Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников, Нелокальные гидродинамические уравнения и преобразование БГКИ-иерархии для твердых сфер, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 3, 394–399

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 07:03:15

© 1999 г. Н. Г. Иноземцева*, Б. И. Садовников*

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ББГКИ-ИЕРАРХИИ ДЛЯ ТВЕРДЫХ СФЕР

На основе бесконечной цепочки уравнений для функций распределения в случае ББГКИ-иерархии исследуется вопрос получения кинетического уравнения для классических систем твердых сфер. Хорошо известно, что гипотеза о полной синхронизации всех распределений ведет к некоторым трудностям при описании “хвостов” автокорреляционных функций и других корреляционных эффектов при средних и высоких плотностях. Показано, как можно избежать этих трудностей с помощью сохранения явного вида зависящих от времени динамических корреляций в схеме ББГКИ-замыкания.

Проблема точного математического решения кинетического уравнения Больцмана с самого начала века притягивала к себе умы лучших физиков и математиков. Н. Н. Боголюбов был одним из первых, кто внес реальный вклад в ее решение. В своей монографии [1] он предложил в качестве основополагающей идеи рассматривать динамическую многочастичную задачу с точки зрения бесконечной системы редуцированных функций распределения (названной впоследствии ББГКИ-иерархией), что эквивалентно в термодинамическом пределе уравнению Лиувилля. Более того, он предложил регулярную схему замыкания этой бесконечной системы, используя идею об ослабленных многочастичных корреляциях и синхронизации всех высших функций распределения с первой. Данная схема аналогична разложению по малому параметру $\alpha = na^3$, где n – плотность и a – характерный размер области эффективного двухчастичного взаимодействия.

Будучи достаточно ясной с физической точки зрения, эта схема позволяет получить классическое уравнение Больцмана в низшем порядке по α и поставить вопрос о вычислении очень сложных поправок более высокого порядка. Главная сложность при этом состоит в необходимости трактовки поведения $(l + 1)$ -частичных комплексов для получения решения в 1-м порядке.

Система твердых сфер особенно удобна для этих целей как наиболее простая с точки зрения двухчастичной динамики [2]. Во втором порядке по α соответствующие вычисления были проведены Чо и Уленбеком [3]. Много позже, однако, при изучении поправок третьего порядка было обнаружено, что некоторые члены в них являются расходящимися [4]. Использование методов численного моделирования позволило установить, что скоростные автокорреляционные функции в достаточно плотных системах затухают не-

*Московский государственный университет, Москва, Россия

ожиданно медленно [5]. Все это подтверждает гипотезу о важной роли дальнедействующих динамических корреляций, которые не принимались в расчет при построении оригинальной первоначальной теории Боголюбова. Позднее данное допущение было подтверждено при исследовании свойств достаточно плотных систем твердых сфер и дисков в гидродинамическом режиме.

В середине восьмидесятых Боголюбов возвратился к этой старой проблеме и сформулировал новую, достаточно парадоксальную схему приближенного замыкания ББГКИ-иерархии для твердых сфер. Точкой отсчета при этом была бесконечная ББГКИ-система уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L(1)\right)f_1(t, x_1) = n \int dx_2 \tilde{T}(1, 2)f_2(t, x_1, x_2), \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L(1, 2)\right)f_2(t, x_1, x_2) = n \int dx_3 [\tilde{T}(1, 3) + \tilde{T}(2, 3)]f_3(t, x_1, x_2, x_3), \quad (2)$$

где

$$x_j = (\vec{r}_j, \vec{v}_j), \quad L(j) = \vec{v}_j \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j}, \quad L(1, 2) = L(1) + L(2) - \tilde{T}(1, 2)$$

и $\tilde{T}(i, j)$ – оператор парных столкновений,

$$\tilde{T}(i, j) = a^2 \int_{(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{\sigma} > 0} d\sigma (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{\sigma} [\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j - a\vec{\sigma}) b_{\vec{\sigma}}^{(i, j)} - \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j + a\vec{\sigma})]. \quad (3)$$

Оператор b действует на скорости, изменяя их в процессе парных столкновений,

$$\vec{v}_i^* = \vec{v}_i - \vec{\sigma}(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{\sigma}, \quad \vec{v}_j^* = \vec{v}_j + \vec{\sigma}(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{\sigma}.$$

Кластерное разложение ББГКИ-схемы линеаризует условие ослабления корреляций,

$$f_2(t, 1, 2) = f_1(t, 1)f_1(t, 2) + g_2(t, 1, 2),$$

$$f_3(t, 1, 2, 3) = f_1(t, 1)f_2(t, 2)f_3(t, 3) + \sum_{i=1; j>k; k \neq i}^3 f_1(t, i)g_2(t, j, k) + g_3(t, 1, 2, 3),$$

но при этом делает систему нелинейной. Боголюбов [6] отметил, что дальние динамические корреляции появляются, если пренебречь слагаемым с g_3 в соответствующих уравнениях. В этом случае получается замкнутая, но нелинейная система двух уравнений для f_1 и g_2 . Более того, оказывается, что в низшем порядке по α можно опустить оператор столкновений в левой части уравнения (2). В результате система приобретает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L(1)\right)f_1(t, x_1) = n \int dx_2 \tilde{T}(1, 2)[f_1(t, x_1)f_1(t, x_2) + g_2(t, x_1, x_2)], \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(t, 1) + \mathcal{L}(t, 2)\right)g_2(t, x_1, x_2) = \tilde{T}(1, 2)f_1(t, x_1)f_1(t, x_2), \quad (5)$$

где

$$\mathcal{L}(t, i)\psi(x_i) = L(i)\psi(x_i) = n \int dx_3 \tilde{T}(i, 3)[f_1(t, x_i)\psi(x_3) + f_1(t, x_3)\psi(x_i)]. \quad (6)$$

Можно заметить, что система (4), (5) сильно нелинейна. В приближении $g_2(t, x_1, x_2) = 0$ мы получаем обычное уравнение Больцмана–Энскога. Позднее было показано, что система (4), (5) при первоначальном условии $g_2(t, x_1, x_2) = 0$ после исключения g_2 из выражения (4) с помощью (5) должна рассматриваться как нелокальное кинетическое уравнение, содержащее T -упорядочение некоммутирующих, зависящих от времени операторов [7],

$$g_2(t, x_1, x_2) = \int_0^t Q(t)Q^{-1}(\tau)\tilde{T}(1, 2)f_1(\tau, x_1)f_1(\tau, x_2) d\tau, \quad (7)$$

$$Q(t) = T \exp\left(\int_0^t (\mathcal{L}(\tau, 1) + \mathcal{L}(\tau, 2)) d\tau\right),$$

где T означает хронологическое упорядочение.

В общем случае достаточно сложно анализировать свойства этого уравнения. Однако реально оказывается важным исследовать только роль дальних динамических корреляций. Для этой цели наличия информации о поведении решений в гидродинамическом режиме вполне достаточно.

Обычная схема построения гидродинамического приближения в системе (4), (5) ведет, как было показано в работе [8], к расходимости на стадии вычислений коэффициентов Барнета и, таким образом, результата не дает. Здесь мы выберем другой метод, основанный на использовании формального гомогенного параметра μ , добавленного к слагаемым в (4), (5), содержащим временные и пространственные производные,

$$\mu\left(\frac{\partial f_1(t, 1)}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} f_1(t, 1)\right) = n \int dx_2 \tilde{T}(1, 2)[f_1(t, 1)f_1(t, 2) + g_2(t, 1, 2)], \quad (8)$$

$$\mu\left(\frac{\partial g_2(t, 1, 2)}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{R}} g_2(t, 1, 2)\right) + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} g_2(t, 1, 2) =$$

$$= n \sum_{i=1}^2 \int dx_3 \tilde{T}(i, 3)[f_1(t, i)g_2(t, 3-i, 3) + f_1(t, 3)g_2(t, 1, 2)] +$$

$$+ T(1, 2)f_1(t, 1)f_1(t, 2), \quad (9)$$

$$\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad \vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Когда $\mu = 0$, решение уравнений (8), (9) дается выражением $f_1(1) = f_M(1)$, $g_2(1, 2) = 0$, где $f_M(1)$ – равновесная функция распределения. Следовательно, можно получить приближенное решение при $\mu \neq 0$, $\mu \ll 1$ в виде

$$f_1(t, 1) = f_M(t, 1)(1 + \mu\phi_1(t, 1 | \mu)), \quad (10)$$

$$g_2(t, 1, 2) = f_M(t, \vec{\xi}_1, \vec{v}_1)f_M(t, \vec{\xi}_2, \vec{v}_2)\mu\psi_1(t, 1, 2 | \mu),$$

где $\vec{\xi}_{1,2} = \vec{R} \pm \mu \frac{\vec{\rho}}{2}$ и

$$f_M(t, 1) = \rho(\vec{r}_1, t) \left(\frac{m}{2\pi\theta(\vec{r}_1, t)}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(\vec{v}_1 - \vec{u}(\vec{r}_1, t))^2}{2\theta(\vec{r}_1, t)}\right\}, \quad (11)$$

а ρ , θ , $\vec{u}$ – соответственно плотность, температура и макроскопическая скорость вблизи положения равновесия.

Эти функции, как это следует из (4), (5), подчиняются следующим “законам сохранения”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\rho \vec{u}) &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right) u_j &= - \frac{\partial p_{jk}}{\partial r_k}, \\ \frac{3}{2} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial r_k} \right) \theta &= - \left(p_{jk} \left(\frac{\partial u_j}{\partial r_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r_j} \right) + \frac{\partial q_k}{\partial r_k} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} p_{jk} &= \int (v_i - u_i)(v_k - u_k) f_1(t, 1) d\vec{v}_1, \\ q_i &= \frac{1}{2} \int (v_i - u_i)(v_k - u_k)^2 f_1(t, 1) d\vec{v}_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Проблема построения гидродинамических уравнений состоит в нахождении приближенного решения уравнений (8), (9) в форме (10) и в вычислении интегралов, стоящих в правой части выражений (13). После подстановки (10) в (8), учитывая соотношение $\tilde{T}(i, j) f_M(t, i) f_M(t, j) = f_M(t, i) f_M(t, j) \tilde{T}(i, j)$, получаем

$$\begin{aligned} [f_M(t, 1)]^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \right] f_M(t, 1) &= \\ = n \Lambda(1, \vec{r}_1) \phi_1(t, 1) + n \int d\vec{v}_2 f_M(\vec{r}_1, \vec{v}_2) T(1, 2) \psi_1(t, \vec{r}_1, 0, \vec{v}_1, \vec{v}_2), \end{aligned} \quad (14)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \psi_1(t, \vec{R}, \vec{\rho}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) &= \psi_1(t, 1, 2 | \mu), \quad \tilde{T}(i, j) = T(i, j) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \\ \Lambda(i, \vec{\xi}) Y(\vec{v}_i) &= \int d\vec{v}_3 f_M(\vec{\xi}, \vec{v}_3) T(i, 3) [Y(\vec{v}_i) + Y(\vec{v}_3)], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (14) не содержит явной зависимости от параметра μ . Второе уравнение соответствующей системы приобретает вид

$$\begin{aligned} \left[\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \right) + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} + \mu L(t, \vec{R}, \vec{\rho}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) - \right. \\ \left. - n(\Lambda(1, \vec{\xi}_1) + \Lambda(2, \vec{\xi}_2)) \right] \psi_1(t, \vec{R}, \vec{\rho}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \\ = \delta(\vec{\rho}) T(1, 2) [\phi_1(t, \vec{R}, \vec{v}_1) + \phi_1(t, \vec{R}, \vec{v}_2)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь мы использовали обозначение

$$L(t, \vec{R}, \vec{\rho}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{R}} + \mu^{-1} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} \right] \ln f_M(\vec{\xi}_1, \vec{v}_1) f_M(\vec{\xi}_2, \vec{v}_2).$$

Оставляя в уравнении (15) слагаемые нулевого и первого порядков по μ , находим

$$\begin{aligned} \left\{ (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} - n(\Lambda(1, \vec{R}) + \Lambda(2, \vec{R})) + \mu \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{R}} - n \frac{\vec{\rho}}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\partial \Lambda(1, \vec{R})}{\partial \vec{R}} - \frac{\partial \Lambda(2, \vec{R})}{\partial \vec{R}} \right) + L_0 \right] \right\} \psi_1(t, \vec{R}, \rho, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \\ = \delta(\rho) T(1, 2) [\phi_1(t, \vec{R}, \vec{v}_1) + \phi_1(t, \vec{R}, \vec{v}_2)], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$L_0 = \sum_{i=1}^2 [f_M(\vec{R}, \vec{v}_i)]^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_i \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \right] f_M(\vec{R}, \vec{v}_i),$$

$$\frac{\partial \Lambda(1, \vec{R})}{\partial \vec{R}} Y(\vec{v}_1) = \int d\vec{v}_3 \frac{\partial f_M(\vec{R}, \vec{v}_3)}{\partial \vec{R}} T(1, 3) [Y(\vec{v}_1) + Y(\vec{v}_3)].$$

Выражая в (14), (16) слагаемые $\partial f_M / \partial t$ с помощью гидродинамических уравнений нулевого порядка (что соответствует $p_{ik} = m^{-1} \theta \delta_{ik}$, $\vec{q} = 0$ в (12)), получаем

$$n\Lambda(1, \vec{r})\phi_1(t, \vec{r}, \vec{v}_1) + n \int d\vec{v}_2 f_M(\vec{r}, \vec{v}_2) T(1, 2) \psi_1(t, \vec{r}, 0, \vec{v}_1, \vec{v}_2) =$$

$$= (2\theta)^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial r_k} A_k(\vec{V}_1) + \frac{m}{\theta} S_{ik} B_{ik}(\vec{V}_1), \quad (17)$$

$$\left[\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{R}} - n \frac{\vec{\rho}}{2} \left(\frac{\partial \Lambda(1, \vec{R})}{\partial \vec{R}} - \frac{\partial \Lambda(2, \vec{R})}{\partial \vec{R}} \right) + L_0 \right) + \right.$$

$$\left. + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} - n(\Lambda(1, \vec{R}) + \Lambda(2, \vec{R})) \right] \psi_1(t, \vec{R}, \vec{\rho}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) =$$

$$= \delta(\vec{\rho}) T(1, 2) [\phi_1(t, \vec{R}, \vec{v}_1) + \phi_1(t, \vec{R}, \vec{v}_2)], \quad (18)$$

где

$$L_0 = (2\theta)^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial r_k} \sum_{\alpha=1}^2 A_k(\vec{V}_\alpha) + \frac{m}{\theta} S_{ik} \sum_{\alpha=1}^2 B_{ik}(\vec{V}_\alpha),$$

$$A_k(\vec{V}_\alpha) = V_{k\alpha} (m\theta^{-1} \vec{V}_\alpha^2 - 5), \quad B_{ik}(\vec{V}_\alpha) = V_{i\alpha} V_{k\alpha} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \vec{V}_\alpha^2,$$

$$V_\alpha = v_\alpha - u_\alpha(\vec{r}, t), \quad S_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial r_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r_i}.$$

Заметим, что система (17), (18) линейна. Если пренебречь слагаемым, линейным по μ в уравнении (18), то его решение будет содержать расходимости [8]. Оставляя это слагаемое, решение уравнения (18) можно записать в виде

$$\psi_1(t, \vec{R}, \vec{\rho}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mu^{-1} \int_0^t \hat{Q}(t, \mu) \hat{Q}^{-1}(\tau, \mu) \delta(\vec{\rho}) T(1, 2) [\phi_1(t, \vec{R}, \vec{v}_1) + \phi_1(t, \vec{R}, \vec{v}_2)] d\tau,$$

где

$$\hat{Q}(t, \mu) = T \exp \int_0^t \left\{ -\frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{R}} - L_0 - n \frac{\vec{\rho}}{2} \left(\frac{\partial \Lambda(1, \vec{R})}{\partial \vec{R}} - \frac{\partial \Lambda(2, \vec{R})}{\partial \vec{R}} \right) + \right.$$

$$\left. + \mu^{-1}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{\partial}{\partial \vec{\rho}} - n(\Lambda(1, \vec{R}) + \Lambda(2, \vec{R})) \right\} d\tau. \quad (19)$$

Отметим, что все операторы и слагаемое L_0 в выражении (19) должны быть взяты при $t = \tau$.

Теперь нетрудно получить решение уравнения (17):

$$\phi_1(t, \vec{r}, \vec{v}_1) = \frac{1}{n(\Lambda_0(1, \vec{r}) + \hat{Z})} \left[(2\theta)^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial r_k} A_k(\vec{V}_1) + \frac{m}{\theta} S_{ik} B_{ik}(\vec{V}_1) \right], \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{Z}Y(t, \vec{r}, \vec{v}_1) = \mu^{-1} \int d\vec{v}_2 f_M(\vec{r}, \vec{v}_2) T(1, 2) \int_0^t \hat{Q}(t, \mu) \hat{Q}^{-1}(\tau, \mu) \times \\ \times \delta(\vec{\rho}) T(1, 2) [Y(\tau, \vec{r}, \vec{v}_1) + Y(\tau, \vec{r}, \vec{v}_2)] d\tau \Big|_{\vec{\rho}=0}. \end{aligned}$$

На последней стадии решения необходимо выбрать главное слагаемое по μ при $\mu \rightarrow 0$, отбросить остальные слагаемые более низких порядков и положить $\mu = 1$. Данная процедура требует нахождения всех интегралов в выражениях (19), (20), включая хронологически упорядоченные интегралы, которые тяжело поддаются вычислению. Тем не менее в простейших случаях типа линейаризованных гидродинамических уравнений данный метод позволяет получить много полезных результатов, таких как неаналитическая зависимость гидродинамических частот от волнового вектора и т.д. (см., например, работу [8]).

В заключение хотелось бы еще раз подчеркнуть, что оригинальная гипотеза Боголюбова [1], подтверждая пригодность кинетического уравнения Больцмана в приближении малой плотности, не описывает дальние динамические корреляции, вызванные сильно скоррелированными многочастичными взаимодействиями. Это оказывается возможным сделать, лишь используя более сложный в техническом отношении способ редуцирования ББГКИ-иерархии, предложенный Боголюбовым много позже и примененный в данной работе для построения нелокальных гидродинамических уравнений, которые не содержат специфических расходимостей.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов*. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
- [2] *M. H. Ernst et al.* Physica. 1969. V. 45. P. 127.
- [3] *С. Чо, Дж. Уленбек*. Кинетическая теория явлений в плотных газах. Доп-е в кн.: Дж. Уленбек, Дж. Форд. Лекции по статистической механике. М.: Мир, 1965. С. 189–280.
- [4] *J. R. Dorfman, E. G. D. Cohen*. Phys. Lett. 1965. V. 16. P. 124; J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 282.
- [5] *B. J. Alder, T. E. Wainwright*. Phys. Rev. Lett. 1967. V. 18. P. 988.
- [6] *Н. Н. Боголюбов*. Кинетические уравнения и функции Грина в статистической механике. В сб.: Международный симпозиум по избранным проблемам в статистической механике. JINR D17-11490. Дубна: ОИЯИ, 1978. С. 7.
- [7] *Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников*. Обобщенная гидродинамика и процессы переноса. В сб.: III Международный симпозиум по избранным проблемам в статистической механике. Т. 1. JINR D17-84-850. Дубна: ОИЯИ, 1985. С. 310.
- [8] *Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников*. ТМФ. 1982. Т. 51. С. 142.

Поступила в редакцию 25.III.1999 г.