Общероссийский математический портал

Ю. В. Новожилов, В. Ю. Новожилов, Работы Владимира Александровича Фока по квантовой теории (К столетию со дня рождения), *ТМФ*, 1999, том 120, номер 3, 400–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:41:04

© 1999 г. Ю. В. Новожилов*, В. Ю. Новожилов*

РАБОТЫ ВЛАДИМИРА АЛЕКСАНДРОВИЧА
ФОКА ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ¹⁾
(К столетию со дня рождения)

Дан краткий обзор вклада В. А. Фока в развитие квантовой теории.

1. ВВЕДЕНИЕ

Научная деятельность Владимира Александровича Фока охватывала широкий круг проблем теоретической и математической физики, а также прикладной физики и математики. Наиболее значителен вклад Фока в квантовую физику. Первая мировая война задержала начало научной деятельности молодого Фока. Включившись в работу по построению квантовой физики несколькими годами позднее первопроходцев де Бройля, Гейзенберга, Шредингера и Дирака, Фок сумел сразу же выдвинуться в число ведущих теоретиков мира и открыть такие подходы к новым явлениям и методы расчета, которые сохраняют значение и сейчас. Его видение физических процессов и описывающего их математического аппарата с базисными понятиями было удивительно и опережало развитие физики на десятилетия. Подход Фока при исследовании ряда задач можно описать словами самого Владимира Александровича, сказанными по поводу работ Дирака: "... автор строит теорию по методу "математической гипотезы": сперва вводится математический аппарат, а затем для него подыскивается физическое толкование". Иногда такие принципы даже мешали популярности работ Фока среди тех, кто привык действовать по готовым рецептам и не мог воспринимать новое, выходящее за рамки стандартных идей.

Место работ Фока в современной физике легче всего объяснить, если проследить историю ее развития.

Годы 1923–1927 в создании квантовой теории были критическими. К этому времени накопился достаточный экспериментальный материал, который не мог быть объяснен теорией Бора, его принципом соответствия, оболочечной моделью атома и представлениями о вероятностях переходов спонтанного и вынужденного излучений Эйнштейна. Аномальный эффект Зеемана, связанный с неизвестным еще тогда спином, вместе с

¹⁾ Статья написана по заказу Редколлегии.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

явлениями, понятыми позже с помощью принципа запрета и представления о дуализме “частица-волна”, создавали физическую картину, трудную для объяснения в рамках одной теории. И действительно квантовая теория была построена лишь после того, как сначала были найдены три ключа к объяснению опытов: дуализм, принцип запрета и спин. Де Бройль [1] первым понял в 1925 г., что в основе вещей лежат “волны материи”. В том же году Паули [2] опубликовал принцип запрета, а Гейзенберг [3] сформулировал матричную механику, развитую в работах Борна и Йордана [4] и Борна, Гейзенберга и Йордана [5]. Идеи де Бройля были развиты и превращены в волновую механику Шредингером, четыре сообщения которого появились в 1926 г. в журнале *Annalen der Physik* [6] под общим заглавием “Квантование как проблема собственных значений” (*Quantisierung als Eigenwertproblem*).

2. ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ФОКА

В своей первой работе по квантовой механике [7], которую Владимир Александрович отправил в журнал через неделю после получения журнала со статьей Шредингера, он обобщает уравнение Шредингера на случай магнитного поля и в качестве приложения выводит формулу для нормального расщепления уровней в магнитном поле. Кроме того, в этой статье Фок находит расщепление уровней водородного атома в электрическом поле. Во второй работе [8] он дает релятивистское обобщение уравнения Шредингера для частицы в электромагнитном поле, а также записывает его в случае общей теории относительности. Клейн [9] публикует свое обобщение ранее Фока, хотя статья последнего была сдана в печать до появления статьи Клейна. Затем уже после статьи Фока появляется статья Гордона [10] с релятивистским уравнением для свободной частицы. Тем не менее во многих учебниках уравнение для частицы со спином нуль именуется не уравнением Клейна–Фока, а уравнением Клейна–Гордона.

Рассмотрим основные этапы этой работы. Фок находит пятимерную формулировку закона движения частицы как в классической, так и в квантовой физике. Он вводит пятимерное пространство с метрикой

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu - \frac{e^2}{m^2 c^4} (A_\nu dx_\nu + du)^2,$$

где A_ν – векторный потенциал, а u – дополнительная координата. Метрика зависит от отношения заряда к массе e/m . В классической физике траектория заряженной частицы есть нулевая геодезическая линия $d\sigma = 0$ в этом пространстве. Функция действия S , задающая такую траекторию, имеет равный нулю квадрат градиента в пятимерном пространстве. Обычная функция действия W получается из S выделением дополнительной координаты

$$S = \frac{e}{c} u + W.$$

Важный вывод состоит в том, что уравнения в пятимерной формулировке инвариантны по отношению к преобразованиям

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}' + \text{grad } f, \\ \Phi &= \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \\ u &= u' - f, \end{aligned}$$

которые Фок называет градиентными [11].

Квантовые закономерности действуют в пространстве с той же метрикой, что и классические. Фок получил квантовое волновое уравнение для частицы со спином нуль как уравнение Даламбера для волновой функции ψ в пятимерном пространстве

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu} \right) - 2A^\nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial x_\nu} + \left(A_\nu A^\nu - \frac{m^2 c^4}{e^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 u} = 0.$$

Переходя к четырехмерному пространству и выделяя зависимость от u в волновой функции Ψ :

$$\Psi = e^{i \frac{e}{\hbar c} u} \psi,$$

где четырехмерная волновая функция ψ от u не зависит, получаем уравнение Клейна-Фока для заряженной частицы со спином нуль в искривленном пространстве. Фок устанавливает закон преобразования волновой функции ψ при градиентном преобразовании

$$\psi' = e^{-i \frac{e}{\hbar c} f} \psi.$$

В этой работе Фока проявилась характерная для него интуиция, позволившая угадать пятимерную формулировку как соответствующую физической задаче и понять важность градиентного преобразования.

Статьи [7, 8] сделали имя Фока известным миру теоретической физики. Он получает стипендию Рокфеллеровского фонда для стажировки в Геттингене и Париже. В Геттингене Владимир Александрович работает с Борном, который предложил “адиабатический принцип” в квантовой механике. В их совместной работе [12] адиабатическая теорема была доказана.

3. ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ДИРАКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА

В 1926 г. Дирак опубликовал замечательную работу “Квантовая теория излучения и поглощения света” [13]. Для изучения переходов между энергетическими уровнями и изменения чисел заполнения Дирак предлагает рассматривать число систем n_s в состоянии s и фазу Θ_s как канонические переменные. В пространстве этих переменных Дирак устанавливает уравнение для волновых функций как функций от числа n_s и времени. Фок в работе “Обобщение и решение статистического уравнения Дирака” [14] называет это пространство пространством Дирака, переформулирует теорию Дирака в комплексном гильбертовом пространстве, свойственном квантовой теории, и затем решает уравнение Дирака в общем виде. Фок показывает, что для формулировки теории в гильбертовом пространстве необходим иной выбор канонических координат Q и импульса P , а именно

$$\begin{aligned} Q_r &= \bar{y}_r, & P_r &= \frac{\hbar}{i} y_r, \\ Q_r &= y_r, & P_r &= -\frac{\hbar}{i} \bar{y}_r, \end{aligned}$$

где операторы рождения y и поглощения $\bar{y}$ связаны с дираковскими переменными n_s и Θ_s каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} \bar{y}_s &= \sqrt{n_s} e^{i \hbar \Theta_s} = e^{i \hbar \Theta_s} \sqrt{n_s + 1}, \\ y_s &= \sqrt{n_s + 1} e^{-i \hbar \Theta_s} = e^{-i \hbar \Theta_s} \sqrt{n_s} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\bar{y}_s &= \sqrt{n_s} e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} = e^{-\frac{\partial}{\partial n_s}} \sqrt{n_s + 1}, \\ y_s &= \sqrt{n_s + 1} e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} = e^{\frac{\partial}{\partial n_s}} \sqrt{n_s}.\end{aligned}$$

Таким образом, Фок предлагает работать либо в представлении, где оператор рождения есть оператор умножения на вспомогательную функцию y_r , а оператор поглощения означает изменение знака и дифференцирование по y_r ,

$$y_r \rightarrow y_r, \quad \bar{y}_r \rightarrow -\frac{\partial}{\partial y_r},$$

либо в представлении, где оператор поглощения есть оператор умножения на $\bar{y}_r$, а оператор рождения означает дифференцирование по $\bar{y}_r$,

$$\bar{y}_r \rightarrow \bar{y}_r, \quad y_r \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{y}_r}.$$

При этом оператор $y\bar{y} = n$ является оператором числа частиц, собственная функция которого имеет вид

$$f(n, z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}},$$

а разложение волновой функции в пространстве Дирака – вид

$$\bar{\Omega}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots) = \sum_{n_1, n_2, \dots} \psi(n_1, n_2, \dots) \frac{\bar{y}_1^{n_1} \bar{y}_2^{n_2} \dots}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!} \dots}.$$

Коэффициенты разложения $\psi(n_1, n_2, \dots)$ – это волновые функции в пространстве Дирака. Формулы, выведенные Фоком в 1928 г., являются ныне стандартными и могут быть найдены в любом учебнике по квантовой теории. Обычно, к сожалению, ссылка на авторство Фока отсутствует. В известной книге [15] Дирак называет описываемую им картину представлением Фока.

Работа [14] не была подхвачена теоретиками того времени, хотя по богатству идей она уникальна. Ее непосредственное развитие было осуществлено самим Фоком. Она оказалась предшественницей ряда известных методов. И пространство Фока, и метод функционалов Фока с родственным методом Тамма–Данкова [16, 17], и когерентные состояния [18, 19] выросли в конце концов из этой работы (см. обзор [20]).

4. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МНОГОВРЕМЕННОЙ ФОРМАЛИЗМ ДИРАКА–ФОКА–ПОДОЛЬСКОГО

Год 1932 был очень плодотворен в творчестве Фока. В этом году вышли в свет его книги “Механика сплошных сред” и курс лекций “Начала квантовой механики”, две работы по математической физике, две работы о теореме вириала, три работы по квантовой электродинамике совместно с Подольским, ставшая классической работа Дирака, Фока и Подольского о многовременном формализме в квантовой электродинамике и великодушная работа по вторичному квантованию и конфигурационному пространству –

пространству Фока. Фок работает интенсивно, продолжая заниматься наиболее актуальными и трудными проблемами теоретической физики. Темп развития квантовой теории в те годы продолжает оставаться высоким.

Квантовая теория излучения Дирака [13] и квантовая электродинамика Гейзенберга и Паули [21] содержали взаимодействие электрона с электромагнитным полем. Вопрос о происхождении кулоновского взаимодействия зарядов оставался открытым. Не были также выяснены вопросы трактовки дополнительного условия и релятивистской инвариантности теории в присутствии заряженных частиц. В начале 1932 г. Дирак опубликовал статью [22], в которой выдвинул идею, что кулоновский потенциал между частицами возникает в результате обмена скалярными квантами. Дирак пояснил свою идею на примере движения в одном измерении, получив логарифмический потенциал. В краткой заметке Фок и Подольский [23] немедленно сделали подсчет для трехмерного случая, ограничиваясь скалярным потенциалом, и получили реальное кулоновское взаимодействие.

В подробной работе “О квантовании электромагнитных волн и взаимодействии зарядов по теории Дирака” [23], посвященной систематическому изложению проблемы, Фоку и Подольскому пришлось преодолевать дополнительные трудности. Во-первых, при квантовании электромагнитного поля в вакууме с помощью канонического формализма равен нулю импульс, сопряженный скалярному потенциалу. Во-вторых, уже в задаче о взаимодействии двух электронов с полем при одинаковых временах утрачивается релятивистская форма теории.

Первую трудность Фок и Подольский обошли, введя в функцию Лагранжа член, фиксирующий калибровку

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} \right)^2.$$

При этом пространство состояний оказывалось шире физического. Дополнительное условие $P_0 = 0$ на волновую функцию ψ выделяло физическое пространство состояний, в котором выполняются уравнения Максвелла. Такая трактовка условия Лоренца сохранилась и в современной теории. Цитируемая теперь работа Ферми [24] в это время еще не была известна.

Вторая трудность была преодолена с помощью учета замечания Дирака о необходимости приписывать раздельное время каждому электрону и полю.

Этот цикл исследований был завершен совместной работой Дирака, Фока и Подольского, в которой новая форма релятивистской квантовой механики с фиксированным числом заряженных частиц была приведена к окончательному виду. В этой работе была доказана ее эквивалентность теории Гейзенберга и Паули. Главным шагом вперед были введение многовременного формализма и использование представления взаимодействия для электромагнитного поля. Волновые уравнения для общей волновой функции системы частиц и электромагнитного поля имеют вид

$$\left(R_s - i\hbar \frac{\partial}{\partial t_s} \right) \psi^* = 0,$$

где

$$R_s = c\bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s c^2 \beta_s + \varepsilon_s [\Phi(\mathbf{r}_s, t_s) - \bar{\alpha}_s \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_s, t_s)]$$

и каждая частица описывается собственным оператором Дирака R_s с электромагнитным полем, зависящим от координат и времени частицы. Уравнения электродинамики имеют вид уравнений свободного поля с собственной координатой

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{H} = \text{curl } \mathbf{A},$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi} = 0, \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} = 0.$$

Дополнительное условие теперь зависит как от координат частиц, так и от координат поля

$$C(\mathbf{r}, t)\psi = 0,$$

где

$$C(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sum_{s=1}^n \frac{\varepsilon_s}{4\pi} \Delta(X - X_s),$$

здесь $\Delta(X)$ – функция Йордана–Паули

$$\Delta(X) = \frac{1}{r} [\delta(r + ct) - \delta(r - ct)].$$

В общей волновой функции интервалы между частицами должны быть пространственноподобными в силу условия причинности.

Многовременной формализм Дирака–Фока–Подольского был обобщен в 1946–1948 г. независимо Томонагой [25] и Швингером [26]. В новой обобщенной теории и электромагнетизм, и электроны с позитронами описываются квантовыми полями. В формализме Томонаги и Швингера каждой точке пространства сопоставляется свое время, а состояние задается на пространственноподобной поверхности, представляющей собой релятивистски-инвариантное обобщение трехмерного пространства. Использование представления взаимодействия как обобщения многовременного формализма является ключевым пунктом при построении теории Томонаги и Швингера. Если же число заряженных частиц неизменное, то многовременной формализм Дирака–Фока–Подольского остается основным рабочим инструментом теоретика и в настоящее время. Его обобщение на неабелевы поля типа Янга–Миллса вполне элементарно.

5. МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ФОКА

Этот метод берет начало в статье 1928 г. “Обобщение и решение дираковского статистического уравнения” [14]. В ней Фок сформулировал представление, в котором оператор рождения бозе-частиц есть оператор умножения на вспомогательную комплексную функцию, а оператор поглощения – функциональная производная по этой функции. В работах Фока “О квантовой электродинамике” [27] и “Метод функционалов в квантовой электродинамике” [28] содержится систематическое изложение математического аппарата квантовой электродинамики в этом представлении, когда волновая функция является производящим функционалом для амплитуд вероятностей при фиксированном числе частиц. Фактически первая из этих работ была завершена сразу же после написания совместной статьи с Дираком и Подольским и доложена в ноябре того же 1932 г. на теоретическом семинаре в Ленинграде, но ее публикация задержалась. Статья [28]

отличается от статьи [27] более подробным изложением метода производящего функционала.

В этом методе волновая функция поля представляет собой производящий функционал Ω для амплитуд вероятности состояний с определенным числом частиц:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n,$$

где

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \cdots \int \psi(x_1, \dots, x_n) \bar{b}(x_1) \dots \bar{b}(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

и $\bar{b}(x)$ – вспомогательная функция. Операторы рождения и поглощения $b(k)$ и $b^+(k)$ имеют вид

$$b(k)\Omega = \frac{\delta\Omega}{\delta\bar{b}(k)}, \quad b^+(k)\Omega = \bar{b}(k)\Omega.$$

Скалярное произведение двух функционалов Ω и Ω' может быть определено при помощи волновых функций в подпространствах с определенным числом частиц

$$(\Omega, \Omega') = \bar{\psi}_0 \psi'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \bar{\psi}(x_1, \dots, x_n) \psi'(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Условие ортогональности имеет вид

$$(\Omega, \Omega') = 0.$$

Заряженные частицы трактуются в духе многовременного формализма с условием Лоренца, рассматриваемым в качестве дополнительного условия на функционал. Это условие имеет вид системы двух уравнений первого порядка в функциональных производных. Фок находит решение данной системы с помощью неунитарного преобразования функционала

$$\Psi = e^{\chi\Omega(\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{k}))}.$$

Неунитарное преобразование уравнений приводит к исключению продольной и скалярной компонент и появлению кулоновского взаимодействия.

6. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Дирак предложил в 1928 г. [29] релятивистски-инвариантное уравнение для электрона в плоском пространстве, включив тем самым электроны в квантово-механическое описание. Для полного успеха необходимо было обобщить уравнение Дирака на случай внешнего гравитационного поля, т.е. записать его в пространстве Римана. Такая задача была решена в 1929 г. Фоком [30] и Фоком и Иваненко [31].

Обобщение на геометрию Римана должно отвечать двум требованиям. Во-первых, как и любое уравнение в общей теории относительности, уравнение для электрона должно быть ковариантно относительно произвольных преобразований координат.

Во-вторых, группа Лоренца, по спинорному представлению которой преобразуется волновая функция электрона, должна относиться только к локальной системе координат, заданной в каждой точке пространства-времени. Релятивистской инвариантности уравнения Дирака в плоском пространстве должна соответствовать инвариантность относительно локальных лоренцевых преобразований в пространстве Римана.

Локальное лоренцево преобразование задается в локальной прямоугольной системе осей, описываемых тетрадой $h_\mu^a(x)$, причем направления осей совпадают с направлениями касательных к четырем ортогональным семействам кривых $a = 1, \dots, 4$, проходящих через точку x . Таким образом, компонента тетрады имеет два индекса, один из которых (греческие буквы) относится к системе координат, а другой (латинские буквы) – к локальной лоренцевой (тетрадной) системе. Метрика в тетрадной системе есть

$$g^{\mu\nu} h_\mu^a h_\nu^b = \eta^{ab}, \quad \eta^{ab} = (1, -1, -1, -1),$$

она связана с метрикой $g_{\mu\nu}$ пространства Римана соотношением

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_\mu^a h_\nu^b.$$

При локальном лоренцевом преобразовании $\Lambda_a^b(x)$ каждая μ -компонента преобразуется независимо:

$$h_\mu^a(x) = \Lambda_a^b(x) h_\mu^b(x), \quad \Lambda_a^b \Lambda_{a'}^{b'} \eta_{bb'} = \eta_{aa'}.$$

Вектор может быть задан своими компонентами $A_\mu(x)$ как в системе координат x , так и в локальной системе A'_a . Очевидно, что $A_\mu = h_\mu^a A'_a$. При параллельном переносе изменение координатных компонент вектора A_μ выражается через скобки Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, которые зависят только от метрики в пространстве Римана $g_{\sigma\rho}$,

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda dx^\nu, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\}.$$

Соответствующее изменение тетрадных компонент имеет вид

$$\delta A'_a = \gamma_{abc} A'^b ds^c, \quad ds^c = h_\mu^c dx^\mu,$$

где ds^c – тетрадные компоненты бесконечно малого сдвига dx^μ , а γ_{abc} – коэффициенты вращения Риччи. Спинор ψ характеризуется своими трансформационными свойствами при лоренцевых преобразованиях и поэтому может быть определен только в локальной лоренцевой системе. Матрицы Дирака γ_a в локальной системе постоянны и имеют тот же вид, что и в плоском пространстве $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}$. Зависящие от x матрицы γ_μ имеют вид $\gamma_\mu(x) = h_\mu^a \gamma_a$.

Приращение спинора ψ при параллельном переносе с тетрадными компонентами ds^a есть

$$\delta \psi = C_a ds^a \psi,$$

где (4×4) -матрицы C_a должны быть найдены из требования, чтобы билинейные комбинации $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, $\bar{\psi} \psi$, $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$ имели обычный смысл компонент вектора и инвариантов в координатной системе. Для комплексного спинора это требование выполняется, если матрицы C_a имеют вид

$$C_a = \frac{1}{4} \gamma^b \gamma^c \gamma_{bac} + i \Phi_a,$$

т.е., кроме спинорной части, содержат также электромагнитный потенциал Φ_a . Иначе говоря, ковариантная производная от спинора $D'_a \psi$ в направлении тетрадной оси a может быть записана в виде

$$D'_a \psi = \frac{\partial \psi}{\partial s^a} - C_a \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s^a} = h_a^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}.$$

Следовательно, ковариантная производная от спинора по координате $D_\mu \psi$ есть

$$D_\mu \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \Gamma_\mu \psi,$$

где введено обозначение $\Gamma_\mu = h_a^\mu C_a$.

Теперь можно написать уравнение Дирака в гравитационном поле, заменяя производные от спинора в плоском пространстве ковариантными производными:

$$\left(\frac{1}{i} \gamma^\mu D_\mu + m \right) \psi = 0.$$

Фок находит также действие и тензор энергии-импульса для спинора в гравитационном поле, обладающие необходимыми свойствами эрмитовости и инвариантности.

В отсутствие гравитационного поля, когда коэффициенты Риччи равны нулю, $\gamma_{abc} = 0$, величины Γ_μ превращаются в компоненты электромагнитного потенциала. Тем самым придается геометрический смысл включению потенциала в уравнение Дирака. Значение этого результата стали понимать значительно позже. Если применить этот подход к случаю более сложных внутренних симметрий, открытых через несколько десятков лет, то мы получим взаимодействия спинора с калибровочными полями типа полей Янга–Миллса. Такое геометрическое истолкование взаимодействия может оказаться ключом к будущим теориям.

В 1929 г. Фок пишет [30]: “Включение в формулу для параллельного переноса 4-потенциала наряду с коэффициентами Риччи, с одной стороны, приводит к простому геометрическому обоснованию появления в волновом уравнении выражения $p_\mu - (e/c) \Phi_\mu$, а с другой стороны, показывает, что здесь в отличие от эйнштейновского подхода потенциалы Φ_μ играют самостоятельную роль в геометрической картине мира и не обязаны быть функциями коэффициентов γ_{abc} ”.

7. ПРОСТРАНСТВО ФОКА

Это один из наиболее известных результатов Фока. Известность этого результата сразу после опубликования соответствующей работы была вызвана не только тем, что в ней было дано первое ясное и последовательное изложение метода вторичного квантования Дирака [13], Йордана, Клейна и Вигнера [32, 33] в связи с квантовой механикой системы частиц в конфигурационном пространстве, но и тем, что до появления этой работы предполагалось, что метод вторичного квантования выходит за рамки квантовой механики.

Эта классическая статья может служить и сейчас основным пособием для изучающих вторичное квантование. Пространство состояний с неопределенным числом частиц, введенное в статье, получило название пространства Фока. Задачи с переменным

числом частиц встречаются во всех областях квантовой физики как в нерелятивистской, так и в релятивистской теории, как в случае электромагнитного поля или гравитации, так и в случае массивных частиц и псевдочастиц; столь же универсально понятие пространства Фока. Работа представляет собой прекрасный образец математического видения физической проблемы. Результат был подготовлен предыдущими работами Фока, а именно, построением представления Фока [8] и формулировкой метода Хартри–Фока [34, 35].

Фок предлагает представить волновую функцию системы с неопределенным числом частиц в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1, x_2) \\ \psi(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \end{pmatrix},$$

где каждая строка относится к состоянию с определенным числом частиц: верхняя строка относится к вакууму, вторая строка – к состоянию с одной частицей и т.д. Все переменные частицы обозначены символически посредством x . Многочастичные функции симметричны в случае статистики Бозе и антисимметричны в случае статистики Ферми–Дирака. Операторы рождения и поглощения сдвигают столбец вниз и вверх на единицу; вакуум уничтожается оператором поглощения:

$$\Psi(x) \begin{pmatrix} \text{const} \\ \psi(x_1) \\ \psi(x_1, x_2) \\ \psi(x_1, x_2, x_3) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \sqrt{2} \psi(x, x_1) \\ \sqrt{3} \psi(x, x_1, x_2) \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Пространство состояний, построенное на столбцах Фока, называется пространством Фока. Именно в этом пространстве развивается динамика систем, в которых взаимодействие может изменять число частиц.

Из соотношений, которые используются ежедневно, но происхождение которых забыто, в этой работе изменение волновой функции во времени впервые представлено при помощи унитарного оператора

$$\psi(\bullet, t) = S(t)\psi(\bullet, 0),$$

где точкой обозначены переменные системы, и соответственно дано выражение через оператор $S(t)$ для гамильтониана

$$i\dot{S}(t)S^+(t) = -iS(t)\dot{S}^+(t) = \frac{1}{h}H$$

и производной от шредингеровского оператора

$$\frac{dL}{dt}\psi(\bullet, t) = S(t)\dot{S}^+(t)L\psi(\bullet, t) + \frac{d}{dt}[L\psi(\bullet, t)].$$

Чтобы понять с современной точки зрения, насколько эта (ныне простая) вещь была новой, приведем пояснение Фока к этой формуле: “Результат применения оператора dL/dt

к волновой функции $\psi(\bullet, t)$ в шредингеровском представлении получается путем выполнения следующих операций:

1. Применение оператора L .
2. Продолжение во времени на величину t в отрицательном направлении.
3. Дифференцирование по t .
4. Продолжение во времени на величину t в положительном направлении”.

8. СОБСТВЕННОЕ ВРЕМЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ. КАЛИБРОВКА ФОКА

Цель работы [36] состояла в развитии релятивистски- и калибровочно-инвариантного квазиклассического метода интегрирования уравнения Дирака с внешним полем. Во время написания работы эта проблема становилась актуальной для дираковской теории позитронов. Внешнее электромагнитное поле искажает электронные волновые функции как для состояний с положительными энергиями, так и для дираковского “подвала”. Поэтому даже в отсутствие частиц появляются индуцированные токи и заряды (виртуальные электрон-позитронные пары) в вакууме, происходит поляризация вакуума. После открытия позитрона в 1932 г. приходилось признавать и реальность вакуумной поляризации. Возникла проблема релятивистски- и калибровочно-инвариантной трактовки этого эффекта и однозначного выделения конечных выражений из результатов вычислений, содержащих бесконечности. Как показал Вайскопф [37], расходимости в проблеме вакуумной поляризации имеют логарифмический характер. Наиболее простой способ обеспечения инвариантности вычислений состоит в использовании только инвариантных величин. Для уравнения Дирака с внешним электромагнитным полем это означает четырехмерную формулировку уравнения движения без выделенной роли времени и использование потенциалов, которые определяются однозначно по калибровочно-инвариантным напряженностям поля. В работе [36] Фок предлагает такую формулировку, введя в уравнение Дирака собственное время и найдя удобное калибровочное условие для потенциала. В дальнейшем этот подход получил развитие в работах Швингера [38] и де Витта [39]. В настоящее время метод собственного времени Фока–Швингера–де Витта представляет собой основной подход к релятивистски-инвариантным вычислениям функций Грина и детерминантов в квантовой теории поля (см., например, [40]).

Изучение уравнения Дирака второго порядка с внешним электромагнитным полем Фок заменяет изучением уравнения Дирака с собственным временем. Он вводит собственное время в качестве дополнительной переменной наряду с четырьмя координатами, имея в виду, помимо релятивистской и калибровочной инвариантности, еще то обстоятельство, что в пространстве нечетного числа измерений фундаментальное решение определяется единственным образом. В случае же четного числа измерений существует бесчисленное множество фундаментальных решений; эти решения имеют логарифмическую особенность, причем коэффициент при логарифме определяется однозначно. Фок вводит новое калибровочное условие для электромагнитных потенциалов $\mathbf{A}$ и Φ :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)\mathbf{A}' - c(t - t^0)\Phi' = 0.$$

Эта калибровка предполагает отсутствие особенностей у потенциалов. В калибровке Фока потенциалы выражаются однозначно через поле. Если обозначить двумя чертами

сверху усреднение, произведенное по формуле

$$\bar{f} = 2 \int_0^1 f[\mathbf{r}^0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)u, t^0 + (t - t^0)u] u du,$$

то потенциалы принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= -\frac{1}{2}[(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0) \times \bar{\mathbf{H}}] - \frac{1}{2}c(t - t^0)\bar{\mathbf{E}}, \\ \Phi' &= -\frac{1}{2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}^0)\bar{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

Калибровка Фока удобна при изучении самодуальных полей и при разложении по таким полям. В квантовой теории поля в этой калибровке духи Фаддеева–Попова отщепляются [41, 42].

Развивая метод собственного времени, Фок вначале показывает, что в классической механике теории относительности обычные уравнения Лагранжа можно получить также из видоизмененного действия в пятимерном пространстве так, чтобы дополнительная координата имела смысл собственного времени. Он вводит собственное время в уравнение Дирака второго порядка следующим образом. Если уравнение

$$\left\{ \mathbf{P}^2 + m^2 c^2 - \frac{T^2}{c^2} + \frac{eh}{c}(\bar{\sigma} \cdot \mathbf{H}) - \frac{ieh}{c}(\bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}) \right\} \Psi = 0$$

является уравнением Дирака второго порядка в четырехмерном пространстве, то его можно написать в виде

$$h^2 \Lambda \Psi = 0,$$

где Λ – оператор второго порядка.

Решение уравнения можно искать в виде определенного интеграла

$$\Psi = \int_C F d\tau,$$

взятого по вспомогательной переменной τ в некоторых постоянных пределах (или по некоторому контуру в комплексной плоскости τ).

Функция F должна удовлетворять уравнению Дирака с собственным временем τ , т.е.

$$\frac{h^2}{2m} \Lambda F = ih \frac{\partial F}{\partial \tau},$$

а функции F и $\partial F / \partial \tau$ связаны соотношением

$$\int_C \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = F|_C,$$

где интеграл берется по такому контуру C , на котором $F|_C = 0$. Фок показывает, что новая переменная имеет смысл собственного времени. Решение уравнения Дирака с собственным временем представляется в квазиклассическом виде, где классическое действие S удовлетворяет классическому уравнению с собственным временем. Интегрирование по собственному времени должно быть отложено на конец вычислений. Все расходимости сводятся тогда только к расходимостям в интегралах по собственному времени. Эти интегралы не зависят от калибровки и релятивистски-инвариантны по своему определению.

9. СИММЕТРИЯ АТОМА ВОДОРОДА И ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

Эlegantная работа Фока “Атом водорода и неевклидова геометрия” [43] о симметрии водородоподобных атомов объяснила случайное вырождение атомных уровней и послужила началом как новому методу расчета атомных свойств, так и поискам так называемых динамических групп или динамической симметрии. Известно, что в сферически-симметричном поле уровни энергии электрона определяются двумя квантовыми числами: главным квантовым числом и собственным значением момента количества движения. Однако уровни энергии атома водорода зависят только от главного квантового числа. Поскольку вырождение уровней связано с симметрией задачи, то возникает вопрос, какова та дополнительная симметрия кулоновского поля, которая выделяет это поле из других полей со сферической симметрией. Эта проблема обсуждалась теоретиками до Фока и считалась сложной. Фок решил ее простым и изящным способом, где главную роль сыграли физическая интуиция и математическая изобретательность.

Фок записывает уравнение Шредингера с кулоновской потенциальной энергией в пространстве импульсов

$$\frac{1}{2m}p^2\psi(\mathbf{p}) = -\frac{Ze^2}{2\pi^2\hbar} \int \frac{\psi(\mathbf{p}')}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2} d\mathbf{p}',$$

где оно имеет вид интегрального уравнения. Для точечного спектра средний квадратичный импульс есть $p_0 = \sqrt{-2mE}$. Далее Фок переходит в импульсном пространстве к новым прямоугольным координатам на гиперплоскости, которая представляет собой стереографическую проекцию шара в четырехмерном евклидовом пространстве,

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{2p_0 p_x}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \eta &= \frac{2p_0 p_y}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \zeta &= \frac{2p_0 p_z}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \sin \alpha \cos \theta, \\ \chi &= \frac{p_0^2 - \mathbf{p}^2}{p_0^2 + \mathbf{p}^2} = \cos \alpha,\end{aligned}$$

радиус которого равен единице:

$$\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 + \chi^2 = 1.$$

Углы α, θ и φ являются сферическими координатами на гиперсфере, причем углы являются одновременно обычными сферическими углами в трехмерном пространстве импульсов. В новых координатах уравнение Шредингера принимает вид

$$\Psi(\alpha, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{2\pi^2} \int \frac{\Psi(\alpha', \theta', \varphi')}{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}} d\Omega', \quad (1)$$

где

$$\lambda = \frac{Zme^2}{\hbar p_0}.$$

Функция на гиперсфере связана с волновой функцией в импульсном пространстве соотношением

$$\Psi(\alpha, \theta, \varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{8}} p_0^{-3/2} (p_0^2 + \mathbf{p}^2)^2 \psi(\mathbf{p}).$$

Величина $2 \sin(\omega/2)$ — это длина хорды, соединяющей точки α, θ, φ и $\alpha', \theta', \varphi'$ на четырехмерном шаре, так что

$$4 \sin^2 \frac{\omega}{2} = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 + (\chi - \chi')^2.$$

Уравнение (1) является интегральным уравнением для шаровых функций четырехмерного шара.

Представление уравнения Шредингера в виде (1) — это основной результат работы [43]. Оно несет много важной информации:

1. Группа инвариантности водородоподобного атома совпадает с группой четырехмерных вращений. Это объясняет независимость уровней энергии от азимутального квантового числа и вводит гиперсферические функции в расчеты таких систем. Фоковская группа особо полезна, когда необходимо усреднять или суммировать внутри одного слоя с заданным значением главного квантового числа.

2. В случае непрерывного спектра водородоподобного атома аналогичная трактовка приводит к симметрии группы Лоренца на поверхности четырехмерного гиперболоида.

3. Эта группа отличается от кинематической группы тем, что ее преобразования связывают функции с различной энергией E (вращения на угол α). Такие группы получили название динамических. Поиски динамических групп составляют одно из важных направлений современной физики.

4. Фок показал, что в пространстве импульсов водородоподобных атомов имеет место неевклидова геометрия, а именно геометрия Римана с постоянной положительной кривизной в случае точечного спектра и геометрия Лобачевского с постоянной отрицательной кривизной в случае сплошного спектра.

10. ПРОБЛЕМЫ ИСТОЛКОВАНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Фок всегда уделял значительное внимание вопросам истолкования квантовой механики. Он опубликовал около 30 работ, в которых развивал копенгагенскую интерпретацию квантовой механики и полемизировал со сторонниками другого истолкования. Дискуссии о смысле квантовой механики начались одновременно с ее созданием. Толкование Бора (копенгагенская интерпретация) постепенно приобретало ясность, но оставались трудные вопросы замкнутости и непротиворечивости теории. На Сольевевском конгрессе 1927 г. главными оппонентами Бора были Эйнштейн и Лоренц. В 1936 г. Эйнштейн, Подольский и Розен выступили со статьей “Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным?” [44], продолжив тем самым спор с Бором. Дискуссия Эйнштейна с Бором сыграла фундаментальную роль в понимании принципиальных вопросов квантовой теории. Фок в том же 1936 г. опубликовал перевод этой дискуссии и написал вступительную статью [45]. Это было началом его деятельности по проблемам теории познания в физике микромира. Число физиков, внесших вклад в эти вопросы, исчисляется единицами. Для этого нужно было иметь физическую интуицию и математическую мощь Фока вместе с присущими ему

внутренней потребностью к логической ясности теории и неприятием стиля рецептов и заклинаний. Эта деятельность Фока оказалась весьма полезной также и для того, чтобы оградить квантовую механику от наскоков части философов.

Выступления противников копенгагенской интерпретации квантовой механики показывали, что трудности восприятия ими квантовых закономерностей были во многом связаны с ее недостаточной логической детализацией.

Фок восполнил пробелы, оставленные общей концепцией дополнительности Бора. Логический анализ Владимира Александровича опирается на три введенных им понятия:

- понятие относительности к средствам наблюдения;
- вероятность как фундаментальное понятие, относящееся к самой природе квантового описания;
- понятие потенциальной возможности.

Первое из этих понятий обобщает понятие относительности к системе отсчета. Оно необходимо, т.к. в основе квантового описания находится акт взаимодействия объекта с прибором и, следовательно, с точки зрения классической физики описание микрообъекта при помощи волновой функции является “неабсолютным”. В классической физике относительность к средствам наблюдения совпадает с относительностью к системе отсчета.

Понятия фундаментальной вероятности и потенциальной возможности возникают как замена лапласовского детерминизма и вероятности классической физики, отражавшей неполноту знаний о феномене. “Классическая” неполнота может быть исключена уточнением условий, “неполнота” квантовой теории с точки зрения классической теории не может быть устранена, т.к. она присуща квантовому описанию, опирающемуся на акт взаимодействия. Квантовая теория – это теория прогнозов, в которой понятие вероятности первично. Такое описание не противоречит принципу причинности. Действительно, принцип причинности как одно из начал научного объяснения не должен отождествляться с однозначной детерминированностью классической физики. Фок пишет: “Все явления происходят в пространстве и времени (ведь не в потустороннем же мире они происходят), а что касается причинности, то предметом теории, в частности квантовой механики, как раз и является отыскание причинной связи между явлениями; кроме того, нельзя смешивать причинность с однозначной детерминированностью, которая может и не иметь места”.

Фок анализирует эксперимент над атомной системой, подразделяя его на два опыта: начальный (приготовительный) и конечный (проверочный). Начальный опыт включает приготовление и создание внешних условий, которые описываются классически. Начальный опыт обращен к будущему, т.к. волновая функция, отправляясь от данных, полученных в начальном опыте, позволяет делать прогнозы, относящиеся к проверочному опыту. Волновая функция описывает потенциальные возможности для результатов измерения над системой. Совокупность потенциальных возможностей для проверочного опыта, вытекающих из данного начального опыта, есть характеристика состояния системы. Максимально полная характеристика называется состоянием системы. Изменение волновой функции во времени по уравнению Шредингера отображает изменение этих прогнозов. Проверочный опыт обращен в прошлое. В нем потенциальные возможности различных измерений превращаются в действительность. Волновая функция

имеет физический смысл только вплоть до момента проверочного опыта. Как в начальном, так и в конечном опыте устройство и действие прибора описываются классически. Совокупность начального и проверочного опытов, повторенных много раз, дает полный, или завершённый опыт, позволяющий делать сравнение с теорией. Книга Фока “Начала квантовой механики” [46] содержит ясное и систематическое изложение принципа относительности к средствам наблюдения применительно к квантовой механике, вероятностного истолкования и понятия потенциальных возможностей.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Испытание временем выдерживают не все научные достижения. Оглядываясь назад на величайшие научные теории XX века – квантовую теорию и общую теорию относительности, любопытно было бы проследить, как постепенно со временем отсеиваются от “вечного” в науке примыкавшие к нему и часто затмевавшие его временные теории и промежуточные открытия. Однако мы ограничимся тем, что перечислим те фундаментальные достижения Фока, без которых, по нашему мнению, немислима современная физика и которые будут использоваться:

- пространство Фока,
- метод Хартри–Фока,
- уравнения движения масс в теории тяготения Эйнштейна,
- параллельный перенос как способ задания взаимодействия и уравнение Дирака в теории тяготения,
- представление Фока.

Безусловно сохранят свое значение метод собственного времени, симметрия атома водорода и динамические группы. Важное развитие получит введенное Фоком понятие об относительности к средствам наблюдения.

Список литературы

- [1] *L. de Broglie*. Ann. Phys. 1925. V. 3. P. 22.
- [2] *W. Pauli*. Z. Phys. 1925. V. 31. P. 765.
- [3] *W. Heisenberg*. Z. Phys. 1925. V. 33. P. 879.
- [4] *M. Born, P. Jordan*. Z. Phys. 1925. V. 34. P. 858.
- [5] *M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan*. Z. Phys. 1925. V. 35. P. 557.
- [6] *E. Schroedinger*. Ann. Phys. 1926. V. 79. P. 361; P. 489; P. 734; V. 80. P. 437; V. 81. P. 109.
- [7] *V. A. Fock*. Z. Phys. 1926. V. 38. P. 242.
- [8] *V. A. Fock*. Z. Phys. 1926. V. 39. P. 226.
- [9] *O. Klein*. Z. Phys. 1926. V. 37. P. 895.
- [10] *W. Gordon*. Z. Phys. 1926. V. 40. P. 117.
- [11] *V. A. Fock*. Z. Phys. 1929. V. 57. P. 261.
- [12] *M. Born, V. A. Fock*. Z. Phys. 1928. V. 51. P. 165.
- [13] *P. A. M. Dirac*. Proc. Roy. Soc. 1926. V. 114. P. 243.
- [14] *V. A. Fock*. Z. Phys. 1928. V. 49. P. 339.
- [15] *П. А. М. Дирак*. Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960.
- [16] *I. E. Tamm*. J. Phys. 1945. V. 9. P. 449.
- [17] *S. Dancoff*. Phys. Rev. 1951. V. 78. P. 382.
- [18] *R. Glauber*. Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 2529; V. 131. P. 2766.
- [19] *J. R. Klauder, E. C. G. Sudarshan*. Fundamentals of Quantum Optics. New York, Amsterdam: W. A. Benjamin, 1966.

- [20] *Yu. V. Novozhilov, A. V. Tulub.* Method of Functionals. New York: Gordon and Breach, 1961.
- [21] *W. Heisenberg, W. Pauli.* Z. Phys. 1929. V. 56. P. 1; 1930. V. 59. P. 168.
- [22] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. A. 1932. V. 136. P. 453.
- [23] *V. Fock, B. Podolsky.* Sow. Phys. 1932. V. 7. P. 798; V. 2. P. 275.
- [24] *E. Fermi.* Rev. Mod. Phys. 1932. V. 4. P. 87.
- [25] *K. Tomonaga.* Progr. Theor. Phys. 1946. V. 1. P. 147.
- [26] *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1439; 1949. V. 75. P. 651; V. 76. P. 790.
- [27] *V. Fock.* Sow. Phys. 1934. V. 6. P. 425.
- [28] *В. А. Фок.* Уч. зап. ЛГУ. Сер. физ. 1937. Т. 3. С. 109.
- [29] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. 1928. V. 117. P. 610.
- [30] *V. A. Fock.* Z. Phys. 1929. V. 57. P. 261; J. Phys. Radium. 1929. V. 10. P. 392.
- [31] *V. A. Fock, D. Iwanenko.* Z. Phys. 1929. V. 54. P. 798.
- [32] *P. Jordan, O. Klein.* Z. Phys. 1927. V. 45. P. 751.
- [33] *P. Jordan, E. Wigner.* Z. Phys. 1928. V. 47. P. 631.
- [34] *D. R. Hartree.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 1928. V. 24. P. 89.
- [35] *V. A. Fock.* Z. Phys. 1930. V. 61. P. 126; V. 62. P. 795.
- [36] *В. А. Фок.* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1937. Т. 2. С. 551.
- [37] *V. Weisskopf.* Z. Phys. 1934. V. 89. P. 27; V. 90. P. 817.
- [38] *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.
- [39] *Б. С. ДеВитт.* Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
- [40] *R. Ball.* Phys. Rep. 1989. V. 182. P. 1.
- [41] *K. Itabashi.* Progr. Theor. Phys. 1981. V. 65. P. 1423.
- [42] *W. Mecklenburg, L. Mizrahi.* Phys. Rev. D. 1983. V. 27. P. 1922.
- [43] *В. А. Фок.* Изв. АН СССР. Сер. матем. и естеств. наук. 1935. № 2. С. 169; *V. A. Fock.* Z. Phys. 1935. V. 98. P. 145.
- [44] *А. Эйнштейн, Б. Подольский, Н. Розен.* УФН. 1936. Т. 16. С. 440.
- [45] *В. А. Фок.* УФН. 1936. Т. 16. С. 436.
- [46] *В. А. Фок.* Начала квантовой механики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 5.IV.1999 г.