Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Баталин, Р. Марнелиус, Общие квантовые антискобки, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 3, 358–379

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf784>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:55:43

ОБЩИЕ КВАНТОВЫЕ АНТИСКОБКИ¹⁾

Введенная недавно квантовая антискобка обобщается далее, что позволяет нечетному оператору Q быть произвольным. Приведены явные формулы для высших квантовых антискобок произвольных порядков и их обобщенные тождества Якоби. Рассмотрены их приложения к БВ- и БВФ–БРСТ-квантованиям с включением некоторых новых аспектов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы считаем для себя большой честью иметь возможность опубликовать статью в номере журнала, посвященном 90-летию со дня рождения Н. Н. Боголюбова. Боголюбов внес выдающийся вклад в развитие многих направлений теоретической физики. Поскольку он считал очень важными формальные аспекты квантования, мы представляем здесь некоторые общие формальные свойства квантовых калибровочных теорий.

В работе [1] мы ввели новые квантовые объекты, названные квантовыми антискобками, которые являются операторными аналогами классических антискобок в точности так же, как коммутаторы являются аналогами скобок Пуассона. Классические антискобки были введены в [2, 3] и в основном использовались в лагранжевом квантовании Баталина–Вилковиского (БВ) калибровочных теорий [3]. Кроме построения операторной версии БВ-квантования [1], квантовые антискобки были использованы для формулировки мастер-уравнения нового типа, генерирующего последовательность обобщенных уравнений Маурера–Картана для произвольных открытых групп [4]. Замечательно, что в этих мастер-уравнениях естественно возникают именно обобщенные квантовые антискобки, которые не удовлетворяют ни тождествам Якоби, ни правилу Лейбница. Такие скобки естественно порождают иерархию высших квантовых антискобок, определенных надлежащим образом. В их первичной форме высшие антискобки были введены уже в [1], где рассмотрение ограничивалось случаем коммутирующих операторов. Более общая форма, справедливая для операторов в произвольной инволюции,

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: batalin@td.lpi.ac.ru

[†]Институт теоретической физики, Технологический университет Чалмерса, Университет Гетеборга, Гетеборг, Швеция

[‡]E-mail: tferm@fy.chalmers.se

была дана в [4]. (В [5] было также показано, что все эти результаты имеют на классическом уровне дуальную версию в терминах обобщенных скобок Пуассона нового типа.) В [6] квантовые антискобки были обобщены до $Sp(2)$ -скобок, определенных аналогично $Sp(2)$ -антискобкам, использованным в $Sp(2)$ -версии БВ-квантования [7–9], и основные из вышеупомянутых результатов также были обобщены соответствующим образом.

Здесь мы дадим обзор и некоторое естественное развитие этих результатов. Мы начинаем с наиболее общей антискобки, как она определена в [1], и даем систематическое описание всех ее основных свойств, а затем обсуждаем рассмотренные до сих пор приложения. В разделах 2 и 3 описываются квантовые антискобки и их точные свойства, и основная часть представленных здесь результатов является новой. В разделе 4 рассматривается ограничение, приводящее к обыкновенной квантовой антискобке, которая обладает всеми теми же свойствами, что и ее классический аналог. В разделах 5 и 6 рассматриваются приложения к БВ- и БВФ (Баталин–Вилковский–Фрадкин)-квантованиям с включением некоторых новых аспектов. Наконец, в разделе 7 приведены некоторые замечания о соответствующих свойствах и приложениях квантовых $Sp(2)$ -антискобок.

2. ОБЩИЕ КВАНТОВЫЕ АНТИСКОБКИ

Общие квантовые антискобки определяются выражениями [1]

$$(f, g)_Q \equiv \frac{1}{2} \left([f, [Q, g]] - [g, [Q, f]] (-1)^{(\varepsilon_f + 1)(\varepsilon_g + 1)} \right), \quad (2.1)$$

где f и g – любые операторы с грассмановыми четностями $\varepsilon(f) \equiv \varepsilon_f$ и $\varepsilon(g) \equiv \varepsilon_g$, соответственно, Q – нечетный оператор, $\varepsilon(Q) = 1$. Коммутаторы в правой части суть стандартные суперкоммутаторы

$$[f, g] \equiv fg - gf (-1)^{\varepsilon_f \varepsilon_g}, \quad \forall f, g. \quad (2.2)$$

Квантовая антискобка (2.1) обладает следующими свойствами:

1) грассмановой четностью:

$$\varepsilon((f, g)_Q) = \varepsilon_f + \varepsilon_g + 1; \quad (2.3)$$

2) симметрией:

$$(f, g)_Q = -(g, f)_Q (-1)^{(\varepsilon_f + 1)(\varepsilon_g + 1)}; \quad (2.4)$$

3) линейностью:

$$(f + g, h)_Q = (f, h)_Q + (g, h)_Q \quad (\text{для } \varepsilon_f = \varepsilon_g); \quad (2.5)$$

4) если один из операторов есть нечетный/четный параметр λ , то имеет место равенство

$$(f, \lambda)_Q = 0 \quad \text{для любого оператора } f. \quad (2.6)$$

Все эти свойства в точности согласуются с соответствующими свойствами классической антискобки (f, g) функций f и g . Однако для классической антискобки дополнительно справедливы также

5) тождество Якоби

$$(f, (g, h))(-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)} + \text{cycle}(f, g, h) \equiv 0 \quad (2.7)$$

и

6) правило Лейбница

$$(fg, h) - f(g, h) - (f, h)g(-1)^{\varepsilon_g(\varepsilon_h+1)} = 0. \quad (2.8)$$

Эти свойства не выполняются для квантовой антискобки (2.1) в ее общем виде. Вместо этого имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (f, (g, h)_Q)_Q (-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)} + \text{cycle}(f, g, h) = \\ = \frac{1}{6}(-1)^{\varepsilon_f+\varepsilon_g+\varepsilon_h} \left\{ \left([f, [g, [h, Q^2]]] + \frac{1}{2}[[f, [g, [h, Q]]], Q] \right) (-1)^{\varepsilon_f \varepsilon_h} + \right. \\ \left. + \left([f, [h, [g, Q^2]]] + \frac{1}{2}[[f, [h, [g, Q]]], Q] \right) (-1)^{\varepsilon_h(\varepsilon_f+\varepsilon_g)} \right\} + \text{cycle}(f, g, h), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} (fg, h)_Q - f(g, h)_Q - (f, h)_Q g(-1)^{\varepsilon_g(\varepsilon_h+1)} = \\ = \frac{1}{2} \left([f, h][g, Q](-1)^{\varepsilon_h(\varepsilon_g+1)} + [f, Q][g, h](-1)^{\varepsilon_g} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

В наших предыдущих работах мы рассматривали только нильпотентные операторы Q , что является естественным ограничением с точки зрения БВ-квантования. Здесь мы оставляем Q произвольным. Заметим, что любой нечетный оператор Q удовлетворяет тривиальной алгебре

$$[Q, Q] = 2Q^2, \quad [Q^2, Q^2] = [Q^2, Q] = 0, \quad (2.11)$$

которая прямо следует из определения (2.2). В терминах квантовой антискобки (2.1) Q удовлетворяет алгебре

$$(Q, Q)_Q = (Q^2, Q^2)_Q = (Q^2, Q)_Q = 0. \quad (2.12)$$

Отметим также соотношение

$$(f, Q)_Q = \frac{3}{2}[f, Q^2], \quad \forall f. \quad (2.13)$$

Ненулевое Q^2 усложняет некоторые формулы. Например, вместо формулы (20) в [1] мы имеем здесь

$$\begin{aligned} [Q, (f, g)_Q] &= ([Q, f], g)_Q + (f, [Q, g])_Q (-1)^{\varepsilon_f+1} - \\ &- (-1)^{\varepsilon_f} \left([f, [g, Q^2]] + [g, [f, Q^2]](-1)^{\varepsilon_f \varepsilon_g} \right) = \\ &= [[Q, f], [Q, g]] - \frac{1}{2}(-1)^{\varepsilon_f} \left([f, [g, Q^2]] + [g, [f, Q^2]](-1)^{\varepsilon_f \varepsilon_g} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

При выводе обобщенных тождеств Якоби (2.9) было использовано соотношение

$$(f, (g, h)_Q)_Q = [[f, Q], (g, h)_Q] + \frac{1}{2}[Q, [f, (g, h)_Q]](-1)^{\varepsilon_f}, \quad (2.15)$$

которое прямо следует из определения (2.1) (дальнейшие детали см. ниже).

3. ИЕРАРХИЯ ОБЩИХ АНТИСКОБОК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ОБОБЩЕННЫЕ ТОЖДЕСТВА ЯКОБИ

Хотя квантовая антискобка (2.1) в ее общем виде не удовлетворяет тождеству Якоби и правилу Лейбница, возможно дать систематическое описание ее алгебраических свойств в терминах квантовых антискобок высших порядков.

В [1, 4] было показано, что для операторов в инволюции квантовые антискобки высших порядков могут быть определены с помощью производящего оператора и что производящий оператор определяет тождества Якоби. Эта конструкция может быть фактически обобщена до такой степени, что позволит нам определить общие квантовые антискобки для произвольных операторов. В общем случае нам необходимы следующие два производящих оператора (в [1, 4] Q считался нильпотентным, $Q^2 = 0$):

$$Q(\lambda) \equiv e^{-A} Q e^A, \quad Q^2(\lambda) \equiv e^{-A} Q^2 e^A, \quad (3.1)$$

где A – четный оператор, определяемый как

$$A = f_a \lambda^a, \quad (3.2)$$

где f_a , $a = 1, 2, \dots$, – произвольные операторы с грассмановыми четностями $\varepsilon_a \equiv \varepsilon(f_a)$ и λ^a – параметры с грассмановыми четностями $\varepsilon(\lambda^a) = \varepsilon_a$ (в [1] $\{f_a\}$ были набором коммутирующих операторов). Имеют место равенства

$$Q(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n, \quad Q^2(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^2, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} Q_0 &\equiv Q, & Q_n &\equiv \frac{1}{n!} [\dots [[Q, A], \dots, A]_n, & n \geq 1, \\ Q_0^2 &\equiv Q^2, & Q_n^2 &\equiv \frac{1}{n!} [\dots [[Q^2, A], \dots, A]_n, & n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

и последний индекс n показывает, что выражение включает n -кратный коммутатор. Определим общие квантовые антискобки высших порядков следующим образом (ср. с [1]):

$$\begin{aligned} (f_{a_1}, \dots, f_{a_n})_Q &\equiv -Q(\lambda) \overleftarrow{\partial}_{a_1} \overleftarrow{\partial}_{a_2} \dots \overleftarrow{\partial}_{a_n} (-1)^{E_n} \Big|_{\lambda=0} = \\ &= -Q_n \overleftarrow{\partial}_{a_1} \overleftarrow{\partial}_{a_2} \dots \overleftarrow{\partial}_{a_n} (-1)^{E_n} = \\ &= -\frac{1}{n!} [\dots [[Q, f_{b_1}], \dots, f_{b_n}] \lambda^{b_n} \dots \lambda^{b_1} \overleftarrow{\partial}_{a_1} \overleftarrow{\partial}_{a_2} \dots \overleftarrow{\partial}_{a_n} (-1)^{E_n}, \quad (3.5) \\ E_n &\equiv \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \varepsilon_{a_{2k+1}}, \end{aligned}$$

где $\overleftarrow{\partial}_a \equiv \overleftarrow{\partial} / \partial \lambda^a$. Это определение дает квантовые антискобки высших порядков для произвольных операторов в терминах симметризованных кратных коммутаторов с произвольным нечетным оператором Q :

$$(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})_Q = -\frac{1}{n!} (-1)^{E_n} \sum_{\text{sym}} [\dots [Q, f_{a_1}], \dots, f_{a_n}], \quad (3.6)$$

где суммирование идет по всевозможным порядкам $a_1, \dots, a_n$ ($n!$ членов) с подходящими знаковыми факторами, возникающими при соответствующих переупорядочениях мономов $\lambda^{a_1} \dots \lambda^{a_n}$ (это следует из последнего равенства в (3.5)). Высшие антискобки обладают свойствами

$$\begin{aligned} (\dots, f_a, f_b, \dots)_Q &= -(-1)^{(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_b+1)} (\dots, f_b, f_a, \dots)_Q, \\ \varepsilon((f_{a_1}, f_{a_2}, \dots, f_{a_n})_Q) &= \varepsilon_{a_1} + \dots + \varepsilon_{a_n} + 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В низших порядках мы получаем явно

$$\begin{aligned} n=2: \quad (f_a, f_b)_Q &= \frac{1}{2} \left([f_a, [Q, f_b]] - [f_b, [Q, f_a]] (-1)^{(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_b+1)} \right), \\ n=3: \quad (f_a, f_b, f_c)_Q &= \frac{1}{6} (-1)^{(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_c+1)} \left([[Q, f_a], f_b], f_c \right) (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_c} + \\ &\quad + [[Q, f_c], f_b], f_a \right) (-1)^{\varepsilon_b(\varepsilon_a+\varepsilon_c)} + \text{cycle}(a, b, c), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где выражение для $n=2$ есть в точности антискобка (2.1). Для нильпотентного Q и коммутирующих операторов f_{a_k} выражение (3.6) сводится к высшим квантовым антискобкам [1, формула (33)]. Более того, если f_{a_k} — функции некоторых координат, а Q — нильпотентный дифференциальный оператор, то (3.6), примененное к единице, дает классические антискобки, рассмотренные в [10].

Квантовые антискобки высших порядков могут быть также выражены рекуррентно в терминах низших антискобков. Точные соотношения могут быть выведены из рекуррентной формулы

$$Q_n = \frac{1}{n} [Q_{n-1}, A]. \quad (3.9)$$

Подстановка этого соотношения в (3.5) дает

$$\begin{aligned} (f_{a_1}, \dots, f_{a_n})_Q &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [(f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q, f_{a_k}] (-1)^{B_{k,n}} = \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f_{a_k}, (f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q] (-1)^{C_{k,n}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} B_{k,n} &\equiv \varepsilon_{a_k} (\varepsilon_{a_{k+1}} + \dots + \varepsilon_{a_n}) + \sum_{s=2[\frac{k}{2}]+1}^n \varepsilon_{a_s}, \\ C_{k,n} &\equiv \varepsilon_{a_k} (\varepsilon_{a_1} + \dots + \varepsilon_{a_{k-1}}) + \varepsilon_{a_k} + \sum_{s=2[\frac{k}{2}]+1}^n \varepsilon_{a_s}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В низшем порядке мы имеем явно (это выражение было также приведено в [4])

$$\begin{aligned}(f_a, f_b, f_c)_Q &= \frac{1}{3}(-1)^{(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_c+1)} \left([(f_a, f_b)_Q, f_c](-1)^{\varepsilon_c+(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_c+1)} + \text{cycle}(a, b, c) \right) = \\ &= \frac{1}{3}(-1)^{(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_c+1)} \left([f_a, (f_b, f_c)_Q](-1)^{\varepsilon_b+\varepsilon_a(\varepsilon_c+1)} + \text{cycle}(a, b, c) \right). \quad (3.12)\end{aligned}$$

Чтобы вывести обобщенные тождества Якоби, заметим сначала, что определение антискобки (2.1) дает соотношение (ср. с (2.15))

$$\begin{aligned}(f_{a_k}, (f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q)_Q &= [[f_{a_k}, Q], (f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q] + \\ &+ \frac{1}{2}[Q, [f_{a_k}, (f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q]](-1)^{\varepsilon_{a_k}}. \quad (3.13)\end{aligned}$$

Комбинация этого соотношения с рекуррентным соотношением (3.10) приводит к формуле

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (f_{a_k}, (f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q)_Q (-1)^{D_{k,n}} &= \\ &= \sum_{k=1}^n [[f_k, Q], (f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q] (-1)^{D_{k,n}} - \\ &- \frac{n}{2}[Q, (f_{a_1}, \dots, f_{a_n})_Q], \quad (3.14)\end{aligned}$$

$$D_{k,n} = \varepsilon_{a_k} + C_{k,n} = \varepsilon_{a_k}(\varepsilon_{a_1} + \dots + \varepsilon_{a_{k-1}}) + \sum_{s=2[\frac{k}{2}]+1}^n \varepsilon_{a_s}.$$

Сумма в правой части может быть выражена в терминах высших антискобок посредством тождеств (ср. с [1])

$$\left([Q(\lambda), Q(\lambda)] - 2Q^2(\lambda) \right) \overleftarrow{\partial}_{a_1} \overleftarrow{\partial}_{a_2} \dots \overleftarrow{\partial}_{a_n} \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad (3.15)$$

которые эквивалентны равенствам

$$\left(\sum_{k=0}^n [Q_k, Q_{n-k}] - 2Q_n^2 \right) \overleftarrow{\partial}_{a_1} \overleftarrow{\partial}_{a_2} \dots \overleftarrow{\partial}_{a_n} = 0, \quad (3.16)$$

где Q_n^2 определено в (3.4). Для $n = 0, 1, 2, 3$ мы имеем явно

$$\begin{aligned}n = 0 : \quad & [Q, Q] - 2Q^2 = 0, \\ n = 1 : \quad & [Q, [Q, f_a]] - [Q^2, f_a] = 0, \\ n = 2 : \quad & [Q, (f_a, f_b)_Q] - [[Q, f_a], [Q, f_b]] + \\ & + \frac{1}{2}[[Q^2, f_a], f_b](-1)^{\varepsilon_a} + \frac{1}{2}[[Q^2, f_b], f_a](-1)^{\varepsilon_b(\varepsilon_a+1)} = 0, \\ n = 3 : \quad & [Q, (f_a, f_b, f_c)_Q](-1)^{(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_c+1)} + \\ & + \left([[f_a, Q], (f_b, f_c)_Q](-1)^{\varepsilon_b+\varepsilon_a\varepsilon_c} + \text{cycle}(a, b, c) \right) - \\ & - \frac{1}{6} \sum_{\text{sym}} [[[Q^2, f_a], f_b], f_c](-1)^{\varepsilon_a\varepsilon_c} = 0. \quad (3.17)\end{aligned}$$

Здесь первое соотношение есть просто тривиальное тождество, второе – тождество Якоби, а третье есть в точности (2.14). При $n \geq 3$ равенство (3.16), умноженное на $(-1)^{E_n}$, принимает вид

$$\begin{aligned} & -[Q, (f_{a_1}, \dots, f_{a_n})_Q] + \sum_{k=1}^n [[f_{a_k}, Q], (f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q] (-1)^{D_{k,n}} + \\ & + R_n - (-1)^{E_n} \frac{1}{n!} \sum_{\text{sym}} [\dots [[Q^2, f_{a_1}], f_{a_2}], \dots, f_{a_n}] = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} R_n & \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-2} [Q_k, Q_{n-k}] \overleftarrow{\partial}_{a_1} \overleftarrow{\partial}_{a_2} \dots \overleftarrow{\partial}_{a_n} (-1)^{E_n} = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-2} \sum_{\text{sym}} [(f_{a_1}, \dots, f_{a_k})_Q, (f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q] (-1)^{F_{k,n}}, \\ F_{k,n} & \equiv \sum_{r=1}^{(n,k)} \varepsilon_{a_r}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

и $(n, k) \equiv n$ при k нечетных, $(n, k) \equiv k$ при k четных. Симметризованная сумма берется по всем различным порядкам с добавочными знаковыми факторами $(-1)^{E_n + \tilde{E}_n + A_n}$, где $\tilde{E}_n$ есть E_n для нового порядка и A_n возникает из переупорядочения монома $\lambda^{a_1} \dots \lambda^{a_n}$.

Подстановка выражения (3.18) в (3.14) приводит к обобщенным тождествам Якоби

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (f_{a_k}, (f_{a_1}, \dots, f_{a_{k-1}}, f_{a_{k+1}}, \dots, f_{a_n})_Q)_Q (-1)^{D_{k,n}} = \\ & = -\frac{n-2}{2} [Q, (f_{a_1}, \dots, f_{a_n})_Q] - \\ & - R_n + (-1)^{E_n} \frac{1}{n!} \sum_{\text{sym}} [\dots [[Q^2, f_{a_1}], f_{a_2}], \dots, f_{a_n}] = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где R_n есть сумма коммутаторов антискобок порядков между 2 и $n-2$, даваемая выражением (3.19). В частности, для $n=3$ мы имеем ($R_3=0$)

$$\begin{aligned} & (f_a, (f_b, f_c)_Q)_Q (-1)^{(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_c+1)} + \text{cycle}(a, b, c) = \\ & = -\frac{1}{2} [(f_a, f_b, f_c)_Q (-1)^{(\varepsilon_a+1)(\varepsilon_c+1)}, Q] - \\ & - \frac{1}{6} (-1)^{\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon_c} \left([[Q^2, f_a], f_b], f_c] (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_c} + \right. \\ & \left. + [[Q^2, f_c], f_b], f_a] (-1)^{\varepsilon_b(\varepsilon_a+\varepsilon_c)} + \text{cycle}(a, b, c) \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

что может быть переписано как (2.9).

4. ОБЫКНОВЕННЫЕ КВАНТОВЫЕ АНТИСКОВКИ

Естественно наложить такое ограничение, чтобы квантовые антисковки удовлетворяли тождеству Якоби (2.7) и правилу Лейбница (2.8). Такие антисковки мы будем называть обыкновенными квантовыми антисковками. Это требует, конечно, чтобы все квантовые антисковки высших порядков начиная с $n = 3$ исчезали. Точные условия наилучшим образом извлекаются из явных выражений (2.9) и (2.10). Из (2.10) мы находим, что квантовая антисковка (2.1) удовлетворяет правилу Лейбница (2.8), т.е.

$$(fg, h)_Q - f(g, h)_Q - (f, h)_Q g(-1)^{\varepsilon_g(\varepsilon_h+1)} = 0, \quad (4.1)$$

для двух классов операторов: класса коммутирующих операторов и класса операторов, коммутирующих с Q . Так как в последнем случае антисковка равна нулю, мы будем рассматривать только максимальные наборы коммутирующих операторов, обозначаемые далее через $\mathcal{M}$.

Тождество Якоби (2.7) выполняется, если оператор Q удовлетворяет условию

$$[f, [g, [h, Q^2]]] + \frac{1}{2}[[f, [g, [h, Q]]], Q] = 0, \quad \forall f, g, h \in \mathcal{M}. \quad (4.2)$$

(Это условие удовлетворено тривиально для класса операторов, коммутирующих с Q .) Заметим вначале, что для класса $\mathcal{M}$ коммутирующих операторов квантовая антисковка (2.1) сводится к

$$(f, g)_Q = [f, [Q, g]] = [[f, Q], g], \quad \forall f, g \in \mathcal{M}. \quad (4.3)$$

Чтобы использовать это выражение повторно, как в тождествах Якоби, нужно потребовать

$$(f, g)_Q \in \mathcal{M}, \quad \forall f, g \in \mathcal{M}, \quad (4.4)$$

что эквивалентно условию

$$[f, [g, [h, Q]]] = 0, \quad \forall f, g, h \in \mathcal{M}. \quad (4.5)$$

Однако одновременное выполнение условий (4.5) и (4.2) влечет равенство

$$[f, [g, [h, Q^2]]] = 0, \quad \forall f, g, h \in \mathcal{M}. \quad (4.6)$$

Таким образом, нетривиальные обыкновенные квантовые антисковки могут быть естественно определены для класса $\mathcal{M}$ коммутирующих операторов с помощью (4.3), где оператор Q должен удовлетворять условиям (4.5) и (4.6).

Чтобы дать явные решения, рассмотрим, как в [1, 5], суперсимметричное многообразие размерности $(2n, 2n)$ с каноническими координатами $\{x^a, x_a^*, p_a, p_a^*\}$, $a = 1, \dots, n$, с грассмановыми четностями $\varepsilon_a \equiv \varepsilon(x^a) = \varepsilon(p_a)$ и $\varepsilon(x_a^*) = \varepsilon(p_a^*) = \varepsilon_a + 1$. Их ненулевые канонические коммутационные соотношения суть

$$[x^a, p_b] = i\hbar\delta_b^a, \quad [x_a^*, p_b^*] = i\hbar\delta_a^b. \quad (4.7)$$

Пусть теперь класс $\mathcal{M}$ коммутирующих операторов образован всеми функциями от x^a и x_a^* . Тогда следующий оператор Q удовлетворяет условиям (4.5) и (4.6):

$$Q = p_a p_*^a (-1)^{\varepsilon_a}. \quad (4.8)$$

В терминах Q квантовая антискобка (2.1) принимает вид

$$(i\hbar)^{-2}(f, g)_Q = f \overleftarrow{\partial}_a \partial_*^a g - g \overleftarrow{\partial}_a \partial_*^a f (-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_g+1)}, \quad (4.9)$$

который в точности согласуется со стандартной классической антискобкой, где x^a и x_a^* — поля и антиполя [3]. Оператор Q (4.8) является нильпотентным ($Q^2 = 0$). Однако оператор Q не определяется своей антискобкой единственным образом. Фактически квантовая антискобка (4.9) получается также из оператора

$$Q = p_a p_*^a (-1)^{\varepsilon_a} + i\hbar f^a(x, x^*) p_a (-1)^{\varepsilon_a} + i\hbar f_a^*(x, x^*) p_*^a (-1)^{\varepsilon_a+1} - (i\hbar)^2 g(x, x^*) \quad (4.10)$$

для любых функций f^a , f_a^* и g коммутирующих операторов x^a и x_a^* . (Нормировка, выбранная в (4.10), удобна для приложений к БВ-квантованию.) Оператор Q (4.10) в общем случае не является нильпотентным.

В общих координатах X^A , $A = 1, \dots, 2n$, решение условия (4.5) есть

$$Q = -\frac{1}{2} E^{AB}(X) P_B P_A (-1)^{\varepsilon_B} + i\hbar F^A(X) P_A (-1)^{\varepsilon_A} - (i\hbar)^2 G(X), \quad (4.11)$$

где P_A ($\varepsilon(P_A) = \varepsilon(X^A) \equiv \varepsilon_A$) — операторы импульсов, канонически сопряженные X^A ($[X^A, P_B] = i\hbar \delta_B^A$). Чтобы удовлетворить также условию (4.6), Q^2 должен быть не более чем квадратичен по импульсам, откуда следует равенство

$$E^{AD} \partial_D E^{BC} (-1)^{(\varepsilon_A+1)(\varepsilon_C+1)} + \text{cycle}(A, B, C) = 0. \quad (4.12)$$

Подстановка оператора Q (4.11) в (2.1) дает для класса операторов, состоящего из функций от X^A , квантовую антискобку

$$(i\hbar)^{-2}(f, g)_Q = f \overleftarrow{\partial}_A E^{AB} \partial_B g, \quad \forall f, g \in \mathcal{M}, \quad (4.13)$$

где $\partial_A \equiv \partial/\partial X^A$. Легко проверить, что тождество Якоби для (4.13) требует выполнения условия (4.12) (ср. с [11]). Подобно (4.10) оператор (4.11) не является нильпотентным. (Фактически оператор (4.10) получается из (4.11) в координатах Дарбу x^a и x_a^* .) Заметим, что если Q имеет члены третьей и более высокой степени по P_A , то даже более общее условие (4.2) не допускает никаких решений, так как первый член в (4.2) включает первые производные от f, g, h , в то время как второй член включает вторые производные.

5. ОПЕРАТОРНАЯ ВЕРСИЯ БВ-КВАНТОВАНИЯ

Лагранжево БВ-квантование общих калибровочных теорий формулируется в рамках функционального интеграла. В этой формулировке важнейшую роль играют классические антисковки. Здесь мы покажем, что квантовые антисковки содержат удобные алгебраические средства для соответствующей операторной формулировки (эти результаты были приведены в [1, 6]). В такой конструкции подходящей основой являются именно обыкновенные квантовые антисковки. Поэтому мы ограничимся максимальным коммутирующим набором операторов. Такое ограничение как раз соответствует канонической поляризации, разделяющей поля и их импульсы. Операторы полей образуют в этом случае выбранный максимальный коммутирующий набор. Важнейшим ингредиентом БВ-квантования является квантовое мастер-уравнение

$$\Delta e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}} = 0, \quad (5.1)$$

где Δ – нечетный дифференциальный оператор второго порядка, $\mathcal{W}$ – мастер-действие. В рамках операторной формулировки (5.1) заменяется на уравнение

$$Q|\mathcal{W}\rangle = 0, \quad (5.2)$$

где Q есть нечетный оператор, входящий в определение квантовой антисковки. БВ-формулировка требует, чтобы оператор Q был

- 1) не более чем квадратичным по импульсам,
- 2) нильпотентным ($Q^2 = 0$),
- 3) эрмитовым,
- 4) эквивалентным в координатном представлении (картина Шредингера) не зависящему от $\hbar$ дифференциальному оператору Δ .

Первое и последнее условия требуют, чтобы Q имел вид (4.10) или (4.11) с не зависящими от $\hbar$ функциями. Исходя из определения оператора Q (4.11) мы находим общее эрмитово нильпотентное решение

$$Q \equiv -\frac{1}{2} \rho^{-1/2} P_A \rho E^{AB} P_B \rho^{-1/2} (-1)^{\varepsilon_B} - (i\hbar)^2 G(X), \quad (5.3)$$

где $\rho(X)$ есть оператор плотности меры. Оператор Q эрмитов, если ρ , X^A , G и E^{AB} эрмитовы и $P_A^\dagger = (-1)^{\varepsilon_A} P_A$. Зависимость Q от $\hbar$ выбрана так, чтобы

$$\langle X|Q|\mathcal{W}\rangle = -(i\hbar)^2 \Delta \langle X|\mathcal{W}\rangle, \quad (5.4)$$

где

$$\Delta = \Delta_0 + G(X), \quad \Delta_0 \equiv \frac{1}{2} \rho^{-1} \partial_A \circ \rho E^{AB} \partial_B (-1)^{\varepsilon_A}, \quad (5.5)$$

где, в свою очередь, X^A теперь являются классическими полями. Заметим, что $P_A = -i\hbar \rho^{-1/2} \partial_A \circ \rho^{1/2} (-1)^{\varepsilon_A}$, так как состояния $|X\rangle$ нормированы как

$$\int |X\rangle \rho(X) dX \langle X| = \mathbf{1}. \quad (5.6)$$

Наиболее общий оператор Δ , рассматривавшийся до сих пор, есть Δ_0 [11]. Мы не знаем, в какой степени может быть использован ненулевой коэффициент $G(X)$. Заметим, что нильпотентность Δ требует, чтобы Δ_0 был нильпотентным, а G удовлетворял условиям

$$\Delta_0 G = 0, \quad \Delta_0 \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_A} \rho^{-1} \left(\partial_A \rho E^{AB} \right) - G \overleftarrow{\partial}_A E^{AB} = 0. \quad (5.7)$$

Уравнения (5.1) и (5.2) будут эквивалентны, если мы выбираем

$$\langle X | \mathcal{W} \rangle = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathcal{W}(X) \right\} \Leftrightarrow | \mathcal{W} \rangle = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathcal{W}(X) \right\} \rho^{1/2} | 0 \rangle_P. \quad (5.8)$$

Отметим также нормировку $\langle X | \rho^{1/2} | 0 \rangle_P = 1$.

Статсумма Z , т.е. функциональный интеграл от экспоненты калибровочно-фиксированного действия, есть $Z = \langle \mathcal{X} | \mathcal{W} \rangle$, где $| \mathcal{W} \rangle$ – мастер-состояние, а $| \mathcal{X} \rangle$ – калибровочно-фиксирующее состояние, оба удовлетворяющие квантовому мастер-уравнению (5.2). $| \mathcal{W} \rangle$ и $| \mathcal{X} \rangle$ имеют общую форму

$$| \mathcal{W} \rangle = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathcal{W}(X) \right\} \rho^{1/2} | 0 \rangle_{P\pi}, \quad | \mathcal{X} \rangle = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \mathcal{X}^\dagger(X, \lambda) \right\} \rho^{1/2} | 0 \rangle_{P\pi}, \quad (5.9)$$

где λ^α – лагранжевы множители, а π_α – их сопряженные импульсы. Вакуумное состояние $| 0 \rangle_{P\pi} = | 0 \rangle_P \otimes | 0 \rangle_\pi$ удовлетворяет условию $P_A | 0 \rangle_{P\pi} = \pi_\alpha | 0 \rangle_{P\pi} = 0$. Используя обобщенные состояния $| X, \lambda \rangle$, удовлетворяющие соотношению полноты

$$\int | X, \lambda \rangle \rho(X) dX d\lambda \langle X, \lambda | = \mathbf{1}, \quad (5.10)$$

и $\langle X, \lambda | \rho^{1/2} | 0 \rangle_{P,\lambda} = 1$, представим статсумму $Z = \langle \mathcal{X} | \mathcal{W} \rangle$ в явном виде:

$$Z = \langle \mathcal{X} | \mathcal{W} \rangle = \int \rho(X) dX d\lambda \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\mathcal{W}(X) + \mathcal{X}(X, \lambda)] \right\}, \quad (5.11)$$

где $\mathcal{W}$ и $\mathcal{X}$ в функциональном интеграле означают мастер-действие и калибровочно-фиксирующее действие, $\langle X, \lambda | \mathcal{W}(X) \rho^{1/2} | 0 \rangle_{P,\lambda}$ и $\langle X, \lambda | \mathcal{X}(X, \lambda) \rho^{1/2} | 0 \rangle_{P,\lambda}$, соответственно, оба удовлетворяющие квантовому мастер-уравнению (5.1). Это согласуется с результатами в [11, 9]. Функциональный интеграл (5.11) инвариантен относительно антиканонического преобразования

$$\delta X^A = (X^A, -\mathcal{W} + \mathcal{X})_\mu, \quad (5.12)$$

где μ – нечетная константа. Он также инвариантен при вариациях калибровочно-фиксирующего действия $\mathcal{X}$ в соответствии с общей инвариантностью мастер-уравнения. Инфинитезимально мы имеем инвариантность относительно вариации

$$\delta \mathcal{X} = (\mathcal{X}, f) - i\hbar \Delta f, \quad (5.13)$$

где f – нечетная функция.

Чтобы проиллюстрировать описанное выше обобщенное БВ-квантование, мы приведем явное рассмотрение в координатах Дарбу x^a и x_a^* [1], которые в БВ-квантовании играют роль полей и антиполей. Нильпотентный эрмитов оператор Q в традиционном БВ-квантовании дается формулой (4.8). Отметим соотношение

$$\langle x, x^* | Q | S \rangle = -(i\hbar)^2 \Delta \langle x, x^* | S \rangle, \quad (5.14)$$

где

$$\Delta = (-1)^{\varepsilon_a} \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x_a^*} \quad (5.15)$$

есть нильпотентный оператор, хорошо известный в БВ-квантовании. Квантовое мастер-уравнение теперь имеет вид

$$Q | S \rangle = 0 \Leftrightarrow \Delta \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x, x^*) \right\} = 0, \quad (5.16)$$

если

$$| S \rangle \equiv \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x, x^*) \right\} | 0 \rangle_{pp^*}. \quad (5.17)$$

Функциональный интеграл Z от экспоненты калибровочно-фиксированного действия есть $Z = \langle \Psi | S \rangle$, где $| S \rangle$ – мастер-состояние (5.17), а $|\Psi\rangle$ – калибровочно-фиксирующее состояние, также удовлетворяющее квантовому мастер-уравнению (5.16), т.е. $Q|\Psi\rangle = 0$. В стандартном случае мы имеем явно

$$|\Psi\rangle = \exp \{ \hbar^{-2} [Q, \Psi(x)] \} | 0 \rangle_{px^*}, \quad (5.18)$$

где операторы имеют свойства эрмитовости

$$(x^a)^\dagger = x^a, \quad (x_a^*)^\dagger = -x_a^*, \quad (p_a)^\dagger = p_a (-1)^{\varepsilon_a}, \quad (p_a^*)^\dagger = p_a^* (-1)^{\varepsilon_a}, \quad \Psi^\dagger = \Psi \quad (5.19)$$

и где вакуумные состояния удовлетворяют соотношениям

$$p_a | 0 \rangle_{pp^*} = p_a^* | 0 \rangle_{pp^*} = 0, \quad p_a | 0 \rangle_{px^*} = x_a^* | 0 \rangle_{px^*} = 0, \quad Q | 0 \rangle_{pp^*} = Q | 0 \rangle_{px^*} = 0. \quad (5.20)$$

Заметим, что $S(x, x^*)$ и $\Psi(x)$ принадлежат классу коммутирующих операторов и, кроме того, $|\Psi\rangle$ удовлетворяет уравнениям

$$(x_a^* - \partial_a \Psi(x)) |\Psi\rangle = 0, \quad (p_a + p_a^* \partial_b \partial_a \Psi(x)) |\Psi\rangle = 0, \quad (5.21)$$

что фиксирует p_a и x_a^* . Явная форма калибровочно-фиксированной статсуммы теперь есть

$$\begin{aligned} Z = \langle \Psi | S \rangle &= {}_{px^*} \langle 0 | \exp \{ \hbar^{-2} [Q, \Psi(x)] \} \exp \{ i \hbar^{-1} S(x, x^*) \} | 0 \rangle_{pp^*} = \\ &= \int dx dx^* \exp \{ i \hbar^{-1} S(x, x^*) \} \delta(x_a^* - \partial_a \Psi(x)), \end{aligned} \quad (5.22)$$

где последнее равенство получено с использованием соотношения полноты²⁾

$$\int |x, x^*\rangle dx dx^* \langle x, x^*| = \int |x, p_*\rangle dx dp_* \langle x, p_*| = \mathbf{1} \quad (5.23)$$

и свойств

$${}_{pp_*}\langle 0|x, p_*\rangle = \langle x, x^*|0\rangle_{pp_*} = 1, \quad \langle p_*|x^*\rangle = (2\pi\hbar)^{-n_-/2} \hbar^{n_+/2} \exp\{-i\hbar^{-1}p_*^a x_a^*\}, \quad (5.24)$$

где n_+ (n_-) – число бозонов (фермионов) среди операторов x^a . Представление (5.22) согласуется со стандартным БВ-квантованием [3]. Независимость от калибровочно-фиксирующего оператора Ψ следует из равенства

$$\delta Z = \left\langle \Psi \left| \int_0^1 d\alpha \exp\{-\alpha\hbar^{-2}[Q, \Psi]\} \hbar^{-2}[Q, \delta\Psi] \exp\{\alpha\hbar^{-2}[Q, \Psi]\} \right| S \right\rangle = 0, \quad (5.25)$$

так как $|S\rangle$ и $|\Psi\rangle$ удовлетворяют мастер-уравнению (5.16).

6. КВАНТОВЫЕ АНТИСКОБКИ В РАМКАХ ОБЩЕГО БВФ–БРСТ-КВАНТОВАНИЯ

В гамильтоновой формулировке общих калибровочных теорий мы исходим из связей первого рода $\theta_a = 0$, где θ_a по определению являются функциями в произвольной инволюции по отношению к скобке Пуассона на рассматриваемом симплектическом многообразии, т.е.

$$\{\theta_a, \theta_b\} = U_{ab}{}^c \theta_c, \quad (6.1)$$

где структурные коэффициенты $U_{ab}{}^c$ могут быть произвольными функциями, для которых (6.1) непротиворечиво. В [13] было показано, что алгебра (6.1) на фазовом многообразии, расширенном гостами, всегда может быть вложена в одну-единственную нечетную функцию Ω – БВФ–БРСТ-заряд – таким образом, что $\{\Omega, \Omega\} = 0$ в терминах расширенной скобки Пуассона. Соответствующая квантовая теория согласованна, если отвечающий ей нечетный эрмитов оператор Ω нильпотентен, т.е. $\Omega^2 = 0$. Для конечного числа степеней свободы такое решение всегда существует и имеет вид [14] (N – ранг теории, а θ_a – эрмитовы операторы связей)

$$\Omega = \sum_{i=0}^N \Omega_i, \quad (6.2)$$

$$\Omega_0 \equiv C^a \theta_a, \quad \Omega_i \equiv \Omega_{a_1 \dots a_{i+1}}^{b_1 \dots b_{i+1}} (\mathcal{P}_{b_1} \dots \mathcal{P}_{b_i} C^{a_{i+1}} \dots C^{a_1})_{\text{Weyl}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (6.3)$$

где введены операторы гостов C^a и их сопряженные импульсы $\mathcal{P}_a$, удовлетворяющие соотношениям

$$[C^a, \mathcal{P}_b] = i\hbar \delta_b^a, \quad (C^a)^\dagger = C^a, \quad \mathcal{P}_a^\dagger = -(-1)^{\varepsilon_a} \mathcal{P}_a. \quad (6.4)$$

²⁾Заметим, что при нечетном n состояния в (5.23), (5.24) не имеют определенной грассмановой четности [12].

Их гассмановы четности имеют вид

$$\varepsilon_a \equiv \varepsilon(\theta_a), \quad \varepsilon(C^a) = \varepsilon(\mathcal{P}_a) = \varepsilon_a + 1. \quad (6.5)$$

Операторы $\Omega_{a_1 \dots a_{i+1}}^{b_i \dots b_1}$ в (6.3), чью явную форму мы здесь не приводим, содержат исходные операторы и таковы, что Ω является эрмитовым и нильпотентным (в (6.3) операторы гостов упорядочены по Вейлю, так что все Ω_i эрмитовы). Если гостам C^a приписывается гостовское число 1, а их импульсам – гостовское число -1 , то Ω в (6.2) имеет гостовское число 1. Отметим соотношение

$$[G, \Omega] = i\hbar\Omega, \quad G \equiv -\frac{1}{2}(\mathcal{P}_a C^a - C^a \mathcal{P}_a (-1)^{\varepsilon_a}), \quad (6.6)$$

где G есть оператор гостовского заряда.

БРСТ-заряд (6.2)–(6.3) есть БРСТ-заряд в минимальном секторе. Чтобы построить калибровочно-фиксированные теории наиболее общим образом, необходимо еще расширить фазовое пространство лагранжевыми множителями и антигостами. Полный БРСТ-заряд Q , который также является эрмитовым и нильпотентным, содержит Ω и дополнительные слагаемые, включающие лагранжевы множители и антигосты [14]. Фиксация калибровки осуществляется тогда посредством нечетного оператора Ψ , так что эффективный калибровочно-фиксированный гамильтониан содержит коммутатор $[Q, \Psi]$. По-видимому, всегда возможно выбрать Ψ нильпотентным таким образом, что он может быть отождествлен с ко-БРСТ-зарядом [15].

6.1. Уравнения движения в терминах антискобок. Уравнения движения в калибровочно-фиксированной теории определяются калибровочно-фиксированным гамильтонианом вида $H = \mathcal{H} + (i\hbar)^{-1}[Q, \Psi]$, где $\mathcal{H}$ коммутирует с Q . Любая калибровочная теория может быть представлена в терминах эквивалентной репараметризационно-инвариантной теории, в которой гамильтониан имеет вид $H = (i\hbar)^{-1}[Q, \Psi]$, где новый оператор Q содержит член с новым гостом, умноженным на новую связь $P_0 + \mathcal{H}$, P_0 – импульс, сопряженный времени, и где новый калибровочный фермион Ψ имеет новый соответствующий калибровочно-фиксирующий член. Тогда эффективные уравнения движения принимают вид

$$\dot{A} = (i\hbar)^{-1}[A, H] = (i\hbar)^{-2}[A, [Q, \Psi]] = (i\hbar)^{-2}(A, \Psi)_Q - (i\hbar)^{-2}\frac{1}{2}[Q, [\Psi, A]], \quad (6.7)$$

где общая квантовая антискобка определяется выражением (2.1). Из последнего равенства вытекает соотношение

$$\langle \phi | ((i\hbar)^2 \dot{A} - (A, \Psi)_Q) | \phi' \rangle = 0, \quad (6.8)$$

где $|\phi\rangle, |\phi'\rangle$ – физические состояния, аннигилируемые Q . Уравнение движения (6.7) может быть также целиком представлено в терминах антискобок, если использовать симметричную комбинацию Q - и Ψ -антискобок. Мы имеем тогда

$$(i\hbar)^2 \dot{A} = [A, [Q, \Psi]] = \frac{2}{3}((A, \Psi)_Q + (A, Q)_\Psi). \quad (6.9)$$

6.2. Квантовое мастер-уравнение, производящее для обобщенных уравнений Маурера–Картана. В [4] мы предложили квантовое мастер-уравнение, которое служило производящим для обобщенных уравнений Маурера–Картана для произвольных открытых групп. Под открытой группой мы понимаем совокупность конечных преобразований, генерируемых произвольными связями первого рода. Такие связи закодированы в эрмитовом нильпотентном операторе БВФ–БРСТ-заряда, который в минимальном секторе задается оператором Ω в (6.2), (6.3). Конечные групповые преобразования операторов определяются уравнениями Ли

$$A(\phi)\overleftarrow{\nabla}_a \equiv A(\phi)\overleftarrow{\partial}_a - (i\hbar)^{-1}[A(\phi), Y_a(\phi)] = 0, \quad (6.10)$$

где ∂_a – производные по параметрам ϕ^a , $\varepsilon(\phi^a) = \varepsilon_a$ (ϕ^a могут также рассматриваться как новый набор коммутирующих операторов). Для состояний соответствующие уравнения Ли имеют вид

$$\langle A(\phi) | \overleftarrow{D}_a \equiv \langle A(\phi) | (\overleftarrow{\partial}_a - (i\hbar)^{-1}Y_a(\phi)) = 0. \quad (6.11)$$

Операторы Y_a в обоих этих уравнениях зависят от ϕ^a и должны удовлетворять условию интегрируемости

$$Y_a\overleftarrow{\partial}_b - Y_b\overleftarrow{\partial}_a(-1)^{\varepsilon_a\varepsilon_b} = (i\hbar)^{-1}[Y_a, Y_b], \quad (6.12)$$

которое, в свою очередь, интегрируемо без дальнейших условий. Чтобы уравнения Ли (6.10) имели отношение к интегрированию квантовой инволюции, закодированной в Ω , $Y_a(\phi)$ должно иметь вид

$$Y_a(\phi) = \lambda_a^b(\phi)\theta_b(-1)^{\varepsilon_a+\varepsilon_b} + \{\text{возможные члены, зависящие от гостов}\}, \quad \lambda_a^b(0) = \delta_a^b, \quad (6.13)$$

где $\lambda_a^b(\phi)$ в общем случае являются операторами. Здесь следует заметить, что в схеме, не включающей госты, именно связи θ_a являются генераторами конечных преобразований. Однако в рамках нашего БРСТ-подхода операторы $i\hbar^{-1}[\Omega, \mathcal{P}_a] = \theta_a + \{\text{возможные члены, зависящие от гостов}\}$ как раз являются подходящими генераторами, что мотивирует форму (6.13). Здесь мы делаем еще один шаг, определяя Y_a в следующем виде:

$$Y_a(\phi) = (i\hbar)^{-1}[\Omega, \Omega_a(\phi)], \quad \varepsilon(\Omega_a) = \varepsilon_a + 1, \quad (6.14)$$

где Y_a имеет гостовское число 0, а Ω_a – операторы с гостовским числом -1 . Эта форма предполагает, что $[Y_a(\phi), \Omega] = 0$, так что если $[A(0), \Omega] = 0$, то $[A(\phi), \Omega] = 0$, т.е. БРСТ-инвариантный оператор, будучи преобразован в соответствии с (6.10), остается БРСТ-инвариантным. Уравнения (6.13) и (6.14) вместе с (6.2) и (6.3) приводят к тому, что Ω_a в (6.14) должно иметь вид

$$\Omega_a(\phi) = \lambda_a^b(\phi)\mathcal{P}_b + \{\text{возможные члены, зависящие от гостов}\}, \quad \lambda_a^b(0) = \delta_a^b. \quad (6.15)$$

Заметим, что уравнение Ли (6.10) также может быть представлено в терминах антискобок. По аналогии с (6.7) мы имеем

$$A(\phi)\overleftarrow{\partial}_a - (i\hbar)^{-2}(A, \Omega_a)\Omega - (i\hbar)^{-2}\frac{1}{2}[[A, \Omega_a], \Omega](-1)^{\varepsilon_a} = 0, \quad (6.16)$$

где введена общая квантовая антискобка, определенная в соответствии с (2.1). Условие интегрируемости (6.12) для Y_a приводит с помощью (6.14) к следующему эквивалентному уравнению для Ω_a :

$$\Omega_a \overleftarrow{\partial}_b - \Omega_b \overleftarrow{\partial}_a (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_b} = (i\hbar)^{-2} (\Omega_a, \Omega_b)_\Omega - \frac{1}{2} (i\hbar)^{-1} [\Omega_{ab}, \Omega], \quad (6.17)$$

которое также включает Ω -антискобку, входящую в (6.16). В силу формы (6.15) для Ω_a уравнение (6.17) является обобщенным уравнением Маурера–Картана для $\lambda_a^b(\phi)$. Условие интегрируемости уравнения (6.17) приводит к эквивалентному уравнению первого порядка для Ω_{ab} и т.д. Таким образом, Y_a заменяется целым набором операторов, а условие интегрируемости (6.12) для Y_a заменяется набором условий интегрируемости.

В [4] было установлено, что все эти условия интегрируемости естественно вложены в одно-единственное мастер-уравнение вида

$$(S, S)_\Delta = i\hbar[\Delta, S], \quad (6.18)$$

где Δ – обобщенный нильпотентный БВФ–БРСТ-заряд, определяемый как

$$\Delta \equiv \Omega + \eta^a \pi_a (-1)^{\varepsilon_a}, \quad \Delta^2 = 0, \quad [\phi^a, \pi_b] = i\hbar \delta_b^a, \quad (6.19)$$

где, в свою очередь, π_a – импульсы, сопряженные ϕ^a , теперь превращенные в операторы, а η^a , $\varepsilon(\eta^a) = \varepsilon_a + 1$, – новые гостовские переменные, рассматриваемые как параметры. Оператор $S(\phi, \eta)$ в мастер-уравнении (6.18) есть четный оператор, определяемый как

$$\begin{aligned} S(\phi, \eta) \equiv & G + \eta^a \Omega_a(\phi) + \frac{1}{2} \eta^b \eta^a \Omega_{ab}(\phi) (-1)^{\varepsilon_b} + \\ & + \frac{1}{6} \eta^c \eta^b \eta^a \Omega_{abc}(\phi) (-1)^{\varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_c} + \dots + \\ & \dots + \frac{1}{n!} \eta^{a_n} \dots \eta^{a_1} \Omega_{a_1 \dots a_n}(\phi) (-1)^{\varepsilon_n} + \dots, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\varepsilon_n \equiv \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \varepsilon_{a_{2k}} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \varepsilon_{a_{2k-1}} \varepsilon_{a_{2k+1}},$$

где G – оператор гостовского числа в (6.6). (В [4] ε_n было выбрано несколько иначе.) Операторы $\Omega_{a_1 \dots a_n}(\phi)$ в (6.20) обладают свойствами

$$\varepsilon(\Omega_{a_1 \dots a_n}) = \varepsilon_{a_1} + \dots + \varepsilon_{a_n} + n, \quad [G, \Omega_{a_1 \dots a_n}] = -ni\hbar \Omega_{a_1 \dots a_n}. \quad (6.21)$$

Последнее соотношение означает, что $\Omega_{a_1 \dots a_n}$ имеет гостовское число $-n$. Если мы припишем η^a гостовское число 1, то Δ имеет гостовское число 1, а S – нулевое гостовское число. Наше основное утверждение состоит в том, что операторы $\Omega_{a_1 \dots a_n}(\phi)$ в (6.20) могут быть надлежащим образом отождествлены с Ω_a , Ω_{ab} в (6.17) и всеми $\Omega_{abc} \dots$ в их условиях интегрируемости.

Антискобка $(S, S)_\Delta$ в (6.18) совпадает с антискобкой, определяемой (2.1) с Q , замененным на Δ . Таким образом, мы имеем

$$(S, S)_\Delta \equiv [[S, \Delta], S]. \quad (6.22)$$

С помощью этого соотношения легко видеть, что согласованность (6.18) требует, чтобы оператор $[\Delta, S]$ был нильпотентным. Мы имеем

$$[\Delta, (S, S)_\Delta] = 0 \Leftrightarrow [\Delta, S]^2 = 0. \quad (6.23)$$

Явный вид $[S, \Delta]$ в низших порядках по η^a следующий:

$$\begin{aligned} [S, \Delta] = & i\hbar\Omega + \eta^a [\Omega_a, \Omega] + \eta^b \eta^a \Omega_a \overleftarrow{\partial}_b i\hbar (-1)^{\varepsilon_b} + \frac{1}{2} \eta^b \eta^a [\Omega_{ab}, \Omega] (-1)^{\varepsilon_b} + \\ & + \frac{1}{2} \eta^c \eta^b \eta^a \Omega_{ab} \overleftarrow{\partial}_c i\hbar (-1)^{\varepsilon_b + \varepsilon_c} + \frac{1}{6} \eta^c \eta^b \eta^a [\Omega_{abc}, \Omega] (-1)^{\varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_c} + O(\eta^4). \end{aligned} \quad (6.24)$$

В нулевом и первом порядках по η^a мастер-уравнение (6.18) удовлетворяется тождественно. Однако во втором порядке по η^a оно дает в точности (6.17). В третьем порядке по η^a оно дает

$$\begin{aligned} \partial_a \Omega_{bc} (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_c} + \frac{1}{2} (i\hbar)^{-2} (\Omega_a, \Omega_{bc})_\Omega (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_c} + \text{cycle}(a, b, c) = \\ = - (i\hbar)^{-3} (\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c)_\Omega (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_c} - \frac{2}{3} (i\hbar)^{-1} [\Omega'_{abc}, \Omega], \\ \Omega'_{abc} \equiv \Omega_{abc} - \frac{1}{8} \{ (i\hbar)^{-1} [\Omega_{ab}, \Omega_c] (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_c} + \text{cycle}(a, b, c) \}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где введена квантовая антискобка порядка 3, определяемая (3.6) и задаваемая явно соотношением (3.9) с Q , замененным на Ω .

Сравнивая уравнение (6.25) и условие интегрируемости (6.17), мы находим полное согласие. Мы проверили также, что условие согласованности (6.23) во втором порядке по η^a дает в точности (6.12), что согласуется с (6.17), как это и должно быть. Подобным образом проверено, что (6.23) в третьем порядке по η^a приводит к условию, которое согласовано с (6.25) в точности так же, как (6.12) согласовано с (6.17).

Мастер-уравнение (6.18) генерирует в высших порядках по η^a уравнения, включающие все более высокие квантовые Ω -антискобки, определяемые (3.6), и операторы $\Omega_{abc} \dots$ со все большим числом индексов. Мы утверждаем, что эти уравнения точно согласуются с условиями интегрируемости (6.25). Для теории ранга N мы ожидаем, что существует решение вида (6.20) для мастер-уравнения (6.18), которое обрывается как раз на максимальном порядке η^N . В приложении подробно рассмотрена квазигрупповая теория ранга 1.

Мы закончим этот пункт некоторыми формулами преобразования мастер-уравнения (6.18) [6]. Определим преобразованные операторы $S(\alpha)$ и $\Delta(\alpha)$ как

$$S(\alpha) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \alpha F} S e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha F}, \quad \Delta(\alpha) \equiv e^{\frac{i}{\hbar} \alpha F} \Delta e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha F}, \quad (6.26)$$

где α – параметр, а F – произвольный четный оператор. Если S и Δ удовлетворяют мастер-уравнению (6.18), то $S(\alpha)$ и $\Delta(\alpha)$ удовлетворяют преобразованному мастер-уравнению

$$(S(\alpha), S(\alpha))_{\Delta(\alpha)} = i\hbar[\Delta(\alpha), S(\alpha)]. \quad (6.27)$$

Если F в (6.26) само удовлетворяет мастер-уравнению (6.18), т.е.

$$(F, F)_{\Delta} = i\hbar[\Delta, F], \quad (6.28)$$

то $\Delta(\alpha)$ в (6.26) редуцируется к

$$\Delta(\alpha) = \Delta + (i\hbar)^{-1}[\Delta, F](1 - e^{-\alpha}). \quad (6.29)$$

(Заметим, что (6.28) влечет $\Delta''(\alpha) + \Delta'(\alpha) = 0$.) Для $F = S$ имеем, в частности, что S удовлетворяет мастер-уравнению (6.18) с Δ , замененным на $\Delta(\alpha)$ из (6.29), где F заменен на S .

Существуют также преобразования оператора S , оставляющие Δ стабильным, для которых мастер-уравнение (6.18) остается инвариантным. Естественный автоморфизм (6.18) есть

$$S \rightarrow S' \equiv \exp\{-(i\hbar)^{-2}[\Delta, \Psi]\} S \exp\{(i\hbar)^{-2}[\Delta, \Psi]\}, \quad (6.30)$$

где Ψ – произвольный нечетный оператор. Легко видеть, что S' также удовлетворяет мастер-уравнению (6.18). Для инфинитезимальных преобразований мы имеем

$$\begin{aligned} \delta S &= (i\hbar)^{-2}[S, [\Delta, \Psi]], \\ \delta_{21} S &\equiv (\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) S = (i\hbar)^{-2}[S, [\Delta, \Psi_{21}]], \\ \Psi_{21} &= (i\hbar)^{-2}(\Psi_2, \Psi_1)_{\Delta}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Аналогично эквивалентным формам (6.7) и (6.9) общих уравнений движения имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \delta S &= (i\hbar)^{-2} \left((S, \Psi)_{\Delta} - \frac{1}{2}[\Delta, [\Psi, S]] \right) = \\ &= (i\hbar)^{-2} \frac{2}{3} ((S, \Psi)_{\Delta} + (S, \Delta)_{\Psi}). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Если преобразование (6.30) связывает любые решения мастер-уравнения (6.18), то общее решение есть

$$S = \exp\{-(i\hbar)^{-2}[\Delta, \Psi]\} G \exp\{(i\hbar)^{-2}[\Delta, \Psi]\}, \quad (6.33)$$

где оператор Ψ зависит от всех переменных (включая ϕ^a и η^a), кроме π_a . От Ψ требуется только, чтобы он имел гостовское число -1 , так как S имеет гостовское число 0 . В этом случае явная форма S (6.20) воспроизводится. Заметим, что $S = G$ есть тривиальное решение мастер-уравнения (6.18).

Следует также упомянуть о возможности распространения формализма на η -зависимые состояния и операторы, которые удовлетворяют уравнениям Ли (6.10), (6.11) с

η -зависимой связностью $\tilde{Y}_a(\phi, \eta) \equiv (i\hbar)^{-1}[\Delta, \tilde{\Omega}_a(\phi, \eta)]$, где $\tilde{\Omega}_a(\phi, \eta)$ определяется уравнением

$$S\overleftarrow{\partial}_a - (i\hbar)^{-1}[S, \tilde{Y}_a] = 0. \quad (6.34)$$

Эти η -расширенные состояния $|\tilde{A}\rangle$ и операторы $\tilde{A}$ удовлетворяют уравнениям

$$S|\tilde{A}\rangle = i\hbar \text{gh}(|A\rangle)|\tilde{A}\rangle, \quad [S, \tilde{A}] = i\hbar \text{gh}(A)\tilde{A}, \quad (6.35)$$

где $|A\rangle = |\tilde{A}\rangle|_{\eta=0}$ и $A = \tilde{A}|_{\eta=0}$. Детали будут даны в другой публикации.

7. ОБОБЩЕНИЕ НА $Sp(2)$ -СЛУЧАЙ

Существует $Sp(2)$ -расширенная версия БВ-квантования [7, 8], которая в ее наиболее общей форме называется триплектическим квантованием [9]. В данном формализме есть две обобщенные антискобки, которые называются $Sp(2)$ -антискобками. Этим скобкам также могут быть сопоставлены операторы. Квантовые $Sp(2)$ -антискобки определяются как [1, 6]

$$(f, g)_Q^a \equiv \frac{1}{2}([f, [Q^a, g]] - [g, [Q^a, f]](-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_g+1)}), \quad (7.1)$$

где Q^a — два нечетных оператора, $a, b, c, \dots = 1, 2 - Sp(2)$ -индексы, которые поднимаются (опускаются) с помощью $Sp(2)$ -инвариантной метрики ε^{ab} (ε_{ab}). Соответствующие классические антискобки удовлетворяют свойствам (2.3)–(2.8), за исключением того, что тождества Якоби справедливы после симметризации по $Sp(2)$ -индексам. Квантовые $Sp(2)$ -антискобки (7.1) удовлетворяют (2.3)–(2.6). Однако вместо тождеств Якоби имеет место равенство

$$\begin{aligned} & (f, (g, h)_Q^{\{a\}b\})_Q^{\{a\}b\}(-1)^{(\varepsilon_f+1)(\varepsilon_h+1)} + \text{cycle}(f, g, h) = \\ & = \frac{1}{6}(-1)^{\varepsilon_f+\varepsilon_g+\varepsilon_h} \left\{ \left([f, [g, [h, [Q^a, Q^b]]]] + \frac{1}{2}[[f, [g, [h, Q^{\{a\}}]], Q^{\{b\}}]] \right)(-1)^{\varepsilon_f\varepsilon_h} + \right. \\ & \quad \left. + \left([f, [h, [g, [Q^a, Q^b]]]] + \frac{1}{2}[[f, [h, [g, Q^{\{a\}}]], Q^{\{b\}}]] \right)(-1)^{\varepsilon_h(\varepsilon_f+\varepsilon_g)} \right\} + \text{cycle}(f, g, h), \end{aligned} \quad (7.2)$$

а вместо правил Лейбница имеем

$$\begin{aligned} & (fg, h)_Q^a - f(g, h)_Q^a - (f, h)_Q^a g(-1)^{\varepsilon_g(\varepsilon_h+1)} = \\ & = \frac{1}{2} \left([f, h][g, Q^a](-1)^{\varepsilon_h(\varepsilon_g+1)} + [f, Q^a][g, h](-1)^{\varepsilon_g} \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Соотношение (2.13), например, обобщается так:

$$(f, Q^{\{a\}b\}) = \frac{3}{2}[f, [Q^a, Q^b]]. \quad (7.4)$$

Квантовые $Sp(2)$ -антискобки высших порядков определяются (3.5) с Q , замененным на Q^a . Свойства (3.6)–(3.12) справедливы тогда с той же заменой. Соотношения (3.13), (3.14) справедливы с двумя $Sp(2)$ -индексами. Чтобы получить обобщенные тождества

Якоби, необходимы тождества, соответствующие (3.15). Однако, так как они включают тривиальные равенства

$$[e^{-A}Q^ae^A, e^{-A}Q^be^A] - e^{-A}[Q^a, Q^b]e^A = 0, \quad (7.5)$$

которые симметричны по $Sp(2)$ -индексам, обобщенные тождества Якоби, соответствующие (3.20), также будут симметричны по $Sp(2)$ -индексам. Соответственно рассмотрению в разделе 4, можно определить обыкновенные квантовые $Sp(2)$ -антискобки с помощью ограничения на максимальный набор коммутирующих операторов. Если эти операторы являются функциями коммутирующих операторов координат, то Q^a и $[Q^a, Q^b]$ должны быть не более чем квадратичны по импульсам, чтобы $Sp(2)$ -антискобки строго удовлетворяли тождеству Якоби и правилу Лейбница.

В рассматриваемых приложениях квантовых $Sp(2)$ -антискобок (7.1) к $Sp(2)$ -версии БВ-квантования и к $Sp(2)$ -версии БВФ–БРСТ-квантования требовалось, чтобы два нечетных оператора Q^a удовлетворяли [6] условиям

$$Q^{\{a}Q^{b\}} \equiv Q^aQ^b + Q^bQ^a \equiv [Q^a, Q^b] = 0. \quad (7.6)$$

Появление двух нильпотентных определяющих операторов естественно, так как эти $Sp(2)$ -версии прямо связаны с так называемым БРСТ–антиБРСТ-квантованием [16]. В $Sp(2)$ -версии БВ-квантования мы должны рассматривать коммутирующие операторы, которые суть функции максимальных коммутирующих наборов операторов координат. Тогда операторы Q^a не более чем квадратичны по импульсам, так что $Sp(2)$ -квантовые антискобки являются обыкновенными. В координатном представлении (картина Шредингера) Q^a будут равны двум нильпотентным дифференциальным операторам Δ^a , в точности так же, как Q было представлено Δ в разделе 5. Квантовое $Sp(2)$ -мастер-уравнение имеет вид

$$Q^a|\mathcal{W}\rangle = 0, \quad a = 1, 2. \quad (7.7)$$

В [6] было показано, что этот формализм позволяет развить операторную версию $Sp(2)$ -расширенного БВ-квантования подобно тому, как мы поступали в разделе 5 для обычного БВ-квантования. Например, было показано, что мастер-уравнения и калибровочно-фиксированная статсумма в триплектическом квантовании следуют из (7.7) по аналогии с результатами раздела 5. Было также показано, что квантовое мастер-уравнение, производящее для обобщенных уравнений Маурера–Картана, приведенное в разделе 6 для произвольных открытых групп, может быть сформулировано в терминах $Sp(2)$ -скобок (7.1) [6].

Благодарности. И.А.Б. хотел бы поблагодарить Ларса Бринка за его гостеприимство в Институте теоретической физики, Технологическом университете Чалмерса и в Университете Гетеборга. Работа И.А.Б. поддержана грантами INTAS № 96-0308, РФФИ № 99-01-00980, № 99-02-17916. И.А.Б. и Р.М. благодарны Королевской шведской академии наук за финансовую поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ

**Приложение квантового мастер-уравнения
к квазигрупповым теориям ранга 1**

Для иллюстрации формул п. 6.2 рассмотрим операторы связей θ_a , образующие алгебру теории ранга 1. В этом случае (мы рассматриваем здесь $\mathcal{CP}$ -упорядоченные операторы)

$$\Omega = C^a \theta'_a + \frac{1}{2} C^b C^a U_{ab}^c \mathcal{P}_c (-1)^{\varepsilon_c + \varepsilon_b}, \quad \theta'_a \equiv \theta_a + \frac{1}{2} i\hbar U_{ab}^b (-1)^{\varepsilon_b}. \quad (\text{П.1})$$

Нильпотентность требует выполнения условий

$$\begin{aligned} [\theta'_a, \theta'_b] &= i\hbar U_{ab}^c \theta'_c, \\ \left(i\hbar U_{ab}^d U_{dc}^e + [U_{ab}^e, \theta'_c] (-1)^{\varepsilon_c \varepsilon_e} \right) (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_c} + \text{cycle}(a, b, c) &= 0, \\ (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_c} \left([U_{ab}^e, U_{cd}^f] (-1)^{\varepsilon_e (\varepsilon_c + \varepsilon_d)} - [U_{ab}^f, U_{cd}^e] (-1)^{\varepsilon_f (\varepsilon_c + \varepsilon_d) + \varepsilon_e \varepsilon_f} \right) + \text{cycle}(a, b, c) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

последнее из которых заведомо выполняется, если

$$[U_{ab}^c, U_{de}^f] = 0, \quad [[\theta_d, U_{ab}^c], U_{ef}^g] = 0, \quad (\text{П.3})$$

что соответствует квазигруппам [17]. В этом случае Ω_a могут быть выбраны в виде

$$\Omega_a(\phi) = \lambda_a^b(\phi) \mathcal{P}_b, \quad \lambda_a^b(0) = \delta_a^b, \quad (\text{П.4})$$

где предполагается, что

$$[\lambda_a^b, \lambda_c^d] = 0 \Rightarrow [\Omega_a, \Omega_b] = 0. \quad (\text{П.5})$$

Квантовая Ω -антискобка тогда имеет вид

$$\begin{aligned} (\Omega_a, \Omega_b)_\Omega &= [\Omega_a, [\Omega, \Omega_b]] = -(i\hbar)^2 \lambda_a^f \lambda_b^e U_{ef}^d \mathcal{P}_d (-1)^{\varepsilon_d + \varepsilon_e + \varepsilon_f + \varepsilon_b \varepsilon_f} + \\ &+ i\hbar \left(\lambda_a^c [\theta'_c, \lambda_b^d] - \lambda_b^c [\theta'_c, \lambda_a^d] (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_b} \right) \mathcal{P}_d (-1)^{\varepsilon_c} - \\ &- i\hbar \left(\lambda_a^f C^e [U_{ef}^c, \lambda_b^d] (-1)^{\varepsilon_b (\varepsilon_c + 1)} - \lambda_b^f C^e [U_{ef}^c, \lambda_a^d] (-1)^{\varepsilon_a (\varepsilon_c + 1) + \varepsilon_a \varepsilon_b} \right) \mathcal{P}_d \mathcal{P}_c - \\ &- C^e [[\theta'_e, \lambda_b^c], \lambda_a^d] \mathcal{P}_d \mathcal{P}_c (-1)^{(\varepsilon_a + 1)(\varepsilon_b + \varepsilon_c + 1)} - \\ &- \frac{1}{2} C^f C^e [[U_{ef}^c, \lambda_b^d], \lambda_a^g] \mathcal{P}_g \mathcal{P}_d \mathcal{P}_c (-1)^{\varepsilon_c + \varepsilon_f + (\varepsilon_a + 1)(\varepsilon_b + \varepsilon_c + \varepsilon_d) + (\varepsilon_b + 1)(\varepsilon_c + 1)}. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Если мы также потребуем, чтобы выполнялось

$$(\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c)_\Omega = 0 \Leftrightarrow [(\Omega_a, \Omega_b)_\Omega, \Omega_c] = 0, \quad (\text{П.7})$$

то $(\Omega_a, \Omega_b)_\Omega$ в (П.6) будет удовлетворять тождествам Якоби, что обеспечивает интегрируемость уравнения (6.17) при $\Omega_{ab} = 0$. Условие (П.7) выполняется, если

$$[\lambda_a^b, U_{de}^c] = 0, \quad [\lambda_a^b, [\lambda_c^d, \theta_e]] = 0. \quad (\text{П.8})$$

Уравнение (6.17) теперь может быть записано в виде

$$\partial_a \tilde{\lambda}_b^c - \partial_b \tilde{\lambda}_a^c (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_b} = \tilde{\lambda}_a^e \tilde{\lambda}_b^d \tilde{U}_{de}^c (-1)^{\varepsilon_b \varepsilon_e + \varepsilon_c + \varepsilon_d + \varepsilon_e}, \quad (\text{П.9})$$

где $\tilde{\lambda}_a^b \equiv V \lambda_a^b V^{-1}$, $\tilde{U}_{ab}^c \equiv V U_{ab}^c V^{-1}$, а оператор $V(\phi)$ определяется уравнением

$$i\hbar \partial_a V = V \lambda_a^b \theta'_b (-1)^{\varepsilon_b}. \quad (\text{П.10})$$

Условие (П.7) и $\Omega_{ab} = 0$ обращают все дальнейшие условия интегрируемости в тождественные нули. Можно также заметить, что

$$\begin{aligned} Y_a(\phi) &= (i\hbar)^{-1} [\Omega, \Omega_a] = \lambda_a^b \theta'_b (-1)^{\varepsilon_a + \varepsilon_b} + \\ &+ \lambda_a^b C^d U_{db}^c \mathcal{P}_c (-1)^{\varepsilon_a + \varepsilon_c} + (i\hbar)^{-1} C^b [\theta_b, \lambda_a^c] \mathcal{P}_c. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Список литературы

- [1] *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Phys. Lett. B. 1998. V. 434. P. 312.
- [2] *J. A. Schouten.* Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A, Proceedings. 1940. V. 2. P. 449; On the differential operators of first order in tensor calculus. In: Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Italy, Sept. 20–26, 1953. Rome: Edizioni Cremonese delle Casa Editrice Perrella, 1954. P. 1; *C. Buttin.* C. r. Acad. Sci. Paris. 1969. V. 269. P. A87; *J. Zinn-Justin.* Renormalization of gauge theories. In: Trends in Elementary Particle Theory. Lecture Notes in Phys. V. 37. Eds. H. Rollnik and K. Dietz. Berlin: Springer-Verlag, 1975. P. 2; *E. Witten.* Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 487.
- [3] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27; Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2567.
- [4] *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Phys. Lett. B. 1998. V. 441. P. 243.
- [5] *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Dualities between Poisson brackets and antibrackets, hep-th/9809210 (to be published in Int. J. Mod. Phys. A.).
- [6] *I. A. Batalin, R. Marnelius,* Quantum $Sp(2)$ -antibrackets and open groups, hep-th/9809208 (to be published in Nucl. Phys. B).
- [7] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1487; V. 32. P. 532; P. 2513.
- [8] *C. M. Hull.* Int. J. Mod. Phys. A. 1990. V. 5. P. 1871; *M. Henneaux.* Phys. Lett. B. 1992. V. 282. P. 372; *G. Barnich, R. Constantinescu, P. Grégoire.* Phys. Lett. B. 1992. V. 293. P. 353; *P. Grégoire, M. Henneaux.* J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 6073; *P. H. Damgaard, F. De Jonghe.* Phys. Lett. B. 1993. V. 305. P. 59.
- [9] *I. A. Batalin, R. Marnelius, A. M. Semikhatov.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 446. P. 249; *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 465. P. 521.
- [10] *J.-L. Koszul.* Astérisque. 1985. P. 257; *F. Akman.* On some generalizations of Batalin–Vilkovisky algebras, q-alg/9506027; *K. Bering, P. H. Damgaard, J. Alfaro.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 478. P. 459; *I. A. Batalin, K. Bering, P. H. Damgaard.* Phys. Lett. B. 1996. V. 389. P. 673.
- [11] *I. A. Batalin, I. V. Tyutin.* Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 2333.
- [12] *R. Marnelius.* Int. J. Mod. Phys. A. 1990. V. 5. P. 329.
- [13] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1977. V. 69. P. 309; *E. S. Fradkin, T. E. Fradkina.* Phys. Lett. B. 1978. V. 72. P. 343; *I. A. Batalin, E. S. Fradkin.* Phys. Lett. B. 1983. V. 122. P. 157.
- [14] *I. A. Batalin, E. S. Fradkin.* Phys. Lett. B. 1983. V. 128. P. 303; Riv. Nuovo Cim. 1986. V. 9. P. 1; Ann. Inst. Henri Poincaré. 1988. V. 49. P. 145.
- [15] *G. Fülöp, R. Marnelius.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 456. P. 442; *R. Marnelius, N. Sandström.* Basics of BRST quantization, hep-th/9810125.
- [16] *G. Curci, R. Ferrari.* Phys. Lett. B. 1976. V. 63. P. 91; *I. Ojima.* Progr. Theor. Phys. Lett. 1980. V. 64. P. 625; *S. Hwang.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 231. P. 386.
- [17] *I. A. Batalin.* J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1837.

Поступила в редакцию 31.V.1999 г.