Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Е. Бурланков, А. М. Самочадин, Потоки энергии гравитационных волн
в жидкой сфере, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 2, 342–351

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf781>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 10:09:06

© 1999 г.

Д. Е. Бурланков*, А. М. Самочадин*

ПОТОКИ ЭНЕРГИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ЖИДКОЙ СФЕРЕ

Рассмотрена проблема переноса энергии на статическом фоновом пространстве-времени, создаваемом жидким сферическим телом. Выведен квадратичный по возмущениям лагранжиан гравитации и жидкости в сопутствующей системе отсчета. Наложение калибровочных условий и интегрирование по угловым координатам производится на уровне интеграла действия, и поэтому задача оказывается двумерной. Выведены поток и плотность энергии возмущений. Рассмотрены различные варианты выбора калибровки. Выполнение закона сохранения энергии обеспечивается статичностью метрики и обращением в нуль лагранжевых вариаций.

1. ВВЕДЕНИЕ

В задаче описания бесконечно малых гравитационно-акустических колебаний жидкой сферы [1–3], несмотря на достаточно длинную историю, которую, по-видимому, нужно вести от работы Уилера и Редже [4], имеется еще немало принципиальных вопросов: например, проблемы выбора калибровки и описания переноса энергии гравитационно-акустическими колебаниями. Торн с сотрудниками [1] выбрали калибровку, в которой ненулевыми являются возмущения метрики, раскладываемые по обычным (скалярным) сферическим функциям. При этом уравнения Эйнштейна выглядят относительно просто. Достаточно сложной составляющей этих уравнений оказываются уравнения динамики жидкости. В работе [3] использовались калибровочные степени свободы для диагонализации тензора возмущений метрики (рассматривались только четные моды), что упрощает вывод уравнений, однако учет уравнений динамики также приводит к довольно сложной системе дифференциальных уравнений пятого порядка.

Из физических соображений следует, что для внутренней задачи наиболее адекватной оказывается сопутствующая система для возмущений, где обращены в нуль компоненты h_{01} , h_{02} , h_{03} . Для этого используются три калибровочных преобразования из четырех. Преобразование времени вывело бы из сопутствующей системы. Поэтому используемое нами исходное количество компонент тензора возмущений больше, чем у предыдущих авторов. При этом из уравнений выпадает вектор скорости, и выполнение гидродинамических уравнений гарантируется в соответствии с теоремой Гильберта [5]

* Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, Россия

выполнением уравнений Эйнштейна. В итоге система описывается четырьмя дифференциальными уравнениями первого порядка, что соответствует распространению связанных акустической и гравитационной (четной) мод.

В качестве фона мы выберем пространственно конформно-плоскую метрику

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\mu-2\nu} (dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)), \quad (1)$$

удобную тем, что в ней найдена серия аналитических решений [6–8]. В работе [9] выведено разложение чисто гравитационного лагранжиана до второго порядка по возмущениям метрики

$$\begin{aligned} \delta_2(\sqrt{g}g^{ij}R_{ij}) = & \sqrt{g}g^{ij}(\delta\Gamma_{il}^k\delta\Gamma_{jk}^l - \delta\Gamma_{ij}^l\delta\Gamma_{lk}^k) + \\ & + \sqrt{g}R_j^k \left(h_s^j h_k^s - \frac{1}{2} h_k^j h_s^s - \frac{1}{4} \delta_k^j \left(h_m^s h_s^m - \frac{1}{2} h_s^s h_m^m \right) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{is}}{2} (\nabla_j h_{sk} + \nabla_k h_{js} - \nabla_s h_{jk}).$$

В вакууме компоненты R_j^i фона равняются нулю. В жидкости же они определяются через давление и плотность энергии соотношениями

$$R_0^0 = \frac{\varepsilon + 3p}{2}, \quad R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{p - \varepsilon}{2}.$$

2. ЛАГРАНЖИАНЫ ЖИДКОСТИ

Как было показано в статье [10], действие для паскалевой жидкости определяется давлением, зависящим от энтальпии μ ,

$$S_f = \int \sqrt{g} p(\mu) d^4 x, \quad (3)$$

где $\mu = \sqrt{g^{ij}\sigma_{,i}\sigma_{,j}}$. Вариация действия по переменной σ приводит к уравнению

$$\partial_i \left(\sqrt{g} \frac{\partial p}{\partial \sigma_i} \right) = \partial_i \left(\sqrt{g} \frac{dp}{d\mu} \frac{g^{ij}\sigma_j}{\mu} \right) = 0,$$

которое является уравнением непрерывности в гидроаэродинамике, если величину

$$\frac{g^{ij}\sigma_j}{\mu} \equiv u^i$$

считать четырехвектором скорости (т.к. $g_{ij}u^i u^j = 1$), а $dp/d\mu \equiv \rho$ — плотностью вещества. Сопутствующая система отсчета — это система, где σ определяется только переменной t : $\sigma = t$. Тогда $\mu = \sqrt{g^{00}}$ есть термодинамическая функция жидкости, однозначно

связываемая с метрическим тензором. Вариация действия по компоненте g^{00} определяет плотность энергии

$$\varepsilon = \mu \frac{dp}{d\mu} - p.$$

Локальная скорость звука a определяется соотношением

$$\frac{c^2}{a^2} \equiv q = \frac{d\varepsilon}{dp}$$

и может быть найдена по фоновому решению $q = \varepsilon' / p'$.

При рассмотрении возмущений на стационарном фоне мы должны разложить давление по возмущениям до второго порядка включительно, т.е.

$$\tilde{p} = p + \frac{dp}{d\mu}(\delta_1\mu + \delta_2\mu) + \frac{d^2p}{d\mu^2} \frac{\delta_1\mu^2}{2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{d^2p}{d\mu^2} = \frac{dp}{d\mu} = \frac{d}{d\mu} \frac{\varepsilon + p}{\mu} = q \frac{\varepsilon + p}{\mu^2},$$

имеем

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= p + (\varepsilon + p) \left(\frac{\delta_1\mu}{\mu} + q \frac{\delta_1\mu^2}{2} \right), \\ \sqrt{\tilde{g}} &\approx \sqrt{g} \left(1 + \frac{h_i^i}{2} - \frac{1}{4} \left(h_j^i h_i^j - \frac{(h_i^i)^2}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Возмущения μ (если положить $\sigma = 1 + \eta$) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \sqrt{(g^{ij} - h^{ij} + h_k^i h^{kj})(\delta_i^0 + \eta_i)(\delta_j^0 + \eta_j)} = \\ &= \mu \left(1 - \frac{1}{2} h_0^0 + \eta_{,0} - \frac{1}{8} (h_0^0 - 2\eta_{,0})^2 - h_0^i \eta_{,i} + \frac{1}{2} h_k^0 h_0^k + \frac{g^{ij}}{2g^{00}} \eta_{,i} \eta_{,j} \right). \end{aligned}$$

Уравнение непрерывности в первом порядке малости

$$\begin{aligned} \partial_i \left(\sqrt{\tilde{g}} \left(1 + \frac{1}{2} h_s^s \right) \rho \left(1 + q \frac{\delta\mu}{\mu} \right) \frac{g^{ij}(\delta_j^0 + \eta_{,j})}{\mu + \delta\mu} \right) \approx \\ \approx \partial_0 \left(\sqrt{g} \rho \left(\frac{1}{2} h_s^s + (q-1) \frac{\delta\mu}{\mu} \right) \right) + \partial_i \left(\sqrt{g} \frac{\rho}{\mu} g^{ij} \eta_{,j} \right) = 0 \end{aligned}$$

оказывается дифференциальным уравнением второго порядка относительно возмущения η . Это уравнение присоединяется к уравнениям Эйнштейна, в правые части которых добавляются члены, содержащие четырехвектор скорости.

Однако можно распорядиться калибровочным преобразованием времени не для уничтожения какой-то компоненты возмущения метрики, а для уничтожения величины η , что

оставляет возмущенную систему координат сопутствующей. Оставшиеся три калибровочные функции можно использовать для избавления от компонент h_{01} , h_{02} , h_{03} . Возмущенный тензор энергии-импульса T_j^i при этом по-прежнему диагонален и имеет вид

$$T_0^0 = \varepsilon + \delta\varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p - \delta p.$$

Решать теперь нужно **только** уравнения Эйнштейна.

Разложение до второго порядка лагранжиана жидкости (индексы i, j, k меняются от 1 до 3, т.к. индекс 0 мы выделяем явно) принимает вид

$$\delta_2(\sqrt{g}p) = \frac{p}{8}(2h_0^0 h_i^i + (h_i^i)^2 - (h_0^0)^2 - 2h_j^i h_i^j) - \frac{\varepsilon + p}{8}(2h_0^0 h_i^i + (q+1)(h_0^0)^2).$$

Полное действие для самогравитирующей жидкой сферы есть $S = S_g + S_f$. Учитывая выражение (2), получаем полный лагранжиан системы

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{c^4}{16\pi k}\sqrt{g}g^{ij}(\delta\Gamma_{il}^k\delta\Gamma_{jk}^l - \delta\Gamma_{ij}^l\delta\Gamma_{lk}^k) + \\ & + \frac{\sqrt{g}}{16}[(2q-1)\varepsilon + (2q-3)p](h_0^0)^2 + (\varepsilon - p)(2h_j^i h_i^j - 2h_0^0 h_i^i - (h_i^i)^2). \end{aligned} \quad (4)$$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

При преобразовании угловых переменных компоненты, у которых отсутствуют индексы θ и ϕ , преобразуются как скаляры и раскладываются по обычным сферическим функциям. Преобразованием вращения любую такую функцию можно привести к функции $Y_{lm} = Y_{l0}$, зависящей только от угла θ и пропорциональной полиному Лежандра от $\cos\theta$. Эти функции мы будем называть Y_l .

Четные компоненты $h_{0\alpha}$ и $h_{1\alpha}$ ($\alpha = 2, 3$) при преобразованиях θ и ϕ ведут себя как векторы и раскладываются по векторным функциям $Y_v = \partial_\theta Y_l$ (первым присоединенным полиномам Лежандра от $\cos\theta$), а компоненты $h_{\alpha\beta}$ раскладываются как по скалярным, так и по тензорным (вторым присоединенным полиномам Лежандра) функциям Y_l . Обозначив

$$l_1 = \frac{l(l+1)}{2}, \quad l_2 = l_1 - 1 = \frac{(l-1)(l+2)}{2},$$

можно записать следующие необходимые для вычислений дифференциальные соотношения между используемыми сферическими функциями:

$$\partial_\theta Y_l = Y_v, \quad \partial_\theta Y_v = -Y_t - l_1 Y_l, \quad \partial_\theta Y_t = l_2 Y_v - 2(\text{ctg}\theta)Y_t.$$

Для четных возмущений имеем

$$\begin{aligned} h_{00} &= Y_l a_{00} e^{2\nu}, & h_{01} &= Y_l a_{01}, & h_{02} &= Y_v r a_{02}, \\ h_{11} &= Y_l a_{11} e^{2\nu}, & h_{12} &= Y_v r e^{-2\nu} a_{12}, \\ h_{22} &= (Y_l a_{22} + Y_t a_{33}) r^2, & h_{33} &= (Y_l a_{22} - Y_t a_{33}) r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

для нечетных —

$$h_{03} = Y_v a_{03} r \sin \theta, \quad h_{13} = Y_v a_{13} e^{-2\nu} r \sin \theta, \quad h_{23} = Y_t a_{23} r^2 \sin \theta.$$

4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения для малых возмущений в общем случае приведены в статье [4] и имеют вид

$$\delta R_{ij} = \nabla_k \delta \Gamma_{ij}^k - \nabla_j \delta \Gamma_{ik}^k. \quad (5)$$

Так как фоновое пространство не плоское, то ковариантные производные не перестановочны. Определяя вектор $a_i = \nabla_s h_i^s$, получим

$$\delta R_j^k = \frac{1}{2} [g^{ki} (\nabla_i a_j + \nabla_j a_i - \Delta h_{ij} - \nabla_i \nabla_j h_s^s) + R_i^k h_j^i - R_j^i h_i^k] - R^{ki}{}_{js} h_i^s.$$

Из тождеств Гильберта

$$\tilde{\nabla}_i (G_j^i + \delta G_j^i) \approx (\nabla_i G_j^i) + (\nabla_i \delta G_j^i + \delta \Gamma_{js}^i G_s^i - \delta \Gamma_{ij}^s G_s^i) = 0$$

для возмущений следует связь

$$\nabla_i \delta G_j^i + \delta \Gamma_{is}^i G_j^s - \delta \Gamma_{ij}^s G_s^i = 0, \quad (6)$$

которая при $j = \vartheta$ дает

$$\delta p = -\frac{\varepsilon + p}{2} h_0^0,$$

а при $j = 0$ –

$$\delta \varepsilon = -\frac{\varepsilon + p}{2} (h_1^1 + h_2^2 + h_3^3).$$

Поскольку $\delta \varepsilon = q \delta p$, то получается алгебраическая связь компонент тензора возмущений

$$h_1^1 + h_2^2 + h_3^3 = q h_0^0. \quad (7)$$

Тогда уравнения (5) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{c^4}{16\pi k} \delta R_0^0 + \frac{q + 3\varepsilon + p}{2} \frac{h_0^0}{2} &= 0, \\ \frac{c^4}{16\pi k} \delta R_j^i + \delta_j^i \frac{1 - q\varepsilon + p}{2} \frac{h_0^0}{2} &= 0, \quad i \neq j, \\ \delta R_j^0 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

После разложения по сферическим функциям и фурье-гармоникам относительно временной переменной эти уравнения записываются в виде системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для функций только от радиуса. Если ввести обозначения

$$\mathcal{B} = 1 + r(\mu' - \nu'), \quad \mathcal{C} = 3\mathcal{B} - r\nu', \quad \mathcal{D} = \mathcal{B}^2 - 1, \quad (9)$$

то данная система после выполнения соотношения (7)

$$a_{11} = -(qa_{00} + 2a_{22}) \quad (10)$$

принимает вид

$$a'_{12} = -\frac{1}{r}(qa_{00} + \mathcal{C}a_{12} + a_{22} + l_2a_{33}), \quad (11)$$

$$a'_{22} = -\frac{1}{r}(qa_{00}\mathcal{B} + l_1a_{12} + \mathcal{C}a_{22}), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a'_{00} = & -\frac{1}{r\mathcal{B}}[-(r\nu')^2a_{22} + r\nu'(qa_{00}\mathcal{B} - l_1a_{12} + 2\mathcal{B}a_{22}) + \\ & + (q\mathcal{D} - l_1)a_{00} - l_1\mathcal{B}a_{12} + (3\mathcal{D} + l_1)a_{22} - l_1l_2a_{33} + \\ & + \frac{r^2}{2}e^{2\mu-2\nu}((\varepsilon - (2q-1)p)a_{00} - 4pa_{22}) - e^{2\mu-4\nu}(r\omega)^2a_{22}], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} a'_{33} = & \frac{1}{rl_2\mathcal{B}}[-(r\nu')^2a_{22} + r\nu'(3\mathcal{B}(a_{00} - a_{22}) - l_1a_{12}) + \\ & + (3\mathcal{D} - l_2)a_{00} - 2l_2\mathcal{B}a_{12} - (2\mathcal{D} - l_2)a_{22} - l_1l_2a_{33} + \\ & + \frac{r^2}{2}e^{2\mu-2\nu}((\varepsilon - 3p)a_{00} + 4pa_{22}) + e^{2\mu-4\nu}(r\omega)^2(\mathcal{B}a_{12} - a_{22})]. \end{aligned} \quad (14)$$

Для нечетных мод

$$a'_{13} = -\frac{1}{r}(\mathcal{C}a_{13} + l_2a_{23}), \quad (15)$$

$$a'_{23} = \frac{1}{rl_2}(e^{2\mu-4\nu}(r\omega)^2 - 2l_2)a_{13}. \quad (16)$$

4.1. Асимптотика в центре. При $r \rightarrow 0$ имеем $\mathcal{B} \rightarrow 1$, $\mathcal{C} \rightarrow 3$, $\mathcal{D} \rightarrow 0$ и система уравнений (11)–(14) принимает вид

$$\begin{aligned} ra'_{00} &= l_1(a_{00} + a_{12} - a_{22} + l_2a_{33}), \\ ra'_{12} &= -(qa_{00} + 3a_{12} + a_{22} + l_2a_{33}), \\ ra'_{22} &= -(3qa_{00} + l_1a_{12} + 3a_{22}), \\ ra'_{33} &= -(a_{00} + 2a_{12} - a_{22} + l_1a_{33}). \end{aligned}$$

Эта система имеет решения вида r^k , где число k может принимать четыре значения:

$$k = \{-(l+3), -(l+1), l, l-2\},$$

из которых два являются приемлемыми (при $l = 0, 1$ – только одно). Для нечетных мод

$$\begin{aligned} ra'_{13} &= -(3a_{13} + l_2a_{23}), \\ ra'_{23} &= -2a_{13} \end{aligned}$$

и k принимает значения $k = \{l-1, -(l+2)\}$. Несингулярным в центре является одно решение.

4.2. Моды с $l = 0$ и $l = 1$. Отдельного рассмотрения требуют моды с $l = 0$ (радиальные колебания) и $l = 1$ (дипольные колебания), в которых отсутствуют гравитационные компоненты и колебания являются чисто акустическими.

В случае радиальных колебаний из уравнений выпадают переменные a_{12} и a_{33} , так что остается система двух связанных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая радиальные акустические колебания,

$$a'_{00} = -\frac{1}{r\mathcal{B}} \left(\mathcal{B}qr\nu' - e^{2\mu-2\nu} r^2 \frac{\varepsilon + p}{2} \right) a_{00} + 4r\nu' a_{22},$$

$$a'_{22} = -\frac{1}{r} (\mathcal{B}qa_{00} + \mathcal{C}a_{22}).$$

При $l = 1$ из уравнений выпадает переменная a_{33} , но из условия $a'_{33} = 0$ можно выразить a_{12} через a_{00} и a_{22} , так что опять получается система только двух дифференциальных уравнений первого порядка. Вводя переменные

$$u = r^3 e^{3\mu-4\nu} \frac{a_{22} + a_{12}}{2}, \quad v = r^3 e^{3\mu-4\nu} \frac{a_{22} - a_{12}}{2}, \quad w = r^3 e^{3\mu-4\nu} \frac{a_{00}}{2},$$

получаем для них систему дифференциальных уравнений

$$ru' = -u - qw(2 + r(\mu' - \nu')),$$

$$rv' = v - qwr(\mu' - \nu'),$$

$$w = -\frac{(r\nu'(B - r\nu') - (r\omega)^2 e^{2\mu-4\nu})(u + v) + (\mathcal{B}(r\omega)^2 e^{2\mu-4\nu} - r\nu')(u - v)}{3\mathcal{D} + \varepsilon e^{2\mu-2\nu}}.$$

Здесь содержится только одна мода – акустическая.

4.3. Сшивание со внешним решением. На поверхности звезды выполняются соотношения $p = 0$ и $\delta p = 0$, что приводит к условию на границе $h_{00} = 0$. При заданной частоте ω два независимых в центре решения r^l и r^{l-2} на поверхности принимают значения $h_{00}^{(1)}$ и $h_{00}^{(2)}$ и требование $h_{00} = 0$ определяет относительные амплитуды этих мод.

Эти решения должны сшиваться со внешними решениями [11], для чего нужно провести соответствующее калибровочное преобразование.

Для нечетных мод ситуация упрощается. Уравнения (15), (16) не содержат параметров, испытывающих скачок на границе тела (например, ε), поэтому отсутствует их отражение от границы, и единственная несингулярная в центре ветвь непрерывно продолжается до бесконечности уже вне тела.

5. ЛАГРАНЖИАН, ПЛОТНОСТЬ И ПОТОК ЭНЕРГИИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

Как и в случае пространства Шварцшильда [9], лагранжиан квадратичен по возмущениям и может быть проинтегрирован по угловым переменным с учетом соотношений

$$\langle Y_v^2 \rangle = 2l_1, \quad \langle Y_t^2 \rangle = l_1 l_2,$$

$$\left\langle \left(\frac{Y_t}{\sin \theta} \right)^2 \right\rangle = \frac{2l+1}{4} l_1 l_2, \quad \left\langle \left(\frac{Y_v}{\sin \theta} \right)^2 \right\rangle = l_1 (2l+1),$$

$$\langle Y_l Y_t \rangle = \frac{l(l-1)}{2}, \quad \langle Y_l Y_v \operatorname{ctg} \theta \rangle = -l, \quad \langle Y_v Y_t \operatorname{ctg} \theta \rangle = l_1 (l-1),$$

где

$$\langle A \rangle = \frac{\int_{-1}^1 A \sin \theta d\theta}{\int_{-1}^1 Y_l^2 \sin \theta d\theta}.$$

После интегрирования (с $\sqrt{g}$, так что $S = \int \mathcal{L} dr dt$) лагранжиан четных мод (4) зависит от функций двух переменных и принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e = & \frac{c^4}{4k(2l+1)} [e^{3\mu-4\nu} r^2 (-2\dot{a}_{11}\dot{a}_{22} + 2l_1\dot{a}_{12}^2 - \dot{a}_{22}^2 + l_1l_2\dot{a}_{33}^2) + \\ & + e^\mu (r^2 (-2a'_{00}a'_{22} + a_{22}'^2 - l_1l_2a_{33}'^2) + 2l_1r((a'_{11} - a'_{00})a_{12} + \\ & + a_{12}'(a_{00} + a_{11} - 2a_{22}) - 2l_2a_{33}'a_{12}) + \\ & + 2l_1(a_{00}(l_2a_{33} - a_{11} - a_{22}) + a_{11}(a_{22} - l_2a_{33}) - l_2a_{33}'^2) - \\ & - r^2\nu'(2a_{22}' + a_{00}' + a_{11}')(a_{00} + a_{11}) + \\ & + 2r\mathcal{B}((a_{00}' - a_{11}')(a_{11} - a_{22}) - 4l_1a_{12}'a_{12} - 2l_1l_2a_{33}'a_{33}) - \\ & - 2l_1r\nu'a_{12}(a_{00} + a_{11} + 2a_{22}) + 2l_1\mathcal{B}a_{12}(3a_{00} - a_{11} - 2a_{22}))] + \\ & + \frac{4\pi}{2l+1} e^{3\mu-2\nu} r^2 \left[(\varepsilon + p)a_{00}'^2 \frac{q-1}{2} + \right. \\ & \left. + (\varepsilon - p) \left(\frac{(a_{00} + a_{11})^2}{4} + a_{22}(a_{00} - a_{11}) + 2a_{12}^2l_1 + l_1l_2a_{33}'^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Плотность энергии четных мод

$$\mathcal{W} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{00}} \dot{a}_{00} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{11}} \dot{a}_{11} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{12}} \dot{a}_{12} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{22}} \dot{a}_{22} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{33}} \dot{a}_{33} - \mathcal{L}.$$

Так как лагранжиан квадратичен, то плотность $\mathcal{W}$ совпадает по структуре с лагранжианом при уничтожении членов, линейных по $\dot{a}_{ij}$ (в данном лагранжиане их нет), и при смене знака у членов без производных по времени. Поток энергии

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{00}'} \dot{a}_{00} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{11}'} \dot{a}_{11} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{12}'} \dot{a}_{12} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{22}'} \dot{a}_{22} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{33}'} \dot{a}_{33} = \\ = & - \frac{c^4}{4k(2l+1)} e^\mu [2r^2 (\dot{a}_{22}(a_{00}' - a_{22}') + l_1l_2\dot{a}_{33}a_{33}') + \\ & + 2rl_1(\dot{a}_{12}(2a_{22} - a_{00} - a_{11}) - \dot{a}_{11}a_{12} + 2l_2\dot{a}_{33}a_{12}) + \\ & + 2r\mathcal{B}(\dot{a}_{11}(a_{11} - a_{22}) + 4l_1\dot{a}_{12}a_{12} + 2l_1l_2\dot{a}_{33}a_{33}) + \\ & + r^2\nu'(\dot{a}_{11} + 2\dot{a}_{22})(a_{00} + a_{11})]. \end{aligned}$$

Вариационные производные

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{00}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{00}} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{00}} - \partial_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{00}'}, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{11}}, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{12}}, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{22}}, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{33}}$$

в соответствии с уравнениями (10)–(14) обращаются в нуль, что приводит к уравнению сохранения потока

$$\partial_t \mathcal{W} + \mathcal{U}' = 0.$$

Аналогично записываются соответствующие соотношения для нечетных мод. Лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{c^4}{16k(2l+1)} l_1 (e^{3\mu-4\nu} r^2 (2\dot{a}_{13}^2 + l_2 \dot{a}_{23}^2) - \\ & - e^\mu (r^2 a_{23}'^2 l_2 + 4r\mathcal{B}(2a_{13}' a_{13} + l_2 a_{23}' a_{23}) + \\ & + 4rl_2 a_{23}' a_{13} + 4(l_1 a_{13}'^2 + l_2 a_{23}'^2))) + \\ & + \frac{\pi}{2l+1} (\varepsilon - p) l_1 (2a_{13}^2 + l_2 a_{23}^2)\end{aligned}$$

генерирует плотность

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = & \frac{c^4}{16k(2l+1)} l_1 (e^{3\mu-4\nu} r^2 (2\dot{a}_{13}^2 + l_2 \dot{a}_{23}^2) + \\ & + e^\mu (l_2 r^2 a_{23}'^2 + 4r\mathcal{B}(2a_{13}' a_{13} + l_2 a_{23}' a_{23}) + \\ & + 4rl_2 a_{23}' a_{13} + 4(l_1 a_{13}'^2 + l_2 a_{23}'^2))) - \\ & - \frac{\pi}{2l+1} (\varepsilon - p) l_1 (2a_{13}^2 + l_2 a_{23}^2)\end{aligned}$$

и поток энергии

$$\mathcal{U} = -\frac{c^4}{2k(2l+1)} r e^\mu l_1 (l_2 (r a_{23}' + 2a_{13}) \dot{a}_{23} + 2\mathcal{B}(2a_{13} \dot{a}_{13} + l_2 a_{23} \dot{a}_{23})).$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в случае стационарного фона для бесконечно малых гравитационно-акустических возмущений плотность и поток энергии четко определены и выводятся из квадратичного по возмущениям лагранжиана, причем калибровочные условия можно накладывать прямо в лагранжиане.

На уровне лагранжиана выполняется также интегрирование по угловым переменным, что превращает данную задачу в двумерную.

Фоновое пространство-время для описания колебаний и потока энергии удобно выбирать в аналитическом виде. В статье [8] представлена серия аналитических решений с единственным параметром – отношением внешнего радиуса к гравитационному. Поверхность зафиксирована равенством нулю давления, при этом плотность энергии отлична от нуля. Каждое решение при соответствующем масштабном преобразовании давления и плотности энергии может описывать звезду произвольного внешнего радиуса.

Благодарности. Вычисления проводились в системе Reduce A. Hern'a на базе Lisp'a T. Yamamoto. Один из авторов (Д.Е.Б.) с большой благодарностью вспоминает совместное терпеливое и тщательное обсуждение данных проблем летом 1994 г. с С. Чандрасекаром. Он также благодарен Р. Валди за предоставленную тогда же возможность заниматься данными исследованиями в его лаборатории. Авторы признательны П. К. Бражнику за помощь в работе.

Список литературы

- [1] *K. S. Thorn, A. Campolattoro.* Astrophys. J. 1967. V. 149. P. 591–611.
- [2] *L. Lindblom, S. Detweiler.* Astrophys. J. Suppl. 1983. V. 53. P. 73–92.
- [3] *S. Chandrasekhar, V. Ferrari.* Proc. R. Soc. London. A. 1991. V. 432. P. 247–279.
- [4] *T. Regge, J. A. Wheeler.* Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 1063–1069.
- [5] *D. Hilbert.* Nachrichten von der Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1915. № 3. P. 395–407.
- [6] *S. P. Goldman.* Astrophys. J. 1978. V. 226. P. 1079–1084.
- [7] *H. Knutsen.* Gen. Rel. Grav. 1991. V. 23. P. 843–859.
- [8] *Д. Е. Бурланков.* ТМФ. 1993. Т. 95. № 1. С. 135–145.
- [9] *Д. Е. Бурланков, А. М. Самочадин.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 1. С. 168–176.
- [10] *B. F. Schutz.* Phys. Rev. D. 1971. V. 4. P. 3559–3566.
- [11] *F. Zerilli.* Phys. Rev. Lett. 1970. V. 24. P. 737–738.

Поступила в редакцию 24.XII.1998 г.