Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Пастон, Е. В. Прохвятилов, В. А. Франке, К построению гамильтониана
КХД в координатах светового фронта, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 3, 417–437

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf788>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:36:32

© 1999 г. С. А. Пастон*, Е. В. Прохвятилов*, В. А. Франке*

К ПОСТРОЕНИЮ ГАМИЛЬТОНИАНА КХД В КООРДИНАТАХ СВЕТОВОГО ФРОНТА

Предложены лагранжиан и соответствующий ему гамильтониан в координатах светового фронта, который порождает после снятия регуляризации теорию, пертурбативно эквивалентную обычной КХД в лоренцевых координатах. Используемая регуляризация нестандартна и нарушает калибровочную инвариантность. Но после снятия регуляризации эта инвариантность восстанавливается благодаря введению конечного числа контрчленов при некоторой зависимости их коэффициентов от параметров регуляризации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поиск подходов к решению задач квантовой теории поля в случае большой константы взаимодействия остается актуальным в течение длительного времени. Сейчас в рамках квантовой хромодинамики (КХД) для этой цели часто применяются расчеты на пространственно-временных решетках. Таким путем получены существенные результаты. Тем не менее эти расчеты остаются весьма трудоемкими и обеспечивают невысокую точность, причем, как правило, трудно оценить погрешность расчетов теоретически. Поэтому представляет интерес изучение других возможных подходов к проблеме. Даже ограниченный успех в этом направлении позволит сравнивать результаты, полученные разными способами.

Задолго до появления КХД была предпринята попытка исследовать взаимодействие пионов и нуклонов, решая уравнение Шредингера в лоренцевой системе координат в рамках квантовой теории пионного и нуклонного полей. При этом состояния описывались способом, найденным ранее В. А. Фоком [1], с помощью векторов пространства, которое теперь носит его имя. Математический вакуум пространства Фока в данном случае совпадал с вакуумом свободной теории. Этот подход, известный теперь под названием метода Тамма–Данкова [2, 3], не привел к успеху. Причина состояла прежде всего в сложности физического вакуумного состояния, которое не совпадает с математическим вакуумом. Не описав физический вакуум, нельзя было исследовать какие-либо другие состояния. Если ввести ультрафиолетовое (УФ-) и инфракрасное (ИК-) обрезания, сделав число степеней свободы конечным, то в принципе можно представить физический вакуум вектором пространства Фока над вакуумом свободной теории. Однако такое пред-

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

ставление оказывается необозримо сложным, поскольку нужно обеспечить трансляционную инвариантность физического вакуума и удовлетворить требованию “разделения на пучки” (cluster decomposition property) в отношении средних по этому вакууму. В силу такого положения вещей уравнение Шредингера в лоренцевых координатах, где эволюция происходит по обычному времени, трудно применить для каких-либо расчетов в квантовой теории поля с большой константой взаимодействия.

Еще в 1949 г. Дирак указал способ, позволяющий обойти трудности, связанные с описанием физического вакуумного состояния [4]. Он предложил применить координаты светового фронта $x^\pm = (x^0 \pm x^3)/\sqrt{2}$, x^1, x^2 , где x^0, x^1, x^2, x^3 – лоренцевы координаты, и использовать x^+ в качестве времени. При таком подходе теория квантуется канонически на поверхности $x^+ = \text{const}$, а генератор P_+ сдвига вдоль оси x^+ играет роль гамильтониана H . Кроме того, генератор сдвига вдоль оси x^- , т.е. оператор импульса P_- , не смещает поверхности $x^+ = \text{const}$, на которой ведется квантование, и по терминологии Дирака является кинематическим (в отличие от динамического генератора P_+). Поэтому структура оператора P_- в теории со взаимодействием такая же, как в теории без взаимодействия, т.е. оператор P_- всегда квадратичен по операторам рождения и уничтожения $a_n^+(p_-, p_\perp)$, $a_n(p_-, p_\perp)$ и, как правило, имеет вид (после нормального упорядочения)

$$P_- = \int d^2 p_\perp \int_0^\infty dp_- p_- \sum_n a_n^+(p_-, p_\perp) a_n(p_-, p_\perp),$$

где $p_\perp = (p_1, p_2)$, а индекс n нумерует типы операторов рождения и уничтожения. В то же время в соответствии с условием спектральности оператор P_- положительно-определен, в связи с чем в приведенной формуле интегрирование по p_- ведется только от 0 до ∞ . На физическом вакууме Ω оператор P_- обращается в нуль, т.е. $P_-|\Omega\rangle = 0$, откуда получается, что $a_n(p_-, p_\perp)|\Omega\rangle = 0$.

В силу этого физический вакуум $|\Omega\rangle$ может быть использован в качестве математического вакуума пространства Фока, образованного с помощью операторов a_n^+ . Вопросы об описании структуры физического вакуума не возникает. Спектр связанных состояний можно находить, решая уравнение Шредингера

$$P_+|\Psi\rangle = p'_+|\Psi\rangle$$

при условиях

$$P_-|\Psi\rangle = p'_-|\Psi\rangle, \quad P_\perp|\Psi\rangle = 0,$$

где p'_+, p'_- – числа, причем квадрат массы определяется из равенства

$$m^2 = 2p'_+p'_-.$$

Здесь $|\Psi\rangle$ – вектор только что упомянутого пространства Фока. Удовлетворить условиям $P_-|\Psi\rangle = p'_-|\Psi\rangle$, $P_\perp|\Psi\rangle = 0$, где p'_- выбирается произвольно, не составляет труда. Проблема состоит в решении уравнения Шредингера. Такой подход обычно называют “гамильтоновым подходом в координатах светового фронта”. Его, очевидно, можно применить также для расчета матрицы рассеяния.

Описанная схема сталкивается со значительными трудностями из-за возникающих расходимостей и из-за отсутствия явной лоренц-инвариантности. Однако возможность избежать непосредственного описания структуры физического вакуума является столь существенным преимуществом, что этот подход продолжает привлекать к себе внимание. Интерес к нему возрос с появлением КХД. Данная работа посвящена развитию этого направления.

Следует отметить, что координаты светового фронта и близкая по характеру “система бесконечно большого импульса” используются в квантовой теории поля не только в рамках гамильтонова подхода, основанного на непосредственном решении уравнения Шредингера. Многие результаты были получены путем изучения предельного случая быстро движущихся систем отсчета в рамках явно лоренц-инвариантной теории матрицы рассеяния или функций Грина [5–9]. Но в настоящей работе рассматривается только гамильтонов подход.

Построение гамильтониана P_+ в координатах светового фронта для теории с заданным лоренц-инвариантным исходным действием оказывается непростой задачей. Это связано прежде всего с наличием специфических расходимостей при нулевых значениях импульса p_- виртуальных квантов. В частности, инвариантный элемент объема при интегрировании по гиперboloиду $p_\mu p^\mu = m^2$ имеет вид $d^2 p_\perp dp_- / p_-$ и содержит p_- в знаменателе. Положение усложняется в калибровочных теориях. Уже в первых работах по этому вопросу [10, 11] выяснилось, что каноническое квантование на поверхности $x^+ = \text{const}$ можно выполнить только в калибровке $A_- = 0$ или в близких по характеру калибровках (например, $\partial_- A_- = 0$). Последнее связано с тем, что в теории возникают связи второго рода, решение которых, в частности, требует обращения ковариантной производной $D_- = \partial_- + igA_-$. Пропагатор же Фейнмана в калибровке $A_- = 0$ имеет лишний член p_- в знаменателе, что усиливает сингулярности при $p_- = 0$ (во всяком случае, в теории возмущений).

Вследствие сказанного требуется специальная регуляризация, которая заключается в “вырезании” окрестности значения $p_- = 0$ в пространстве импульсов тем или иным способом, что ведет к нарушению лоренц-инвариантности (до снятия регуляризации). Этого при гамильтоновом подходе на световом фронте избежать нельзя. Калибровочную инвариантность можно в принципе сохранить, если вместо “вырезания” окрестности значения $p_- = 0$ применить ограничение пространства-времени по координате x^- ($-L \leq x^- \leq L$) при периодических граничных условиях по x^- для всех полей [12]. В этом случае спектр импульса P_- становится дискретным и четко выделяются “нулевые моды” полей A , т.е. фурье-моды, отвечающие значению $p_- = 0$. Чтобы сохранить калибровочную инвариантность, следует учесть эти нулевые моды. В работе [12] было показано, что в теории возникают вторичные связи второго рода, из которых нужно найти указанные нулевые моды как функции других мод и подставить в гамильтониан. Эти связи столь сложны, что их решение оказывается невозможным. Поэтому приходится отбрасывать нулевые моды с самого начала в лагранжиане, что ведет к нарушению калибровочной инвариантности. Таким образом, нарушения калибровочной инвариантности при регуляризации все равно избежать не удастся. Ниже мы в целях регуляризации “вырезаем” окрестность значения $p_- = 0$. Кроме того, необходима, конечно, обычная УФ-регуляризация.

В связи с изложенным формальное каноническое квантование на гиперповерхности $x^+ = \text{const}$ может породить гамильтониан, который даже в пределе снятия регуляризации соответствует теории, неэквивалентной исходной лоренц-инвариантной. Эквивалентность можно обеспечить, как правило, только путем добавления к гамильтониану на световом фронте необычных контрчленов [13–15].

В последние несколько лет появился ряд работ, в которых приближенный регуляризованный гамильтониан КХД строится непосредственно в координатах светового фронта [16, 17]. Вид гамильтониана подбирается с помощью теории ренормгруппы на основе требования слабой зависимости результатов от предела УФ-обрезания, причем связь с обычной лоренц-инвариантной теорией детально не прослеживается. Предлагаются также методы упрощения гамильтониана и решения уравнения Шредингера. Техника, описанная в этих работах, представляет существенный интерес и продолжает развиваться. Однако остается неясным, в какой степени полученная таким образом теория в координатах светового фронта соответствует обычной лоренц-инвариантной КХД.

В связи со сказанным возникает задача построения такого гамильтониана в координатах светового фронта, который в пределе снятия регуляризации порождает теорию, эквивалентную обычной лоренц-ковариантной. Эту эквивалентность в качестве необходимого условия нужно обеспечить прежде всего в рамках теории возмущений. Затем можно применить, в частности, технику, описанную в работах [16, 17] для упрощения полученного гамильтониана и последующих пертурбативных расчетов на основе уравнения Шредингера. При этом будет видна связь с обычной лоренц-ковариантной теорией.

Проблема построения контрчленов гамильтониана в координатах светового фронта, обеспечивающих эквивалентность данного и лоренц-ковариантного подходов, исследовалась в рамках теории возмущений по константе связи в работе [13]. Там был предложен способ сравнения в каждом порядке по этой константе ряда теории возмущений для функций Грина, построенного с помощью гамильтониана в координатах светового фронта, и ряда, полученного обычным лоренц-ковариантным путем. Помимо УФ-регуляризации, применялась регуляризация особенностей при $p_- = 0$ с помощью обрезания $|p_-| \geq \varepsilon > 0$, т.е. путем исключения из теории тех фурье-компонент каждого поля, для которых $|p_-| < \varepsilon$. Выяснилось, что в некалибровочных теориях поля (в частности, в модели Юкавы) нужно добавить к каноническому гамильтониану на световом фронте лишь немногие контрчлены, чтобы обеспечить требуемую эквивалентность. Однако оказалось, что в случае калибровочных теорий (как абелевых, так и неабелевых) при указанной регуляризации нужно ввести в гамильтониан бесконечное число контрчленов, чтобы добиться этой цели. Такое положение тесно связано с калибровочным условием $A_- = 0$, которого нельзя избежать при каноническом квантовании на световом фронте. Известно [18, 19], что для корректного построения теории возмущений в этой калибровке нужно использовать пропагатор калибровочного поля в форме, предложенной Мандельштамом и Лейббрандтом [20, 21],

$$\frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{2k_+ k_- + i0} 2k_+ \right), \quad (1)$$

где $\mu, \nu = +, -, 1, 2$; $k_\pm = (k_0 \pm k_3)/\sqrt{2}$; $n_+ = 1$, $n_{-,1,2} = 0$. Имеющийся в этом вы-

ражении дополнительный полюс по k_- вырезается при регуляризации $|k_-| \geq \varepsilon$. Возникающее при этом искажение не исчезает в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Для компенсации этого искажения и требуется бесконечное число контрчленов.

Цель данной работы – преодолеть отмеченную трудность и получить искомый гамильтониан с конечным числом контрчленов. В таком случае нельзя обойтись без изменения регуляризации. Для этого мы предлагаем сместить полюс по k_- в выражении (1) с точки $k_- = 0$, изменив лагранжиан таким образом, чтобы к величине $2k_+ k_-$ добавился малый регуляризующий массовый параметр μ^2 . При этом искажения, вызванные вырезанием интервала $|k_-| < \varepsilon$, не столь велики, как в ранее рассмотренном случае, и достаточно конечного числа контрчленов, чтобы в пределе снятия регуляризации ($\varepsilon \rightarrow 0$, а затем $\mu \rightarrow 0$ одновременно с $\Lambda \rightarrow \infty$, где Λ – параметр УФ-регуляризации) получить корректный гамильтониан. УФ-регуляризация выбирается таким образом, чтобы, сняв на промежуточных этапах последующего рассмотрения регуляризацию ИК-типа (т.е. положив $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$), получить лоренц-инвариантный лагранжиан, регуляризованный в УФ-области. Это увеличивает количество “духов”, но в противном случае резко возросло бы число необходимых контрчленов. Отметим, что в калибровке $A_- = 0$ 1-неприводимые вершинные части, несущие верхний индекс “–”, не дают вклада в функции Грина. Ниже доказано лишь совпадение в каждом порядке теории возмущений в пределе снятия регуляризации функций Грина, но не вершинных частей, имеющих индекс “–”. Так как массы связанных состояний определяются полюсами функции Грина, то этого достаточно.

При данной регуляризации гамильтониан действует в пространстве с индефинитной метрикой, что мешает использовать обычный вариационный принцип для решения уравнения Шредингера в условиях сохранения регуляризации. Тем не менее существуют иные вариационные методы, позволяющие решать это уравнение.

Выбранная регуляризация нарушает локальную калибровочную инвариантность, но сохраняет глобальную $SU(3)$ -инвариантность. В связи с этим количество необходимых контрчленов, хотя и конечно, но существенно больше обычного. Удастся показать, что есть такой способ выбора контрчленов, при котором полученная теория в координатах светового фронта пертурбативно эквивалентна исходной лоренц-ковариантной в пределе снятия регуляризации.

Достигнуть поставленной цели можно, начав со следующего лагранжиана:

$$L = L_0 + L_I, \quad (2)$$

$$L_0 = -\frac{1}{4} \sum_{j=0,1} (-1)^j f_j^{a,\mu\nu} \left(1 + \frac{\partial_{\parallel}^2}{\Lambda_j^2} - \frac{\partial_{\perp}^2}{\Lambda^2} \right) f_{j,\mu\nu}^a + \sum_{l=0}^3 \frac{1}{v_l} \bar{\psi}_l (i\gamma^\mu \partial_\mu - M_l) \psi_l, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} L_I = & c_0 \partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A^{a,\nu} + c_1 \partial_\mu A^{a,\mu} \partial_\nu A^{a,\nu} + c_2 A_\mu^a A^{a,\mu} + c_3 f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b \partial^\mu A^{c,\nu} + \\ & + A_\mu^a A_\nu^b A_\gamma^c A_\delta^d (c_4 f^{abe} f^{cde} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} + \delta^{ab} \delta^{cd} (c_5 g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} + c_6 g^{\mu\nu} g^{\gamma\delta})) + \\ & + c_7 \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - c_8 \bar{\psi} \psi - c_9 A_\mu^a \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \psi, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$f_{j,\mu\nu}^a = \partial_\mu A_{j,\nu}^a - \partial_\nu A_{j,\mu}^a, \quad \frac{1}{\Lambda_j^2} = \begin{cases} 1/\Lambda^2, & j = 0, \\ 1/\Lambda^2 + 1/\mu^2, & j = 1, \end{cases} \quad (5)$$

$$v_0 = 1, \quad \sum_{l=0}^3 v_l = 0, \quad \sum_{l=0}^3 v_l M_l = 0, \quad \sum_{l=0}^3 v_l M_l^2 = 0, \quad (6)$$

$$A_\mu^a = \sum_{j=0,1} A_{j,\mu}^a, \quad \psi = \sum_{l=0}^3 \psi_l. \quad (7)$$

Здесь $\partial_\parallel^2 = 2\partial_+\partial_-$, $\partial_\perp^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, γ^μ — матрицы Дирака, λ^a — матрицы фундаментального представления калибровочной группы $SU(3)$,

$$\text{Tr } \lambda^a = 0, \quad \lambda^a \lambda^b = i f^{abc} \lambda^c + d^{abc} \lambda^c + \frac{2}{3} \delta^{ab}, \quad \text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}. \quad (8)$$

Считаем, что поля $A_{j,\mu}^a$ ограничены условием

$$A_{j,-}^a = 0. \quad (9)$$

Кроме того, с самого начала вводим обрезание всех полей по импульсам k_- и $k_\perp$:

$$\varepsilon \leq |k_-| \leq V, \quad v^2 \leq k_\perp^2 \leq V^2. \quad (10)$$

Заметим, что это обрезание, равно как и условие (9), исключает определенные степени свободы непосредственно в лагранжиане, причем такая процедура не ведет к появлению новых связей в каноническом формализме, поскольку по исключенным степеням свободы варьирование не ведется.

Величины ε , Λ , μ , v , V и M_1 , M_2 , M_3 являются параметрами регуляризации, а коэффициенты c_0 – c_9 — перенормировочными константами, т.е. они представляют собой функции параметров регуляризации и разлагаются в ряды по константе связи g , причем для коэффициентов c_3 и c_9 разложение начинается с g (с коэффициентом 1), а для остальных — с g^2 или выше. Выражение (4) содержит обычное взаимодействие КХД и дополнительные слагаемые, необходимые для перенормируемости в предположении сохранения лоренц-инвариантности и глобальной калибровочной инвариантности без сохранения локальной калибровочной инвариантности.

Мы докажем в разделе 3, что данному лагранжиану отвечает гамильтониан на световом фронте, который при некоторой зависимости перенормировочных констант от параметров регуляризации порождает в рамках теории возмущений по константе связи g функции Грина полей $A_{0,\mu}^a$, $\bar{\psi}_0$ и ψ_0 , совпадающие в каждом порядке по g в пределе снятия регуляризации (по специальному рецепту) с функциями Грина обычной КХД (перенормированной в лоренцевых координатах с использованием размерной регуляризации).

2. ГАМИЛЬТониАНА НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ

Разовьем канонический формализм на световом фронте для теории с лагранжианом (2)–(4) на классе полей, удовлетворяющих условию $A_{j,-}^a = 0$ и подвергнутых обрезанию по импульсам согласно формуле (10). Прежде всего преобразуем часть лагранжиана, содержащую производные от фермионных полей ψ , записав ее в виде диагонализированной билинейной формы:

$$\sum_{l=0}^3 \frac{1}{v_l} \bar{\psi}_l i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l + c_7 \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \sum_{l,l'=0}^3 B_{ll'} \bar{\psi}_l i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{l'} = \sum_{l=0}^3 \frac{1}{w_l} \bar{\psi}'_l i \gamma^\mu \partial_\mu \psi'_l, \quad (11)$$

где

$$\psi_l = \sum_{l'=0}^3 U_{ll'} \psi'_{l'}, \quad (12)$$

причем $1/w_l$ – собственные числа матрицы $B_{ll'}$, а $U_{ll'}$ – матрица преобразования, диагонализующего $B_{ll'}$.

Используем следующее представление для биспиноров ψ'_l и матриц γ^μ :

$$\psi'_l = \begin{pmatrix} \psi'_{l+} \\ \psi'_{l-} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} -i\sigma_k & 0 \\ 0 & i\sigma_k \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее индекс k пробегает значения 1, 2. Часть уравнения Дирака, которая получается варьированием по $\psi'_{l-} +$ и не содержит производных по x^+ , есть связь, с помощью которой можно выразить ψ'_{l-} через остальные переменные:

$$\psi'_{l-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_-^{-1} Y_l, \quad (14)$$

где

$$Y_l = -\hat{\partial}_\perp \psi'_{l+} + w_l \sum_{l'=0}^3 (U^{-1})_{ll'} \left(\frac{1}{v_{l'}} M_{l'} \psi_{l'+} + c_8 \psi_+ - i c_9 \hat{A}_\perp^a \frac{\lambda^a}{2} \psi_+ \right), \quad (15)$$

а ψ_+ , в свою очередь, выражается через ψ'_{l+} по формулам (7) и (12); введено обозначение $\hat{O}_\perp \equiv O_k \sigma_k$. Подставим выражение (14) в лагранжиан (2)–(4). После этого он зависит только от переменных $A_{j,\mu}^a$, ψ'_{l+} .

Избавимся в лагранжиане от вторых производных по времени $\partial_+^2 A_{j,k}^a$ путем интегрирования по частям, после чего найдем импульсы, сопряженные с $A_{j,k}^a$:

$$\Pi_{j,k}^a = \frac{\partial L}{\partial(\partial_+ A_{j,k}^a)} = \frac{(-1)^j}{\Lambda_j^2} \left[4 \partial_-^2 \partial_+ A_{j,k}^a - 2 \partial_k \partial_-^2 A_{j,+}^a + \right. \\ \left. + \Lambda_j^2 \left(1 - \frac{\partial_-^2}{\Lambda^2} \right) \partial_- A_{j,k}^a + (-\partial_\perp^2 \delta_{kk'} + \partial_k \partial_{k'}) \partial_- A_{j,k'}^a \right] - 2c_0 \partial_- A_k^a. \quad (16)$$

Если аналогично определить импульс, сопряженный с $A_{j,+}^a$, то получится связь второго рода. С помощью преобразования Лежандра по переменным $\partial_+ A_{j,k}^a$, $\Pi_{j,k}^a$, не затрагивающего переменную $\partial_+ A_{j,+}^a$, перейдем к лагранжиану первого порядка. Этот лагранжиан будет зависеть от производных $\partial_+ \psi_l'$, $\partial_+ A_{j,+}^a$ и $\partial_+ A_{j,k}^a$ только линейно (от $\partial_+ \psi_l'$, $\partial_+ A_{j,+}^a$ линейно с самого начала). Перейдем, далее, к новым переменным, играющим роль операторов рождения и уничтожения с помощью формул типа преобразования Фурье таким образом, чтобы удовлетворить следующим условиям. Во-первых, часть лагранжиана, содержащая производные по x^+ , должна иметь стандартный канонический вид. Это автоматически решает упомянутую связь для переменной $A_{j,+}^a$. Во-вторых, из возникающего гамильтониана должна достаточно просто выделяться положительно-определенная свободная часть, диагональная в соответствующем фоковском пространстве.

Этим условиям удовлетворяют следующие замены:

$$\begin{aligned}
 A_{j,k}^a(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\varepsilon \leq |p_-| \leq V} dp_- \int_{v^2 \leq p_\perp^2 \leq V^2} d^2 p_\perp \sum_{r=0,1} \frac{a_{jr,k}^a(p) e^{-ipx} + \text{h.c.}}{\sqrt{2\omega_j}}, \\
 \Pi_{j,k}^a(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\varepsilon \leq |p_-| \leq V} dp_- \int_{v^2 \leq p_\perp^2 \leq V^2} d^2 p_\perp \left\{ \left(\sum_{r=0,1} \left[(-1)^r \sqrt{\frac{\omega_j}{2}} \delta_{kk'} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (-1)^j \Lambda^{-2} \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)^j \frac{p_-}{\sqrt{2\omega_j}} p_k p_{k'} \right] a_{jr,k'}^a(p) + \right. \\
 &\quad \left. + i(-1)^j \Lambda^{-1} \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)^{j/2} \sqrt{2p_-} p_k a_{j,+}^a(p) \right) e^{-ipx} - \text{h.c.} \right\}, \\
 A_{j,+}^a(x) &= \frac{i\Lambda_j}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\varepsilon \leq |p_-| \leq V} dp_- \int_{v^2 \leq p_\perp^2 \leq V^2} d^2 p_\perp \frac{a_{j,+}^a(p) e^{-ipx} - \text{h.c.}}{\sqrt{2p_-^3}} + \partial_-^{-1} \partial_k A_{j,k}^a, \\
 \psi_{l+,s}^i(x) &= \frac{2^{-1/4}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\varepsilon \leq |p_-| \leq V} dp_- \int_{v^2 \leq p_\perp^2 \leq V^2} d^2 p_\perp (b_{l,s}^i(p) e^{-ipx} + d_{l,s}^{i+}(p) e^{ipx}),
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $\omega_j = p_- |1 - jp_\perp^2/\mu^2|$, $O(p) \equiv O(p_-, p_\perp)$, $px \equiv p_- x^- + p_k x^k$, индекс s нумерует спинорные компоненты ($s = 1, 2$), а i — индекс фундаментального представления цветной группы.

Все операторы рождения и уничтожения определены при $p_- \geq \varepsilon$, причем предполагается, что в написанных формулах $v > \mu$.

Полученный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned}
 L = i \int_{\varepsilon \leq |p_-| \leq V} dp_- \int_{v^2 \leq p_\perp^2 \leq V^2} d^2 p_\perp \left\{ - \sum_{j,a} (-1)^j a_{j,+}^a(p) \dot{a}_{j,+}^a(p) + \right. \\
 \left. + \sum_{j,r,a,k} (-1)^r a_{jr,k}^a(p) \dot{a}_{jr,k}^a(p) + \sum_{l,i} \frac{1}{w_l} (b_l^{i+}(p) \dot{b}_l^i(p) + d_l^{i+}(p) \dot{d}_l^i(p)) \right\} - H,
 \end{aligned}$$

где $H = P_+$ — гамильтониан.

В соответствии с этим должны выполняться (анти)перестановочные соотношения

$$\begin{aligned}
 [a_{jr,k}^a(p), a_{j'r',k}^{a'}(p')] &= [a_{jr,k}^a(p), a_{j',+}^{a'}(p')] = \\
 &= [a_{jr,k}^a(p), a_{j',+}^{a'+}(p')] = [\tilde{a}_{j,+}^a(p), a_{j',+}^{a'}(p')] = 0, \\
 [a_{jr,k}^a(p), a_{j'r',k}^{a'+}(p')] &= (-1)^r \delta^{aa'} \delta_{jj'} \delta_{rr'} \delta_{kk'} \delta(p_- - p'_-) \delta^{(2)}(p_\perp - p'_\perp), \\
 [a_{j,+}^a(p), a_{j',+}^{a'+}(p')] &= -(-1)^j \delta^{aa'} \delta_{jj'} \delta(p_- - p'_-) \delta^{(2)}(p_\perp - p'_\perp), \\
 \{b_{l,s}^i(p), b_{l',s'}^{i'+}(p')\} &= \{d_{l,s}^i(p), d_{l',s'}^{i'+}(p')\} = \\
 &= w_l \delta^{ii'} \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta(p_- - p'_-) \delta^{(2)}(p_\perp - p'_\perp).
 \end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что отрицательные знаки в правой части (анти)коммутиационных соотношений отвечают степеням свободы, несущим отрицательную метрику в пространстве состояний, а соответствующие операторы являются “духовыми”.

В отличие от обычного канонического формализма на световом фронте, данный формализм не содержит связей, уменьшающих вдвое число фурье-компонент полей $A_{j,k}^a$. Чтобы при этом сохранить везде положительность импульса p_- , пришлось удвоить число операторов рождения и уничтожения $a_{jr,k}^{a+}$, $a_{jr,k}^a$, введя индекс $r = 0, 1$. Часть лагранжиана первого порядка, не содержащая производных по x^+ , совпадает с точностью до знака с гамильтонианом $H = P_+$. Он имеет вид

$$\begin{aligned}
 H = \int dx^- \int d^2 x^\perp \Big\{ \sum_{j=0,1} (-1)^j \Big[\frac{1}{8} \Big((-1)^j (\partial_-^{-1} \Pi_{j,k}^a + 2c_0 A_k^a) + \\
 + \frac{2}{\Lambda_j^2} \partial_k \partial_- A_{j,+}^a - \left(1 - \frac{\partial_\perp^2}{\Lambda^2} \right) A_{j,k}^a + \frac{\partial_\perp^2 \delta_{kk'} - \partial_k \partial_{k'}}{\Lambda_j^2} A_{j,k'}^a \Big)^2 + \\
 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\partial_\perp^2}{\Lambda^2} \right) (2\partial_k A_{j,k}^a \partial_- A_{j,+}^a - (\partial_- A_{j,+}^a)^2 - A_{j,k}^a \partial_\perp^2 A_{j,k}^a - (\partial_k A_{j,k}^a)^2) \Big] + \\
 + c_0 A_k^a \partial_\perp^2 A_k^a - \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^3 \frac{1}{w_l} Y_l^+ \partial_-^{-1} Y_l + \sqrt{2} c_9 A_+^a \psi_+^+ \frac{\lambda^a}{2} \psi_+ - L_I' \Big\}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь L_I' обозначает выражение (4), в котором отброшены члены с коэффициентами c_0 и $c_7 - c_9$; Y_l определено формулой (15), ψ_+ выражается через ψ_{l+}' по формулам (7) и (12), а величины $A_{j,k}^a$, $\Pi_{j,k}^a$, $A_{j,+}^a$, ψ_{l+}' , $\psi_{l+}'^+$ — через операторы рождения и уничтожения по формулам (17).

Запишем выражение для оператора P_- :

$$\begin{aligned}
 P_- = \int_{\varepsilon \leq |p_-| \leq V} dp_- \int_{v^2 \leq p_\perp^2 \leq V^2} d^2 p_\perp \Big\{ \sum_{j=0,1} (-1)^j \Big[-a_{j,+}^{a+}(p) a_{j,+}^a(p) + \\
 + \sum_{r=0,1} (-1)^{j+r} a_{jr,k}^{a+}(p) a_{jr,k}^a(p) \Big] + \sum_{l=0}^3 \frac{1}{w_l} (b_l^{i+}(p) b_l^i(p) + d_l^{i+}(p) d_l^i(p)) \Big\}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Этот оператор положительно-определен в пространстве Фока над вакуумом, для которого

$$a_{j,+}^a|0\rangle = a_{jr,k}^a|0\rangle = b_l^i|0\rangle = d_l^i|0\rangle \equiv 0. \tag{21}$$

В пределе снятия регуляризации в рамках теории возмущений все “духи” отключаются в том смысле, что функции Грина построенной теории стремятся к функциям Грина правильной теории, в которой “духов” нет. Это позволяет надеяться, что и вне рамок теории возмущений в пределе снятия регуляризации будет выполняться условие унитарности теории.

3. СРАВНЕНИЕ СВЕТОПОДОБНОЙ И ЛОРЕНЦЕВОЙ ТЕОРИЙ ВОЗМУЩЕНИЙ

Под результатом теории возмущений будем понимать везде набор функций Грина для полей $A_{0,\mu}^a$, $\bar{\psi}_0$ и ψ_0 , найденных методом возмущений по константе связи g , а поля $A_{1,\mu}^a$, $\bar{\psi}_l$ и ψ_l при $l = 1, 2, 3$ будем считать вспомогательными. Покажем, что гамильтониан (19) при некоторой зависимости от Λ входящих в него коэффициентов $c_0, \dots, c_9$ порождает теорию возмущений, совпадающую в пределе снятия регуляризации с перенормированной теорией возмущений, которая получается из обычного лагранжиана КХД в калибровке $A_- = 0$ при использовании предписания Мандельштама–Лейббрандта с помощью размерной регуляризации (далее “обычная” теория возмущений). О перенормировке “обычной” теории возмущений см. [18, 19]. Регуляризация снимается следующим образом: сначала $V \rightarrow \infty$, потом $\varepsilon \rightarrow 0$, затем $\Lambda \rightarrow \infty$, а M_1, M_2, M_3, μ и v считаются функциями Λ такими, что $M_1, M_2, M_3 \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$ и $v \rightarrow 0$ при $\Lambda \rightarrow \infty$. Две последние функции нужно подчинить более точным ограничениям: $v > \mu$ (это условие использовалось при построении гамильтониана) и $\mu\Lambda, v\Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$ (такие ограничения получены ниже в процессе рассуждений).

Прежде всего заметим, что нековариантная теория возмущений, порождаемая гамильтонианом, может быть получена из фейнмановской теории возмущений, построенной на основе лагранжиана, соответствующего данному гамильтониану, с помощью пересуммирования диаграмм в каждом порядке и следующего правила интегрирования: при вычислении диаграмм нужно сначала интегрировать по k_+ (по компоненте импульса, сопряженной светоподобному времени x^+), а потом по остальным компонентам [22, 23]. Поэтому нам достаточно доказать совпадение теории возмущений, полученной из лагранжиана (2)–(4) и дополненной указанным правилом интегрирования и взятием пределов, с “обычной” теорией возмущений.

Перепишем свободную часть (3) лагранжиана в виде, удобном для анализа теории возмущений,

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=0,1} (-1)^j A_{j,\mu}^a \left(1 + \frac{\partial_{\parallel}^2}{\Lambda_j^2} - \frac{\partial_{\perp}^2}{\Lambda^2} \right) (g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_{\mu} \partial_{\nu}) A_{j,\nu}^a + \sum_{l=0}^3 \frac{1}{v_l} \bar{\psi}_l (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - M_l) \psi_l \quad (22)$$

и выделим из (4) часть, соответствующую обычному взаимодействию:

$$L'_1 = g f^{abc} A_{\mu}^a A_{\nu}^b \partial^{\mu} A^{c,\nu} - \frac{g^2}{4} f^{abe} f^{cde} A_{\mu}^a A_{\nu}^b A^{c,\mu} A^{d,\nu} - g A_{\mu}^a \bar{\psi} \gamma^{\mu} \frac{\lambda^a}{2} \psi. \quad (23)$$

Будем считать, что оставшаяся часть (4) (в которой все коэффициенты разлагаются в ряды по g , начинающиеся с члена, содержащего g^2) состоит из перенормировочных

контрчленов, т.е. служит для сокращения расходимостей, возникающих по теории возмущений в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Используемые обозначения и предполагаемые дополнительные условия даны в формулах (5)–(10) и после них.

Запишем выражения для пропагаторов полей $A_{j,\mu}^a$ и ψ_l в импульсном пространстве:

$$\Delta_{j,\mu\nu}^{ab} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k_-} \right) \frac{(-1)^j}{1 - \frac{k_\parallel^2}{\Lambda_j^2} + \frac{k_\perp^2}{\Lambda^2} - i0}, \quad (24)$$

$$\Delta_l^\psi = v_l \frac{\gamma^\mu k_\mu - M_l}{k^2 - M_l^2 + i0}, \quad (25)$$

где $n_+ = 1$, $n_-, n_\perp = 0$.

Так как во взаимодействии (4) поля $A_{j,\mu}^a$ и ψ_l всегда входят в виде сумм A_μ^a и ψ , в диаграммы тоже всегда будут входить суммы пропагаторов

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab} \equiv \sum_j \Delta_{j,\mu\nu}^{ab} \quad \text{и} \quad \Delta^\psi \equiv \sum_l \Delta_l^\psi,$$

как при регуляризации Паули–Вилларса. После того как все диаграммы записаны в терминах суммарных пропагаторов, для произвольной диаграммы можно взять предел $V \rightarrow \infty$ (т.е. снять ограничения $|k_-| \leq V$ и $k_\perp^2 \leq V^2$), т.к. с учетом условий (6) пропагатор Δ^ψ убывает достаточно быстро (достаточно быстрое убывание пропагаторов (24) обеспечивается конечностью величины Λ) и интегралы сходятся.

Выражение для суммарного пропагатора $\Delta_{\mu\nu}^{ab}$ имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i0} \left(\frac{k_\parallel^2}{k_\parallel^2 - \hat{\mu}^2 + i0} g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k_\parallel^2 - \hat{\mu}^2 + i0} 2k_+ \right) R, \quad (26)$$

где

$$\hat{\mu}^2 = \mu^2 \frac{\Lambda^2 + k_\perp^2}{\Lambda^2 + \mu^2}, \quad R = \frac{1}{(1 - \frac{k_\perp^2}{\Lambda^2} - i0)(1 + \frac{\mu^2}{\Lambda^2})}. \quad (27)$$

Заметим, что при снятии обрезания ($\Lambda \rightarrow \infty$) $\hat{\mu} \rightarrow 0$ и пропагатор приобретает обычный вид. Также заметим, что в терминах пропагаторов $\Delta_{\mu\nu}^{ab}$ и Δ^ψ и при использовании вершин из (23) получается тот же набор диаграмм Фейнмана, что и в “обычной” теории возмущений.

Легко видеть, что, пока Λ конечно, в теории возмущений, построенной с помощью рассматриваемого лагранжиана, нет УФ-расходимостей. Используя этот факт, а также условие $k_\perp^2 \geq v^2$ (см. (10)), можно применить к теории возмущений формализм, изложенный в статье [13], и показать, что для большинства диаграмм результат их вычисления в координатах светового фронта (когда интегрирование сначала ведется по k_+ , а затем по остальным компонентам, как должно делаться по правилам, дающим соответствие с нековариантной теорией возмущений, см. выше) совпадает после взятия предела $\varepsilon \rightarrow 0$ с результатом вычисления тех же диаграмм в лоренцевых координатах. Несовпадение же, которое возникает в отдельных случаях, можно скомпенсировать переопределением коэффициента c_2 в лагранжиане. Это показано в приложении 1. Таким образом,

нам достаточно доказать, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ теория возмущений с суммарными пропагаторами $\Delta_{\mu\nu}^{ab}$ и Δ^ψ , взаимодействием (4) и снятыми ограничениями $\varepsilon \leq |k_-| \leq V$, $k_\perp^2 \leq V^2$ совпадает с “обычной” теорией возмущений. Подчеркнем, что теперь все вычисления можно вести в лоренцевых координатах, а значит, можно осуществить поворот Вика и перейти к вычислению диаграмм в евклидовом пространстве (заметим, что расположение полюсов пропагаторов (26) позволяет это сделать).

Пропагатор (26) отличается от пропагатора “обычной” теории возмущений, во-первых, множителем R , осуществляющим УФ-регуляризацию, во-вторых, наличием величины $\hat{\mu}$, которая стремится к нулю при $\Lambda \rightarrow \infty$, и, в-третьих, условием $k_\perp^2 \geq v^2$, причем $v \rightarrow 0$ при $\Lambda \rightarrow \infty$.

Проанализируем, как будет вести себя произвольная диаграмма Фейнмана, когда $\mu \rightarrow 0$ и $v \rightarrow 0$ (при конечном Λ). В этом случае могут появляться существенные ИК-расходимости (существенные в том смысле, что они возникают не при специальных значениях внешних импульсов, а при любых). Если такая расходимость не появляется, то при исследовании предела $\Lambda \rightarrow \infty$ для произвольной диаграммы можно сразу положить $\hat{\mu} = 0$ и считать, что $v = 0$ в ее подынтегральном выражении. При этом ошибка подынтегрального выражения будет содержать множитель $\hat{\mu}^2$, а т.к. УФ-расходимость исходной диаграммы не более чем квадратична и, значит, после выделения множителя $\hat{\mu}^2$ будет не более чем логарифмической, причем $\hat{\mu}^2 \sim \mu^2(1 + k_\perp^2/\Lambda^2)$, то условие убывания ошибки будет $\mu^2 \ln \Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$. При этом не учитывается увеличение ИК-расходимости в результате выделения множителя $\hat{\mu}^2$. Ее степень увеличивается на 2 и, т.к. расходимости ранее не было, то становится не более чем первой, т.е. интегрирование ИК-расходимости будет давать (с учетом множителя $\hat{\mu}^2$) порядок $\hat{\mu}$. Значит, интегрирование по остальным переменным породит УФ-расходимость не более чем линейную. Следовательно, условие убывания ошибки будет $\mu \Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$. Аналогичные рассуждения дают условие $v \Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$.

Анализ возникновения существенных ИК-расходимостей при $\mu, v \rightarrow 0$ сделан в приложении 2. Выясняется, что такие расходимости появляются только в случае, если диаграмма содержит слагаемые, включающие множитель вида

$$k_\mu G^{\mu\nu}(k) k_\nu, \quad (28)$$

где $G^{\mu\nu}(k)$ — произвольная двуххвостая поддиаграмма. Расходимость при этом логарифмическая: $(\ln \mu)^N$, где N — число множителей вида (28).

Понятно, почему наличие такой расходимости не порождает проблем в “обычной” теории возмущений: там выражения вида (28) равны нулю из-за тождеств Уорда, которые являются следствием точного выполнения калибровочной инвариантности. И поэтому также понятно, что нарушение калибровочной инвариантности без одновременной регуляризации существенных ИК-расходимостей делает теорию возмущений бессмысленной. В нашем случае такая регуляризация осуществляется введением величины μ .

Мы хотим доказать по индукции от низших порядков теории возмущений по числу петель к высшим, что при некотором выборе в каждом порядке коэффициентов при контрчленах в лагранжиане (4) значение каждой диаграммы Фейнмана стремится при

$\Lambda \rightarrow \infty$ к ее обычному значению, вычисленному с использованием размерной регуляризации. Ясно, что в однопетлевом порядке поддиаграмм быть не может, поэтому существенных ИК-расходимостей нет. Тогда при рассмотрении диаграммы, содержащей множитель (28), для поддиаграммы низшего порядка $G^{\mu\nu}(k)$ уже будет известно, что

$$G^{\mu\nu}(k) - G_{\text{dim}}^{\mu\nu}(k) = O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \quad (29)$$

(именно такая оценка будет получена в приложении 4), где $G_{\text{dim}}^{\mu\nu}(k)$ – значение поддиаграммы, вычисленное по размерной регуляризации, а значит, для него

$$k_\mu G_{\text{dim}}^{\mu\nu}(k) k_\nu = 0, \quad (30)$$

что следует из тождеств Уорда. Отсюда вытекает приближенное выполнение тождеств Уорда для нашей поддиаграммы:

$$k_\mu G^{\mu\nu}(k) k_\nu = O\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \quad (31)$$

Значит, слагаемые диаграммы, содержащие множитель вида (28), исчезают в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$, если $(\ln \mu)^N / \Lambda \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$, и не порождают отличия от вычисления в “обычной” теории возмущений при размерной регуляризации (возможна разница из-за расходимости диаграммы, но она полиномиальна и компенсируется контрчленами того же вида, что возникают при перенормировке). Таким образом, нам теперь достаточно доказать, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ теория возмущений в евклидовом пространстве с пропагатором (26), в котором положено $\mu = 0$, с пропагатором Δ^ψ , взаимодействием (4) и снятыми ограничениями (10) совпадает с “обычной” теорией возмущений.

Заметим, что пропагатор (26) с $\mu = 0$ отличается от “обычного” пропагатора только лоренц-инвариантным множителем R , а значит, тоже является лоренц-инвариантным, если считать, что вектор n^μ (вообще говоря, в евклидовом пространстве комплексный) преобразуется при преобразовании Лоренца, как положено, а находящаяся в знаменателе пропагатора величина k_- есть $k_\mu n^\mu$. Интересно, что в евклидовом пространстве нет других выделенных векторов, кроме n^μ , несмотря на то что в псевдоевклидовом пространстве предписание Мандельштама–Лейббрандта дополнительно выделяет поверхность $k_+ = 0$. Лагранжиан взаимодействия (4) также лоренц-инвариантен, следовательно, контрчлены, которые нужно добавлять к лагранжиану в процессе перенормировки в каждом порядке теории возмущений, будут лоренц-инвариантны. В принципе они могут зависеть от n^μ , но не от комплексно-сопряженной величины $n^{*\mu}$ (см. вывод в конце приложения 4). Однако существует симметрия относительно умножения вектора n^μ на положительное число (см. (26), где положено $\mu = 0$ и величина k_- в знаменателе второго слагаемого в скобках заменена на $k_\mu n^\mu$; см. также вывод в конце приложения 4), следовательно, зависимости от n^μ нет, т.к. контрчлены полиномиальны по полям и импульсам (см. приложение 4), $n_\mu n^\mu = 0$, а n^μ в числителе стоять не может, т.к. мы рассматриваем диаграммы Фейнмана для функций Грина, внешние линии которых не могут нести верхний индекс “–”, поскольку это дает нуль при свертке с пропагаторами.

Очевидно, что контрчлены будут обладать также глобальной калибровочной инвариантностью, т.к. ей обладает исходный лагранжиан. Проанализируем возможный вид контрчленов.

Существуют логарифмически расходящиеся диаграммы с четырьмя глюонными хвостами. В приложении 3 показано, что структура такой произвольной диаграммы по значкам калибровочной группы может быть только $f^{abe}f^{cde}$ или $\delta^{ab}\delta^{cd}$. Учитывая лоренц-инвариантность, заключаем, что общий вид соответствующих контрчленов исчерпывается слагаемыми с коэффициентами c_4 – c_6 в лагранжиане (4), а значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором этих коэффициентов.

Существуют также расходящиеся диаграммы с тремя глюонными хвостами. Они, вообще говоря, могут расходиться линейно, но т.к. из-за лоренц-инвариантности расходящаяся часть должна содержать множитель k^μ , то на самом деле расходимость логарифмическая. В приложении 3 показано, что структура такой произвольной диаграммы по значкам калибровочной группы может быть только f^{abc} , что дает для общего вида расходимости слагаемое с коэффициентом c_3 в (4), а значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором этого коэффициента. Кроме того, существуют логарифмически расходящиеся диаграммы с двумя фермионными и одним глюонным хвостами. Очевидно, что общий вид расходимости дается слагаемым с коэффициентом c_9 в (4), и, значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором этого коэффициента.

Далее, имеются расходящиеся диаграммы с двумя глюонными хвостами. Они расходятся квадратично, и общий вид расходимости дается слагаемым с коэффициентом c_2 в (4). Однако после вычитания квадратичной может остаться линейная расходимость. На самом деле из-за лоренц-инвариантности ее нет, а есть только логарифмическая. Очевидно, что общий вид этой расходимости дается слагаемыми с коэффициентами c_0 , c_1 в (4), и, значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором коэффициентов c_0 – c_2 . Существуют также расходящиеся диаграммы с двумя фермионными хвостами. Они расходятся линейно, и общий вид расходимости дается слагаемым с коэффициентом c_8 в (4). Но после вычитания линейной может остаться логарифмическая расходимость. Очевидно, что общий вид этой расходимости дается слагаемым с коэффициентом c_7 в (4), и, значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором коэффициентов c_7 , c_8 .

Заключаем, что теория возмущений с пропагатором (26), в котором положено $\mu = 0$, с пропагатором Δ^ψ , взаимодействием (4) и снятыми ограничениями (10) (такую теорию возмущений мы должны сравнивать с “обычной”) перенормируема путем перенормировки коэффициентов c_0 – c_9 . Понятно, что, правильно подбирая добавки к величинам c_0 – c_9 в каждом порядке теории возмущений, т.е. распоряжаясь конечными ренормировками, мы можем добиться совпадения в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ значения каждой диаграммы Фейнмана с ее “обычным” значением (показывающая это схема рассуждений кратко приведена в приложении 4). Это мы и стремились доказать.

Благодарности. Эта работа выполнена при поддержке одного из авторов (С. А. П.) Международным центром фундаментальной физики в Москве (ICFPM) и Эйлеровской программой Свободного университета Берлина.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Будем сравнивать результат вычисления произвольной диаграммы Фейнмана в координатах светового фронта (с последующим взятием предела $\varepsilon \rightarrow 0$) и в лоренцевых координатах. Диаграмма строится из суммарных пропагаторов (26) и Δ^ψ , а также из вершин, содержащихся в лагранжиане взаимодействия (4), с учетом условий $|k_-| \geq \varepsilon$, $k_\perp^2 \geq v^2$, но без учета условий $|k_-| \leq V$, $k_\perp^2 \leq V^2$.

Используем формализм, изложенный в статье [13]. Вид пропагатора (26) при условии $k_\perp^2 \geq v^2$, которое эквивалентно наличию в двумерии ненулевой массы, является допустимым для этого формализма. Легко видеть, что для всех диаграмм индекс $\omega_\parallel$ УФ-расходимости по k_+ , k_- отрицателен, поэтому для нашей теории нет описанных в [13] особых случаев. Числители всех подынтегральных выражений диаграмм Фейнмана являются полиномами, следовательно, $\tau > 0$, $\eta > 0$ (обозначения см. в [13]). Основная формула выглядит следующим образом:

$$\sigma = \min(\tau, \omega_- - \omega_+ - \mu + \eta), \quad (\text{П.1.1})$$

где минимум берется по всем поддиаграммам, и искомая разница между светоподобным и лоренц-инвариантным расчетами ведет себя как ε^σ .

Внешняя глюонная линия, несущая значок $+$, дает вклад $+1$ в величину $\omega_- - \omega_+$. Пара внешних фермионных линий, которые соединены непрерывной фермионной линией, дает в величину $\omega_- - \omega_+$ вклад -1 (если по значкам этой пары диаграмма пропорциональна γ^+), либо $+1$ (если она пропорциональна γ^-), либо 0 (в остальных случаях). Из формулы (26) видно, что суммарный глюонный пропагатор Π -линии без учета множителей из вершин дает в величину μ вклад -2 (если пропагатор несет значки $\perp\perp$) либо -3 (если пропагатор несет значки $\perp+$ или $++$). Множители из вершин, имеющих индекс $+$, дают вклад $+1$ в величину μ . Из формулы (25) с учетом условий (6) видно, что суммарный фермионный пропагатор Π -линии дает в величину μ вклад -2 (это число увеличится, если уменьшить число дополнительных фермионных полей Паули-Вилларса, что приведет к разрушению доказательства, поэтому число дополнительных фермионных полей не может быть меньше трех). Анализируя эту информацию, получаем общий вид диаграммы, для которой $\sigma \leq 0$ (причем на самом деле $\sigma = 0$). Он изображен на рис. 1.

Рис. 1. Общий вид диаграммы КХД, для которой существует разница между светоподобным и лоренц-инвариантным расчетами; p – внешний импульс, символы $+$ и $\perp$ на линиях означают, что пропагатор имеет соответствующий лоренцев индекс.

Условия тривиальной зависимости от внешних импульсов для такой диаграммы выполнены (см. статью [13]), поэтому искомая разница для этой диаграммы есть

$$C g_{AB}, \quad (\text{П.1.2})$$

т.е. зависимость от внешних импульсов отсутствует, где C – константа в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ (возможной логарифмической поправки $\ln(\varepsilon/u)$ нет, т.к. в силу лоренц-инвариантности в пространстве k_+ , k_- ,

которая выполняется для лагранжиана, величина u должна вести себя как “—”-компонента вектора, а таких выражений нет; могла бы быть только компонента внешнего импульса, но мы уже знаем, что от нее зависимости нет).

Таким образом, вся разница компенсируется добавлением к лагранжиану слагаемого вида

$$A_\mu^a g^{\mu\nu} A_\nu^a, \quad (\text{П.1.3})$$

т.е. переопределением коэффициента c_2 в формуле (4).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Проанализируем возможность возникновения существенных (т.е. имеющих место при любых значениях внешних импульсов) ИК-расходимостей в диаграммах Фейнмана в евклидовом пространстве. Рассматриваем два случая расходимости: при интегрировании только по продольным импульсам (они могут появиться из-за члена, пропорционального $k_+/k_\parallel^2$ в пропагаторе глюона) и при интегрировании по всем импульсам (в них дадут вклад и множители $1/k^2$ в пропагаторах).

Первый случай. Исследуем, существует ли расходимость при стремлении части (или всех) продольных петлевых импульсов к каким-либо конечным значениям. Предполагаем, что внешние импульсы не принимают специальных значений (когда сумма части их равна нулю). Пусть, кроме того, петлевые поперечные импульсы таковы, что для всех пропагаторных импульсов $Q_\perp \neq 0$ (при нарушении этого условия нужно учитывать лишние вклады от $d^2 Q_\perp$ – это второй случай). Тогда расходимость может возникнуть только, если для какой-нибудь глюонной линии $Q_\parallel = 0$. Порождающий возможную расходимость множитель в подынтегральном выражении имеет вид

$$\frac{Q_\mu n_\nu + Q_\nu n_\mu}{Q_\alpha n^\alpha} = -\sqrt{2} \frac{(Q_\mu n_\nu + Q_\nu n_\mu)(iQ_0 + Q_3)}{Q_0^2 + Q_3^2} \quad (\text{П.2.1})$$

и является полюсом не более чем первого порядка. Рассмотрим точку в пространстве петлевых импульсов, в которой для некоторого набора линий $Q_\parallel = 0$. Найдем степень ИК-расходимости σ . Каждая линия из указанного набора дает вклад -1 (см. (П.2.1)), если она несет значки $+\perp$, или 0 , если $\perp\perp$ либо $++$. Исключим из набора все линии со значками $\perp\perp$ и $++$, тогда каждая линия набора будет давать вклад -1 . Положительный вклад в σ дают дифференциалы петлевых импульсов $d^2 q_\parallel$ (элементы объема интегрирования). Нужно учитывать только те петлевые импульсы, изменение которых (при фиксированных остальных) нарушает условие $Q_\parallel = 0$ для линий набора. Число таких петлевых импульсов – это число линий набора, импульсы которых можно задать произвольно, т.е. число независимых из них. Общий положительный вклад в σ будет равен этому числу, умноженному на 2. Найдем и другие его вклады в ИК-расходимость.

Разорвем все линии набора. Диаграмма развалится на $n+1$ связанных частей ($n = 0, 1, \dots$). Все внешние к полной диаграмме импульсы будут присоединены к одной части (иначе внешние импульсы принимали бы специальные значения). Назовем ее выделенной, а остальные – невыделенными.

Заметим, что невыделенная часть – это поддиаграмма, и если она имеет внешние лоренцевы значки, то она должна быть пропорциональна несущим эти значки импульсам ее внешних линий. (А коэффициент пропорциональности не может давать вклад в σ из-за лоренц-инвариантности, инвариантности относительно умножения величины n^μ на положительное число и условия $Q_\perp \neq 0$.) Каждая внешняя линия, несущая значок k ($k = 1, 2$), дает множитель k^k или $g^{\mu k}$, а несущая значок $+$ – множитель k^+ , где k – линейная комбинация импульсов ее внешних линий, т.е. импульсов линий набора. Поэтому каждая внешняя линия, несущая значок $+$, дает в σ вклад $+1$, а несущая значок k – нуль. Пусть m – суммарный вклад в σ , получающийся таким образом из невыделенных частей.

Пусть s – число линий в наборе, а r – число линий набора, внешних к выделенной части. Каждая линия набора несет на одном конце значок $+$, поэтому

$$m \geq s - r. \quad (\text{П.2.2})$$

Число независимых линий в наборе равно $s - n$ (каждая из $n + 1$ частей дает δ -функцию, одна δ -функция является общей для всей диаграммы). По определению σ имеем

$$\sigma = 2(s - n) + m - s. \quad (\text{П.2.3})$$

Используя (П.2.2), получаем

$$\sigma \geq 2(s - n) - r. \quad (\text{П.2.4})$$

У каждой невыделенной части имеется минимум 2 внешние линии. Значит, у всех частей (выделенной и невыделенных) вместе есть минимум $2n + r$ внешних линий набора. Они все соединяются друг с другом попарно, следовательно,

$$s \geq \frac{1}{2}(2n + r) = n + \frac{r}{2}, \quad (\text{П.2.5})$$

откуда находим, что $\sigma \geq 0$, т.е. расходимость может быть не более чем логарифмической.

Рис. 2. Общий вид диаграммы, дающей существенную ИК-расходимость в КХД; символы $+$ и $\perp$ на линиях означают, что пропагатор имеет соответствующий лоренцев индекс.

Найдем общий случай, дающий эту расходимость. В этом случае все использованные неравенства должны обращаться в равенства, т.е. $m = s - r$, и все невыделенные части — двухвостки. Общий вид такой диаграммы показан на рис. 2. Здесь каждая цепочка содержит множитель $k_k G^{kk'}(k) k_{k'}$, который можно представить в виде

$$k_\mu G^{\mu\nu}(k) k_\nu - k_+ G^{+\nu} k_\nu - k_\mu G^{\mu+}(k) k_+ - k_+ G^{++} k_+. \quad (\text{П.2.6})$$

Все слагаемые, кроме первого, содержат дополнительный множитель k_+ , что увеличивает σ на 1 и делает ее положительной, а значит, уничтожает расходимость. Поэтому можно считать, что диаграмма, имеющая расходимость, обязательно содержит один или несколько множителей вида

$$k_\mu G^{\mu\nu} k_\nu. \quad (\text{П.2.7})$$

Второй случай. Теперь предполагаем, что часть четырехмерных импульсов (или все) стремится к определенным конечным значениям. Рассуждения проводятся аналогично. Пропагатор глюона теперь дает полюс 2-го порядка (а фермионный пропагатор полюсов не дает из-за наличия массы). Из размерных соображений следует, что каждая невыделенная часть дает вклад в σ не менее чем 4 минус число ее внешних хвостов (это верно также для расходящихся диаграмм с оговоркой для двухвостки, что нужно не зависящую от импульса часть, пропорциональную $g^{\mu\nu}$, вычитать вместе с расходящейся частью, т.е. нужно в каждом порядке нормировать массу глюона на нуль; последнее не нарушает выполнения тождеств Уорда в пределе снятия регуляризации). Поэтому теперь

$$\begin{aligned} m &\geq 4n - (2s - r), \\ \sigma &= 4(s - n) + m - 2s, \end{aligned} \quad (\text{П.2.8})$$

откуда

$$\sigma \geq r > 0, \quad (\text{П.2.9})$$

т.е. расходимости нет.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Рассмотрим структуру по значкам глобальной калибровочной группы произвольной, имеющей три глюонных хвоста диаграммы теории возмущений, построенной на основе лагранжиана (2)–(4). Эта структура имеет вид A^{abc} . Глюонный пропагатор пропорционален δ^{ab} , тройная глюонная вершина пропорциональна f^{abc} , четверная – $f^{abe}f^{cde}$ или $\delta^{ab}\delta^{cd}$. Кроме того, могут быть фермионные петли. Каждая фермионная петля дает множитель

$$\text{Re Tr}(\lambda^a \dots \lambda^c), \quad (\text{П.3.1})$$

если в петле четное число вершин, либо

$$i \text{Im Tr}(\lambda^a \dots \lambda^c), \quad (\text{П.3.2})$$

если нечетное (аналогично теореме Фарри в квантовой электродинамике). Учитываем только связанные с калибровочными значками множители.

Из (8) следует, что

$$\lambda_{\alpha\beta}^a \lambda_{\gamma\delta}^a = 2 \left(\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right). \quad (\text{П.3.3})$$

Можно также написать

$$\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) = i2f^{abc} + 2d^{abc}, \quad (\text{П.3.4})$$

откуда следует, что

$$f^{abc} = -\frac{i}{4} (\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c) - \text{Tr}(\lambda^c \lambda^b \lambda^a)). \quad (\text{П.3.5})$$

Заменим в диаграмме все величины f^{abc} правой частью формулы (П.3.5), а затем все появившиеся выражения вида $\lambda^a \lambda^a$ заменим согласно формуле (П.3.3). В результате останутся только три матрицы λ , несущие три внешних значка диаграммы. Эти матрицы будут соединены по своим значкам фундаментального представления друг с другом (т.к. после применения формулы (П.3.3) остаются только символы Кронекера), т.е. A^{abc} состоит из слагаемых вида

$$\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c). \quad (\text{П.3.6})$$

Заметим, что при применении формулы (П.3.5) появился множитель i^N , где N – число тройных глюонных вершин. Применение формулы (П.3.3) новых мнимых множителей не дает. Исходное же выражение состояло из вещественных величин δ^{ab} , f^{abc} и величин (П.3.1), (П.3.2), первая из которых вещественная, а вторая мнимая, поэтому оно будет пропорционально $i^{N'}$, где N' – число фермионных петель с нечетным числом вершин. Легко показать, что у диаграммы с тремя глюонными

хвостами величины N и N' имеют разную четность. Значит, чтобы получить согласование степеней i , необходимо, чтобы сумма выражений вида (П.3.6) была мнимой, откуда с помощью (П.3.4) заключаем, что

$$A^{abc} \sim f^{abc}. \quad (\text{П.3.7})$$

Теперь аналогичным образом рассмотрим структуру произвольной диаграммы с четырьмя глюонными хвостами. Она имеет вид A^{abcd} . Величина A^{abcd} будет состоять из слагаемых вида $\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c \lambda^d)$ и $\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b) \text{Tr}(\lambda^c \lambda^d)$ (отметим, что последнее выражение явно вещественно). Легко показать, что у диаграммы с четырьмя глюонными хвостами величины N и N' имеют одинаковую четность. Поэтому сумма указанных выражений, из которых состоит A^{abcd} , должна быть вещественной. Заметим, что величину $\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c \lambda^d)$ можно представить как сумму ее симметризованной части (явно вещественной) и выражений вида $if^{abe} \text{Tr}(\lambda^c \lambda^d \lambda^e)$. В силу условия вещественности последнее выражение должно быть суммой величин вида $f^{abe} f^{cde}$. Симметризованная же часть величины $\text{Tr}(\lambda^a \lambda^b \lambda^c \lambda^d)$, как показывает прямой расчет, пропорциональна симметризованной части величины $\delta^{ab} \delta^{cd}$. Поэтому можно заключить, что A^{abcd} состоит из слагаемых вида

$$f^{abe} f^{cde}, \quad \delta^{ab} \delta^{cd}. \quad (\text{П.3.8})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Рассмотрим диаграмму, построенную из пропагатора (26), в котором положено $\mu = 0$, пропагатора Δ^ψ и из вершин, входящих в (23), при снятых ограничениях (10). Остальные вершины, входящие в (4), участвуют только в приведении к “правильному”, т. е. вычисленному по размерной регуляризации, значению (в том числе в сокращении расходимости) поддиаграмм в предыдущих порядках теории возмущений. Покажем, что, правильно подбирая добавки к коэффициентам в лагранжиане в каждом порядке теории возмущений, можно добиться совпадения в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ значения такой диаграммы Фейнмана (точнее, конечной суммы диаграмм данного порядка) с ее значением, вычисленным по размерной регуляризации.

Ясно, что суммарный пропагатор фермионов можно записать в виде

$$\Delta^\psi = \frac{k_\mu \gamma^\mu}{k^2 - M_0^2 + i0} R' + \frac{M_0}{k^2 - M_0^2 + i0} R'', \quad (\text{П.4.1})$$

где R' и R'' являются обрезаящими множителями, т. е. хорошо убывают, причем $R', R'' \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 1$. Представим диаграмму в виде суммы так, чтобы одно слагаемое содержало только один член числителя каждого фермионного пропагатора. Одно такое слагаемое можно записать в виде

$$I = \int dk F(k, p) f_\Lambda(k, p), \quad (\text{П.4.2})$$

где dk символически обозначает все элементы объема, $f_\Lambda(k, p)$ – произведение всех множителей R', R'' , появляющихся в фермионных пропагаторах, и всех множителей R , появляющихся в бозонных пропагаторах (26). Через k обозначены импульсы интегрирования, а через p – внешние импульсы диаграммы.

Очевидно, что можно найти полиномиальную по p функцию $\hat{F}(k, p)$ такую, что у $\hat{F}(k, p)$ и $F(k, p)$ будут одинаковыми несколько первых членов асимптотики по k на бесконечности, так что разность $F(k, p) - \hat{F}(k, p)$ будет интегрируема (см. уточнение ниже) и $\hat{F}(k, p)$ будет лоренц-ковариантна и не будет обладать неинтегрируемыми ИК-особенностями. Поэтому можно написать

$$I = \int dk (F(k, p) - \hat{F}(k, p)) f_\Lambda(k, p) + \int dk \hat{F}(k, p) f_\Lambda(k, p). \quad (\text{П.4.3})$$

В первом интеграле с точностью до поправок порядка $1/\Lambda$ можно пренебречь множителем $f_\Lambda(k, p)$ (т. к. есть сходимости и без него), после чего можно считать, что этот интеграл вычисляется при

размерной регуляризации, а затем разбить его на два интеграла (считая, что оба они перенормированы методом размерной регуляризации). В результате получится выражение

$$I = \int^{\dim} dk F(k, p) - \int^{\dim} dk \hat{F}(k, p) + \int dk \hat{F}(k, p) f_{\Lambda}(k, p). \quad (\text{П.4.4})$$

Теперь, разложив функцию $f_{\Lambda}(k, p)$ в последнем интеграле в (П.4.4) в ряд по p в окрестности нуля (заметим, что это разложение хорошо определено при любых k), мы можем показать, что последний интеграл в (П.4.4) представляет собой полином по p плюс поправки порядка $1/\Lambda$.

К приведенным рассуждениям необходимо сделать следующее уточнение. До того как вычитать полную расходимость диаграммы, необходимо убедиться, что она не имеет подрасходимостей по части переменных интегрирования. Такие подрасходимости могут порождаться поддиаграммами (что учитывается перенормировкой в низших порядках) либо расходимостью при интегрировании по части компонент импульса. Для КХД в калибровке $A_{-} = 0$ последнее возможно из-за плохого убывания пропагатора в направлении $k_{\perp}$. Известно [24], что указанная расходимость присутствует, если есть неотрицательный индекс УФ-расходимости по части компонент. Из структуры пропагаторов видно, что в евклидовом пространстве вычитание полной расходимости может не уменьшать только индекс $\omega_{\perp}$ УФ-расходимости по $k_{\perp}$, что приводит к необходимости предварительного вычитания подрасходимости по $k_{\perp}$, зависящей от проекций $p_{\mu} n^{\mu}$ внешних импульсов, вообще говоря, произвольным, неполиномиальным образом. Анализ диаграмм для функций Грина показывает, что $\omega_{\perp} \geq 0$ только для однопетлевых двухсторонних диаграмм, причем $\omega_{\perp} = 0$. У таких диаграмм есть только один внешний импульс, следовательно, неполиномиальной зависимости от $p_{\mu} n^{\mu}$ быть не может, поскольку имеется инвариантность относительно умножения вектора n^{μ} на положительное число, и для диаграмм функций Грина вектор n^{μ} с несвернутым индексом μ не может стоять в числителе, т.к. это дает нуль при свертке с пропагаторами. Если бы мы рассматривали 1-неприводимые вершинные части, для диаграмм которых последнее условие отсутствует, то расходящиеся части могли бы быть неполиномиальными [18, 19] и количество расходящихся по $k_{\perp}$ диаграмм было бы гораздо больше.

Понятно, что при вычислении по размерной регуляризации сходящихся интегралов результат не может зависеть от величины $n^{*\mu}$, комплексно-сопряженной к n^{μ} (в принципе такая зависимость может появиться в процессе вычитания расходимостей с помощью размерной регуляризации). Отсюда с помощью полиномиальности расходящихся частей можно получить, что результат перенормировки по размерной регуляризации расходящейся диаграммы для функции Грина представляет собой сумму полинома по импульсам с коэффициентами, зависящими от $n^{*\mu}$, и выражения, от $n^{*\mu}$ не зависящего (для этого достаточно выделить в подынтегральном выражении несколько первых членов ряда Тейлора по внешним импульсам, для которых интеграл расходится). Для соответствующей диаграммы вершинной части будет, возможно, еще прибавляться зависящее от $n^{*\mu}$ неполиномиальное слагаемое. Можно показать, что тождества Уорда для 1-неприводимых вершинных частей (в данном случае линейные по диаграммам) будут выполняться независимо для суммы указанных слагаемых, зависящих от $n^{*\mu}$, и для оставшегося слагаемого. Это можно сделать, заметив, что для слагаемых, содержащих вектор $n^{*\mu}$ и не содержащих его, зависимость от внешних импульсов будет разная, в то время как сумма должна быть все время равна нулю. Таким образом, можно, не нарушая тождеств Уорда, изменить рецепт вычитания при перенормировке с помощью размерной регуляризации так, чтобы все выражения, зависящие от $n^{*\mu}$, были отнесены к контрчленам, а перенормированная диаграмма от $n^{*\mu}$ не зависела. Значит, первый интеграл в (П.4.4) не зависит от $n^{*\mu}$. Кроме того, ясно, что он обладает инвариантностью по умножению вектора n^{μ} на положительное число (см. выше). Явно видно, что этими же свойствами обладает I .

Отсюда можно сделать следующий вывод: разность между диаграммой, описанной в начале этого приложения (точнее, конечной суммой таких диаграмм данного порядка), и ее значением, вычисленным по размерной регуляризации (т. е. аналогичной суммой первых интегралов в (П.4.4)), с точностью до поправок порядка $1/\Lambda$ сводится к полиному по внешним импульсам, коэффициенты которого не зависят от $n^{*\mu}$ и обладают инвариантностью по отношению к умножению вектора n^{μ} на положительное число. Указанная разность может быть скомпенсирована добавкой к коэффициентам, содержащимся в выражении (4) в данном порядке.

Список литературы

- [1] V. A. Fock. Z. Phys. 1932. V. 75. № 9–10. P. 622; V. 76. № 11–12. P. 852; В. А. Фок. Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957.
- [2] I. E. Tamm. J. Phys. (USSR). 1945. V. 9. № 6. P. 449; И. Е. Тамм. Релятивистское взаимодействие элементарных частиц. В сб.: Проблемы современной физики. № 10: Метод Тамма–Данкова. Гл. ред. А. П. Комар. М.: ИЛ, 1955. С. 219.
- [3] S. M. Dancoff. Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 382.
- [4] P. A. M. Dirac. Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392.
- [5] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento. 1963. V. 29. № 2. P. 370.
- [6] В. Г. Кадышевский, А. Н. Тавхелидзе. Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел. В сб.: Проблемы теоретической физики. Сб., посвященный Н. Н. Боголюбову. Ред. Д. И. Блохинцев и др.. М.: Наука, 1969. С. 261.
- [7] Р. Н. Фаустов. ТМФ. 1970. Т. 3. № 2. С. 240; R. N. Faustov. Ann. Phys. 1973. V. 78. № 1. P. 176.
- [8] В. Р. Гарсеванишвили, А. Н. Квинишидзе, В. А. Матвеев и др. ТМФ. 1975. Т. 23. № 3. С. 310.
- [9] В. А. Карманов. ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. № 3. С. 525.
- [10] E. Tomboulis. Phys. Rev. D. 1973. V. 8. P. 2736.
- [11] A. Cachet. Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 452.
- [12] V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov. Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 437.
- [13] С. А. Пастон, В. А. Франке. ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 399.
- [14] M. Burkardt, A. Langnau. Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1187; P. 3857.
- [15] M. Burkardt. Adv. Nucl. Phys. 1996. V. 23. P. 1.
- [16] K. G. Wilson, T. S. Walhout, A. Harindranath, W.-M. Zhang, R. J. Perry, S. D. Glazek. Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 6720.
- [17] B. H. Allen, R. J. Perry. Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 125017.
- [18] A. Bassetto, M. Dalbosco, R. Soldati. Phys. Rev. D. 1987. V. 36. P. 3138.
- [19] A. Bassetto, G. Nardelli, R. Soldati. Yang-Mills theories in algebraic non covariant gauges. Singapore: World Scientific, 1991.
- [20] S. Mandelstam. Nucl. Phys. B. 1983. V. 213. P. 149.
- [21] G. Leibbrandt. Phys. Rev. D. 1984. V. 29. P. 1699.
- [22] W.-M. Zhang, A. Harindranath. Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 4868; P. 4881; P. 4903.
- [23] N. E. Ligterink, B. L. G. Bakker. Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 5954.
- [24] S. Weinberg. Phys. Rev. 1960. V. 118. P. 838.

Поступила в редакцию 13.I.1999 г.