)],$$

получим систему уравнений

$$\frac{dA}{ds} + \frac{2c}{\omega q} A^2 + 4eG(2s)(\omega R^2)^{-1} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{dB}{ds} + \frac{2c}{\omega q} AB = 0, \quad (22)$$

$$\frac{dC}{ds} + \frac{2c}{\omega q} B^2 - \frac{2i\hbar c}{\omega q} A = 0. \quad (23)$$

Подстановка

$$A = \left(\frac{\omega q}{2cu_1} \right) \frac{du_1}{ds},$$

где u_1 – решение уравнения

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{8ecG(2s)}{\omega^2 q R^2} u = 0, \quad (24)$$

обращает уравнение (21) в тождество. Пусть вронскиан двух линейно назависимых решений равен единице: $u_1 du_2/ds - u_2 du_1/ds = 1$. Отсюда следует соотношение

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{u_2}{u_1} \right) = \frac{1}{u_1^2},$$

учитывая которое, получим решения уравнений (22) и (23):

$$B = \frac{f_x}{u_1}, \quad C = -2(f_x)^2 \frac{u_2}{kqu_1} + i\hbar \ln u_1,$$

где f_x – постоянная величина. Аналогичным путем получим решение уравнения (20):

$$\rho(y, s) = \left[\frac{dv_1}{ds} \frac{\omega q}{2c} y^2 + 2f_y y - 2c(f_y)^2 \frac{v_2}{\omega q} + i\hbar \ln v_1 \right] (2v_1)^{-1}.$$

Здесь v_1, v_2 – два линейно независимых решения уравнения

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{8ecG(2s)}{\omega^2 q R^2} v = 0. \quad (25)$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} g &= (u_1 v_1)^{-1/2} \exp \left[\frac{i\sigma_0(x, s)}{\hbar} + \frac{i\rho_0(y, s)}{\hbar} \right], \\ \sigma_0(x, s) &= \left[\frac{\omega q}{2c} x^2 \frac{du_1}{ds} + 2f_x x - 2c(f_x)^2 \frac{u_2}{\omega q} \right] (2u_1)^{-1}, \\ \rho_0(y, s) &= \left[\frac{\omega q}{2c} y^2 \frac{dv_1}{ds} + 2f_y y - 2c(f_y)^2 \frac{v_2}{\omega q} \right] (2v_1)^{-1}, \end{aligned}$$

f_x, f_y – квантовые числа, которые при выключении поля переходят в компоненты импульса свободной частицы с 4-импульсом p^μ , удовлетворяющим условию $p^2 = (mc)^2$.

Отметим, что функции S_{24}, D_{13} удовлетворяют уравнению Клейна–Гордона.

При выключении поля ($G \rightarrow 0$) имеем

$$\sigma_0(x, s) + \rho_0(y, s) = f_x x + f_y y - [(f_x)^2 + (f_y)^2] \xi(2q)^{-1}.$$

В этом случае из выражений (17), (18) находим $\psi = \exp(iS/\hbar)\psi_0$, где ψ_0 – постоянный биспинор,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{q\eta}{2} - [m^2 c^2 + (f_x)^2 + (f_y)^2] \xi(2q)^{-1} + f_x x + f_y y \equiv f^\mu x_\mu, \\ f_0 &= \frac{q}{2} + [m^2 c^2 + (f_x)^2 + (f_y)^2] (2q)^{-1}, \\ \mathbf{f} &= \left(f_x, f_y, -\frac{q}{2} + [m^2 c^2 + (f_x)^2 + (f_y)^2] (2q)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что $f^\mu f_\mu = (mc)^2$, $f_0 - f_z = q$.

Функция g должна принадлежать к классу функций L^2 . Поэтому решения уравнений (24), (25) должны быть ограниченными. В связи с этим требованием отметим, что максимум плотности вероятности волнового пакета $S_{24}(x, y, s)$ перемещается как релятивистская частица. Средние значения x и y координаты частицы подчиняются уравнениям релятивистской классической механики, совпадающим с уравнениями (24), (25), где $s = \omega q \tau / mc$, τ – собственное время [7, 8]. Следовательно, средние значения x и y координат должны удовлетворять неравенствам $|\langle x \rangle| < R$, $|\langle y \rangle| < R$: величина $2R$ – расстояние между металлическими поверхностями волновода. Анализ общей области устойчивости позволяет заключить, что для реализации условия ограниченности решений достаточно рассмотреть класс периодических функций $G(kx)$, $kx = \omega \xi / c = \omega(t - z/c)$, ω – частота бегущей волны. В этом случае уравнения (24), (25) представляют собой уравнения Хилла. Очевидно, что решения этих уравнений должны принадлежать общей области устойчивости в пространстве параметров, задаваемых функцией $G(kx)$, и собственным значениям q . Это условие накладывает ограничения на возможные значения величины q .

4. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ПОЛЯРИЗАЦИИ

Рассмотрим оператор $T^\mu = \gamma^5 \gamma^\mu - \gamma^5 P^\mu / mc$, являющийся ковариантным обобщением 3-вектора поляризации [1, 9, 10]. Поскольку скалярное произведение nT коммутирует с гамильтонианом, то можно ввести ковариантный оператор поляризации $J \sim nT$. Учитывая (4), получим $nT = \gamma^5 \gamma n - \gamma^5 q / mc$. Полагая $J = (mc/q)nT$, найдем биспиноры, удовлетворяющие уравнению

$$J\psi = \lambda\psi. \quad (26)$$

Из системы алгебраических уравнений (26) получим два собственных биспинора $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(-1)}$, соответствующих собственным значениям $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Первый биспинор образован компонентами

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)} = \varphi_1^{(1)}, \varphi_4^{(1)} = \frac{q - mc}{q + mc} \varphi_2^{(1)},$$

второй – компонентами

$$\varphi_1^{(-1)}, \varphi_2^{(-1)}, \varphi_3^{(-1)} = \frac{mc - q}{q + mc} \varphi_1^{(-1)}, \varphi_4^{(-1)} = -\varphi_2^{(-1)}.$$

Учитывая (17), (18), получим решения, зависящие от спиновых коэффициентов. Компоненты первого биспинора

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} = \varphi_3^{(1)} &= N^{(1)} \left(\exp \frac{iS_0}{\hbar} \right) p_- g(2q)^{-1}, \\ \varphi_{2,4}^{(1)} &= N^{(1)} \left(1 + \frac{mc}{q} \right) \left(\exp \frac{iS_0}{\hbar} \right) \frac{g}{2}, \end{aligned} \quad (27)$$

компоненты второго

$$\begin{aligned}\varphi_{1,3}^{(-1)} &= N^{(-1)} \left(\frac{mc}{q} + 1 \right) \left(\exp \frac{iS_0}{\hbar} \right) \frac{g}{2}, \\ \varphi_2^{(-1)} &= -\varphi_4^{(-1)} = -N^{(-1)} \left(\exp \frac{iS_0}{\hbar} \right) p_+ g (2q)^{-1}.\end{aligned}\quad (28)$$

При вычислении нормировочного интеграла следует учесть, что для волновых функций (27), (28), соответствующих непрерывному спектру, основной вклад дает область пространства, в которой после введения слабого затухания решение совпадает с решением для свободной частицы [11]. Учитывая это условие, находим $N^{(1)} = N^{(-1)} = (2p_0)^{-1/2}$.

5. ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ БЕГУЩЕЙ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ВОЛНОВОДА

Пусть $G(k\xi) = V_0 + V \cos(\omega\xi/c)$. Полагая в (24) и (25)

$$a = \frac{8ecV_0}{\omega^2 q R^2}, \quad b = \frac{4ecV}{\omega^2 q R^2},$$

получим уравнения

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + (a + 2b \cos 2s)u = 0, \quad (29)$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} - (a + 2b \cos 2s)v = 0, \quad (30)$$

которые представляют собой частные случаи уравнения Маттье

$$\frac{d^2 M}{ds^2} + (\mu + 2\nu \cos 2s)M = 0. \quad (31)$$

Два ограниченных линейно независимых решения уравнения (31) можно представить в виде [12, 13]

$$\begin{aligned}M_1(s) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \cos[(n+2m)s], \\ M_2(s) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \sin[(n+2m)s]w^{-1}, \\ w &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (n+2m)c_m c_m.\end{aligned}\quad (32)$$

Коэффициенты c_k определяются из системы уравнений [13]

$$[\mu - (n+2k)^2]c_k + \nu(c_{k+1} + c_{k-1}) = 0$$

в виде непрерывных дробей

$$c_0 = 1, \quad c_{\pm 1} = \frac{\nu}{(n \pm 2)^2 - \mu - \frac{\nu^2}{(n \pm 4)^2 - \mu + \dots}}, \quad c_{\pm 2} = \frac{\nu c_{\pm 1}}{(n \pm 4)^2 - \mu + \dots}. \quad (33)$$

Характеристический показатель n удовлетворяет уравнению

$$\mu - n^2 + \nu(c_1 + c_{-1}) = 0. \quad (34)$$

Из теории функций Маттье известно, что плоскость параметров (μ, ν) содержит области, соответствующие ограниченным и неограниченным решениям [12, 13]. Отметим, что параметры a и b в уравнениях (29), (30) лежат на прямой $\mu = (2V_0/V)\nu$ в областях $\nu \geq 0$ и $\nu \leq 0$. Поэтому наибольший интерес представляет решение уравнения (31), соответствующее первой области устойчивости в плоскости (μ, ν) , которая лежит справа от кривой $\mu_{c0}(\nu) = -\nu^2/2 + 7\nu^4/128 + \dots$ и ограничена кривыми $\mu_{c1}(\nu) = 1 - \nu - \nu^2/8 + \dots$ при $\nu > 0$ и $\mu_{s1}(\nu) = \mu_{c1}(-\nu)$ при $\nu < 0$ [12]. Эта область изображена на рисунке. Для нашей задачи представляет интерес только та часть плоскости параметров, в которой области устойчивости решений уравнений (29), (30) перекрываются.

Для анализа общей области устойчивости уравнений (29), (30) удобно произвести преобразование инверсии относительно оси ν . Общая область устойчивости в (μ, ν) -плоскости ограничена криволинейным треугольником с вершинами в точках $(0, 0)$, (a_c, b_c) , $(0, b_m)$ в области $0 \leq \nu \leq b_m$: $0 \leq \mu \leq \mu_{c1}(\nu)$ при значениях $b_c \leq \nu \leq b_m$; $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}_{c0}(\nu) = -\mu_{c0}(\nu)$ при значениях $0 \leq \nu \leq b_c$. Здесь $\mu_{c1}(b_m) = 0$, $b_m = 0.92$, $\mu_{c1}(b_c) = \bar{\mu}_{c0}(b_c)$, $b_c = 0.706$, $a_c = \mu_{c1}(b_c) = 0.237$.

Полагая в (31) $\mu = a$, $\nu = b$, получим из (33), (34) характеристический показатель $n = n_c$, $n_c = 1 - \Delta n_c$, $\Delta n_c^2 = a + 1 + b^2/8 - 2(a + 3b^2/8)^{1/2}$ и значения коэффициентов $c_1 \approx b/8$, $c_{-1} \approx -b/[a - (n_c - 2)^2 + b^2/8]$; $w \approx n_c + (n_c - 2)c_{-1}^2 + (n_c + 2)c_1^2$. Из (32)

находим два линейно независимых решения уравнения (29). Условие $n_c = 1$ определяет граничную кривую $\mu = \mu_{c1}(\nu)$. При $n_c \approx 1$ имеем $c_{-1} \approx 1$, $w \approx -2\Delta n_c + 3b^2/64$.

Полагая в (31) $\mu = -a$, $\nu = -b$, получим значения $n = n_0$, $n_0^2 \approx -a + \bar{\mu}_{c0}(b)$, $c_1 \approx b/4(n_0 + 1)$, $c_{-1} \approx -b/4(n_0 - 1)$, $w \approx n_0$. Из соотношений (32) найдем явный вид двух линейно независимых решений уравнения (30). Условие $n_0 = 0$ определяет граничную кривую $\mu = \mu_{c0}(\nu)$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00957).

Список литературы

- [1] В. Г. Багров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Шаповалов. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982.
- [2] D. M. Volkov. Z. Phys. 1935. V. 94. P. 250.
- [3] R. J. Redmond. J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 1163.
- [4] А. С. Дементьев, Ю. Г. Павленко. ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 161.
- [5] S. F. Franklin, J. H. Marburger. J. Math. Phys. 1975. V. 16. № 10. P. 2089.
- [6] В. Пауль. УФН. 1990. Т. 169. № 12. С. 109.
- [7] Ю. Г. Павленко, Н. Д. Наумов, А. И. Торопова. ЖТФ. 1997. Т. 67. № 7. С. 98.
- [8] Ю. Г. Павленко, Н. Д. Наумов, А. И. Торопова. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1998. № 1. С. 42.
- [9] В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин. Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.
- [10] И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов. Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
- [11] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
- [12] Н. В. Мак-Лаклан. Теория и приложения функций Маттье. М.: ИЛ, 1953.
- [13] Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958.

Поступила в редакцию 9.XII.1998 г.