Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Фок, Л. О. Чехов, Квантовые пространства Тейхмюллера, *ТМФ*, 1999, том 120, номер 3, 511–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 02:20:41

КВАНТОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

Явно описана некоммутативная деформация $*$ -алгебры функций на пространстве Тейхмюллера римановых поверхностей с дырками, эквивариантная относительно действия группы классов отображений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основная цель данной работы – дать описание пространства Гильберта и наблюдаемых в $(2+1)$ -мерной квантовой гравитации. Для этого используется следующая схема. В соответствии с работами Э. и Г. Верлинде [1] и Виттена [2] (см. также книгу Карлипа [3]) классическое фазовое пространство эйнштейновской гравитации на трехмерном многообразии является пространством Тейхмюллера двумерного многообразия границы. (Это аналогично тому, как классическое фазовое пространство трехмерной теории Черна–Саймонса оказывается пространством модулей плоских связностей граничного многообразия.) Пространство Тейхмюллера обладает канонической пуассоновой структурой (форма Вейля–Петерссона), группой симметрий которой является группа классов отображений. Согласно принципу соответствия в квантовой теории: 1) алгебра наблюдаемых – это некоммутативная деформация $*$ -алгебры функций на пространстве Тейхмюллера в направлении, задаваемом пуассоновой структурой; 2) пространство Гильберта – это пространство $*$ -представлений полученной квантовой алгебры; 3) группа симметрий задает автоморфизмы алгебры наблюдаемых. Для решения этой проблемы достаточно построить семейство $*$ -алгебр, зависящее от параметра квантования $\hbar$, задать действие группы классов отображений с помощью внешних автоморфизмов и показать, что построенные алгебра и групповое действие воспроизводят классическую алгебру, классическое действие группы классов отображений и пуассонову структуру в пределе $\hbar \rightarrow 0$ (если предположить существование и единственность процедуры квантования пуассонова многообразия).

В данной статье решается очень близкая, хотя и не вполне идентичная проблема. Рассматриваются открытые двумерные поверхности (хотя эта задача также может быть

* Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: fock@heron.itep.ru

† Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: chekhov@mi.ras.ru

интерпретирована в рамках $(2+1)$ -мерной гравитации, ее описание достаточно объемно и выходит за рамки настоящей работы). Соответствующее пространство Тейхмюллера обладает вырожденной пуассоновой структурой Вейля–Петерссона, а группа классов отображений является группой симметрий. Описывается деформационное квантование соответствующих пространств Тейхмюллера, при этом группы классов отображений действуют внешними автоморфизмами; также дается описание унитарных представлений соответствующих алгебр и рассматривается индуцированное действие группы классов отображений на пространстве представлений.

Показывается, что хотя действие группы классов отображений на алгебре наблюдаемых зависит от параметра квантования $\hbar$, это действие инвариантно относительно замены $\hbar$ на $1/\hbar$.

Заметим, что в соответствии с [1] пространство представлений алгебры наблюдаемых также может быть интерпретировано как пространство конформных блоков конформной теории Лиувилля. Таким образом, описываемая конструкция задает определенные (вероятно, не все возможные) пространства конформных блоков, а группа симметрий есть группа классов отображений для соответствующей конформной теории поля.

Описание основано на следующей идее. Группа классов отображений допускает очень простое описание в терминах генераторов и соотношений в некотором группоиде, называемом *модулярным группоидом* (раздел 2). Координаты на пространстве Тейхмюллера вводятся таким образом, что действие группы классов отображений и форма Вейля–Петерссона имеют весьма простой и явный вид (раздел 3). Затем алгебра функций на пространстве Тейхмюллера деформируется в алгебру Вейля, задается действие генераторов модулярного группоида и проверяется, что эти генераторы удовлетворяют соотношениям, следующим из требования согласованности квантовых автоморфизмов (раздел 4). Основным математическим ингредиент данной конструкции есть квантовый логарифм (квантовый дилогарифм), введенный Фаддеевым и Кашаевым [4]. Соответствующее пятичленное соотношение интерпретируется как единственное нетривиальное соотношение в модулярном группоиде. Свойства модулярного группоида доказываются в п. 4.1.

Сходное описание было разработано одновременно и независимо Кашаевым [5]. Однако описываемая здесь конструкция представляется более простой и универсальной.

2. ГРУППА КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ. ОПИСАНИЕ В ТЕРМИНАХ ГРАФОВ

Группа классов отображений $\mathcal{D}(S)$ – это группа гомотопических классов диффеоморфизмов поверхности S . В данном разделе дается простое комбинаторное описание группы $\mathcal{D}(S)$ для любой открытой поверхности S .

Напомним, что *ленточный граф* – это граф, в котором в каждой вершине задан циклический порядок концов ребер, входящих в эту вершину. Всякий ленточный граф содержит выделенный (конечный) набор замкнутых путей, называемых *гранями*. Грани – это пути, поворачивающие в одну и ту же сторону (для трехвалентного графа), в каждой вершине. Приклеивая кольцевые области (гиперболоиды) к графу вдоль каж-

дой грани, можно получить двумерную поверхность, в которую вкладывается данный граф. Таким образом, можно построить соответствие между ленточными графами и топологическими типами открытых двумерных поверхностей. Каждая такая поверхность соответствует непустому конечному набору графов, и это в точности те графы, которые могут быть вложены в данную поверхность таким образом, чтобы поверхность могла быть стянута на этот граф, причем циклический порядок концов ребер совпадает с порядком, индуцированным ориентацией поверхности.

Всякому ленточному графу отвечает единственный дуальный граф — ленточный граф, в котором вершины соответствуют граням исходного графа, и наоборот. Каждое ребро исходного графа отвечает ребру дуального, которое соединяет вершины (грани исходного графа), инцидентные данному ребру.

Обозначим через $|\Gamma|(S)$ множество комбинаторных типов трехвалентных графов, соответствующих данной поверхности. Для каждого элемента $|\Gamma|(S)$ выберем *маркировку*, т.е. нумерацию ребер. Обозначим через $\Gamma(S)$ множество изотопических классов вложений маркированных ленточных графов в поверхность S . Набор вложений меняется при введении маркировки, поскольку некоторые графы изначально могут иметь собственные нетривиальные группы симметрий и маркировка необходима, чтобы устранить эти дополнительные симметрии. (Здесь и ниже символ $|\cdot|$ обозначает класс диффеоморфизмов.)

Группа классов отображений $\mathcal{D}(S)$ действует свободно на пространстве вложенных маркированных графов, при этом пространство комбинаторных графов — это факторпространство

$$\Gamma(S)/\mathcal{D}(S) = |\Gamma|(S).$$

Абстрактная группа имеет смысл категории с единственным объектом, при этом все морфизмы должны быть обратимы. Аналогично *группоид* — это категория, в которой все морфизмы обратимы, а любые два объекта связаны по крайней мере одним морфизмом. Каждому группоиду ставится в соответствие группа автоморфизмов объекта. Поскольку группы автоморфизмов различных объектов очевидно изоморфны, то можно каноническим образом поставить группу в соответствие группоиду. Задача состоит в том, чтобы построить группоид, порождающий группу классов отображений и описываемый в терминах генераторов и соотношений проще, чем сама группа классов отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть множество $|\Gamma|(S)$ — это множество объектов. Для любых двух графов $|\Gamma|, |\Gamma_1| \in |\Gamma(S)|$ зададим морфизм из $|\Gamma|$ в $|\Gamma_1|$ как гомотопический класс маркированных вложений обоих графов $|\Gamma_1|$ и $|\Gamma_2|$ в S по модулю диагонального действия группы классов отображений; этот морфизм обозначается как $|\Gamma, \Gamma_1|$. Для трех вложенных маркированных графов $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ композиция $|\Gamma, \Gamma_1|$ и $|\Gamma_1, \Gamma_2|$ по определению равна $|\Gamma, \Gamma_2|$. Такая категория называется *модулярным группоидом*.

Легко проверить, что: 1) произведение морфизмов однозначно определено; 2) класс диагональных вложений $|\Gamma, \Gamma|$ — тождественный морфизм, а обратным к морфизму $|\Gamma, \Gamma_1|$ является морфизм $|\Gamma_1, \Gamma|$; 3) группа автоморфизмов объекта есть группа классов отображений $\mathcal{D}(S)$.

Чтобы сформулировать другую совокупность свойств, надо рассмотреть выделенный набор морфизмов, которые называются *флипами* и *симметриями графа*. Морфизм $|\Gamma, \Gamma_\alpha|$ называется флипом (переворотом), если вложение Γ_α получается из вложения Γ стягиванием выделенного ребра α и растягиванием полученной четырехточечной вершины в другом направлении (см. ниже рис. 3). Обозначение Γ_α показывает, что полученный граф связан с исходным графом Γ . Отметим также, что для данного графа Γ может существовать несколько графов Γ_α , отличающихся маркировками.

Каждой симметрии σ графа Γ можно поставить в соответствие автоморфизм $|\Gamma, \Gamma_\sigma|$.

Однако даже при заданном морфизме двух графов не существует канонического способа отождествить их ребра. Для двух графов, связанных преобразованием флипа, такое отождествление можно постулировать. Оно особенно ясно прослеживается в дуальной картине, в которой флип сводится просто к замене одного ребра другим в триангулированном графе. При элементарном преобразовании можно отождествить ребра любых двух графов, морфизм которых есть набор последовательных флипов. В случае, когда эта последовательность задана, соответствующие ребра разных графов обозначаются ниже одинаковыми буквами. Заметим, что это отождествление не связано с маркировкой.

В данных обозначениях граф $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ — это граф, полученный из данного графа Γ с помощью серии преобразований флипов на ребрах $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ графа Γ .

Существуют три типа соотношений между флипами, которые выполняются при любом выборе маркировки графов, участвующих в этих соотношениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Повторный флип задает симметрию графа: если $|\Gamma_\alpha, \Gamma|$ — флип на ребре α , то $|\Gamma, \Gamma_\alpha|$ — тоже флип и¹⁾*

$$(C.2) \quad |\Gamma, \Gamma_\alpha| |\Gamma_\alpha, \Gamma| = 1.$$

Флипы на несвязанных ребрах коммутируют: пусть α и β — два ребра, не имеющие общих вершин. Тогда

$$(C.4) \quad |\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_\alpha| |\Gamma_\alpha, \Gamma| = |\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_\beta| |\Gamma_\beta, \Gamma|.$$

Пять последовательных флипов на ребрах α и β , имеющих одну общую вершину, задают тождественное преобразование. Более точно, для таких α и β графы $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\beta\alpha}$ связаны флипом, откуда следует соотношение

$$(C.5) \quad |\Gamma, \Gamma_\alpha| |\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta\alpha}| |\Gamma_{\beta\alpha}, \Gamma_{\alpha\beta}| |\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_\beta| |\Gamma_\beta, \Gamma| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства соотношений (C.2), (C.4) очевидны. Соотношение (C.5) лучше всего прослеживается в дуальной картине. В самом деле, граф, дуальный трехвалентному, — это граф с треугольными гранями. Флип исходного графа отвечает стиранию ребра дуального графа (при этом получается одна четырехугольная грань) и проведению ребра, являющегося другой диагональю получившегося четырехугольника. Рис. 1 показывает, что комбинация пяти флипов задает тождественное преобразование. $\square$

¹⁾Обозначение C.п указывает на число графов, участвующих в данном соотношении.

Рис. 1

ТЕОРЕМА 1.

1. Флипы и симметрии графа порождают модулярный группоид.
2. Соотношения (C.2), (C.4), (C.5) и естественные соотношения между флипами и симметриями графа исчерпывают множество всех возможных соотношений между генераторами модулярного группоида.

Заменяя группу классов отображений модулярным группоидом, можно дать простое описание последнего через генераторы и соотношения.

Заметим, что симметрия графа дается отношением двух флипов на одном и том же ребре и, следовательно, модулярный группоид полностью порождается флипами. Соотношения между флипами и симметрии графа вполне очевидны и не нуждаются в подробном описании. На самом деле группы симметрий Γ и Γ_α действуют транзитивно на множестве флипов $|\Gamma, \Gamma_\alpha|$, и это действие можно рассматривать как соотношения между флипами и симметриями графа.

Теорема 1 доказывается непосредственно с использованием комбинаторных приемов симплицальной геометрии [6]. Здесь, однако, дается другое доказательство, более пригодное для двумерных симплицальных комплексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Каждому связному симплицальному комплексу $\mathcal{S}$ можно поставить в соответствие группоид, в котором точка в каждом симплексе старшей размерности выступает в качестве объекта, а гомотопические классы ориентированных путей, связывающих выделенные точки, — в качестве морфизмов. Соответствующая группа — это фундаментальная группа топологического пространства, задаваемого комплексом.

Любому симплексу коразмерности один можно поставить в соответствие два класса путей (отличающихся ориентацией и таких, что их композиция – тождественный морфизм), соединяющих присоединенные симплексы старшей размерности. Такие пути естественно называть *флипами*. Каждому симплексу коразмерности два отвечает соотношение между флипами. Очевидно, что набор флипов порождает группоид, и все возможные соотношения между флипами задаются симплексами коразмерности два.

То же самое справедливо и для орбифолдного симплицеального комплекса, в котором симплексы факторизуются под действием конечной группы. В этом случае надо выбрать одну точку симплекса высшей размерности как объект, а орбифолдные классы гомотопий путей будут играть роль морфизмов. Получающаяся группа – это орбифолдная фундаментальная группа орбифолда, порождаемого симплицеальным комплексом. Группоид теперь порождается флипами и группами симплексов старшей размерности, а все возможные нетривиальные соотношения порождаются симплексами коразмерности два.

Рассмотрим теперь штрребелевское орбифолдное симплицеальное разложение пространства модулей комплексных структур на поверхности S [7]. Орбифолдная фундаментальная группа пространства модулей $\mathcal{M}$ – это группа классов отображений $\mathcal{D}(S)$. Напомним, что орбисимплексы Штрребеля соответствуют ленточным графам, отвечающим поверхности S , причем размерность симплекса равна числу ребер графа. Легко видеть, что группоид комплекса Штрребеля совпадает с модулярным группоидом. Более того, флипы соответствующих группоидов идентичны. Соотношения между флипами задаются клетками коразмерности два, которые отвечают графам с двумя четырехвалентными вершинами (которые порождают соотношение (С.4)) или с одной пятивалентной вершиной (что дает соотношение (С.5)). Соотношение (С.2) выполняется для любого симплицеального комплекса. $\square$

3. ПРОСТРАНСТВО ТЕЙХМЮЛЛЕРА. ОПИСАНИЕ В ТЕРМИНАХ ГРАФОВ

Напомним описание пространства Тейхмюллера комплексных структур на римановых поверхностях с дырками. Пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}^h(S)$ – это пространство комплексных структур на поверхности S (возможно открытой), по модулю диффеоморфизмов гомотопически эквивалентных тождественному. Комплексная структура допускает два типа поведения в окрестности дырки. Эта окрестность может быть изоморфна как комплексное многообразие либо кольцу (гиперболоиду в метрике Пуанкаре), либо диску с проколотой точкой. Дырки второго рода называются проколами.

Удобно рассматривать вместо пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}^h(S)$ его конечное накрытие $\mathcal{T}^H(S)$. Точка пространства $\mathcal{T}^H(S)$ задается точкой пространства $\mathcal{T}^h(S)$ и ориентациями всех тех дырок поверхности S , которые не являются выколотыми точками. Это накрытие, очевидно, разветвляется на подмножестве поверхностей с выколотыми точками.

Теорема униформизации Пуанкаре утверждает, что любая комплексная поверхность S представима как фактор верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ относительно действия дискретной (фуксовой) подгруппы $\Delta(S)$ группы $PSL(2, \mathbb{R})$, которая есть группа автомор-

физмов $\mathbb{H}$,

$$S = \mathbb{H}/\Delta(S).$$

На верхней полуплоскости задается $PSL(2, \mathbb{R})$ -инвариантная эрмитова метрика постоянной отрицательной кривизны -1 , которая в стандартных координатах $z, \bar{z}$ имеет вид $(\operatorname{Im} z)^{-2} dz d\bar{z}$. Эта метрика индуцирует каноническую эрмитову метрику кривизны -1 на комплексной поверхности S .

Любой гомотопический класс γ замкнутых кривых на S (кроме кривых, окружающих проколоте точки) содержит единственную замкнутую геодезическую длины

$$l(\gamma) = \left| \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|, \quad (1)$$

где λ_1 и λ_2 — различные собственные значения элемента группы $PSL(2, \mathbb{R})$, отвечающего γ . (Если принять, что геодезические, гомологичные обходам вокруг выколотых точек, имеют нулевые длины, то формула (1) справедлива для всех классов кривых.)

С работы Пеннера [8] ленточные графы используются для описания не только пространства модулей, но и пространства Тейхмюллера. В данной работе используется явная и простая версия такого описания.

ТЕОРЕМА 2. *Для данного трехвалентного маркированного вложенного графа $\Gamma \in \Gamma(S)$ существует канонический изоморфизм между множеством точек $\mathcal{T}^H(S)$ и множеством $\mathbb{R}^{\# \text{ edges}}$ вещественных чисел, ассоциированных с ребрами графа.*

Детальное доказательство содержится в работе [9]. Соответствия между числами на ребрах и точками пространства $\mathcal{T}^H(S)$ и обратное легко строятся явно. В качестве иллюстрации приведем построение фуксовой группы $\Delta(S) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, отвечающей данному выбору чисел на ребрах графа $\Gamma \in |\Gamma|(S)$. Для этого надо сопоставить каждому элементу фундаментальной группы $\gamma \in \pi_1(S)$ элемент $X_\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$.

По ленточному графу $\Gamma \in |\Gamma|(S)$ построим другой ленточный граф $\tilde{\Gamma}$, в котором окрестность каждой вершины заменена на треугольный подграф с ориентациями ребер, указанными на рис. 2.

Рис. 2

Введем матрицы X_z и L — элементы группы $PSL(2, \mathbb{R})$:

$$X(z) = \begin{pmatrix} 0 & e^{z/2} \\ -e^{-z/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждому пути γ , состоящему из N ребер (возможно, повторяющихся) графа $\tilde{\Gamma}$, поставим в соответствие элемент $X_\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ по правилу $X_\gamma = X_N \dots X_1$, где $X_i = LX(z_\alpha)$ или $X_i = L^{-1}X(z_\alpha)$ в зависимости от того, сонаправлен i -й отрезок пути по малому треугольнику стрелкам на рис. 2 или направлен противоположно.

Фиксируя какую-либо вершину и рассматривая все элементы $PSL(2, \mathbb{R})$, отвечающие путям, начинающимся и заканчивающимся в данной вершине, получим искомую фуксову группу $\Delta(S)$.

Поскольку $X^2(z) = 1$ в $PSL(2, \mathbb{R})$, получим гомоморфизм $\pi_1(\tilde{\Gamma}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$. Более того, так как $L^3 = 1$ в $PSL(2, \mathbb{R})$, этот гомоморфизм факторизуется как $\pi_1(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \pi_1(\Gamma) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$, и построенная группа $\Delta(S)$ в действительности становится изоморфной группе $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(S)$ (другими словами, произведение вдоль γ не зависит от того, как путь γ идет вокруг малых треугольников).

Используя такое явное описание фуксовой группы, можно вычислить длину любой замкнутой геодезической (см. (1)). В частности, длина геодезических, окружающих дырку f , равна

$$l_f = \left| \sum_{\alpha \in f} z_\alpha \right|. \quad (2)$$

Знак суммы задает взаимную ориентацию дырки и поверхности. (Для общих путей длина, разумеется, нелинейна по z_α .)

Рис. 3

Таким образом, по произвольному вложенному графу $\Gamma \in \Gamma(S)$ строится глобальная система координат на $\mathcal{T}^H(S)$. Поэтому должно существовать преобразование, отвечающее переходу между системами координат, соответствующими различным вложенным графам или, другими словами, морфизму модулярного группоида. Как следует из теоремы 1, всякое преобразование перехода задается композицией флипов. Правило для флипа следующее: числа на всех ребрах, кроме тех пяти, которые участвуют в преобразовании флипа, не меняются, а числа на указанных пяти ребрах меняются, как показано на рис. 3, причем

$$\phi(z) = \ln(e^z + 1). \quad (3)$$

Можно явно проверить (хотя это и следует непосредственно из геометрии задачи), что преобразование на рис. 3 действительно оставляет неизменными числа на ребрах при совершении последовательностей флипов (C.2), (C.4) и (C.5).

На пространстве $\mathcal{T}^H(S)$ существует каноническая пуассонова структура (структура Вейля–Петерссона) [10]. Эта структура вырождена, и ее функции Казимира – это в точности длины окружающих дырки геодезических (2).

В исследуемых координатах скобка Вейля–Петерссона B_{WP} имеет особенно простой вид.

ТЕОРЕМА 3. Скобка Вейля–Петерссона B_{WP} в координатах z_α на графе Γ имеет вид

$$B_{WP} = \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} \wedge \frac{\partial}{\partial z_{\alpha^r}}, \quad (4)$$

где суммирование ведется по всем ориентированным ребрам α , а ребро α^r – следующее ребро справа по отношению к концу ребра α .

Идея доказательства содержится в [9]. На практике важно лишь то, что форма (4) не зависит от выбора вложенного графа и набора функций Казимира. Эти свойства легко проверяются явно.

4. КВАНТОВАНИЕ

Напомним, что квантование пуассонова многообразия, эквивариантное по отношению к действию дискретной группы, – это семейство $*$ -алгебр $\mathcal{A}^{\hbar}$, гладко зависящих от положительного вещественного параметра $\hbar$, действующих на G внешними автоморфизмами и обладающих следующими свойствами по отношению к пуассонову многообразию.

1. При $\hbar = 0$ алгебра изоморфна как G -модуль $*$ -алгебре комплекснозначных функций на пуассоновом многообразии.

2. Скобка Пуассона на $\mathcal{A}^0$, задаваемая соотношением $\{a_1, a_2\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} [a_1, a_2]/\hbar$, совпадает с пуассоновой скобкой, порожденной пуассоновой структурой многообразия.

В этом разделе строится квантование пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}^{\hbar}(S)$, эквивариантное по отношению к действию группы классов отображений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Смысл гладкого однопараметрического семейства $*$ -алгебр состоит в отождествлении всех алгебр как векторных пространств и в том, что правило умножения изменяется гладким образом при изменении параметра $\hbar$. Не требуется, чтобы отождествление алгебр было бы само эквивариантно по отношению к групповому действию.

Пусть $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma)$, где $\Gamma \in |\Gamma|(S)$, – алгебра, порожденная генераторами $Z_{\alpha}^{\hbar}$ (один генератор на каждое неориентированное ребро α) с соотношениями

$$[Z_{\alpha}^{\hbar}, Z_{\beta}^{\hbar}] = 2\pi i \hbar \{z_{\alpha}, z_{\beta}\} \quad (5)$$

и $*$ -структурой

$$(Z_{\alpha}^{\hbar})^* = Z_{\alpha}^{\hbar}. \quad (6)$$

Здесь $z_{\alpha, \beta}$ и $\{\cdot, \cdot\}$ – координатные функции на классическом пространстве Тейхмюллера и их скобка Пуассона. В соответствии с формулой (4), правая часть соотношения (5) – константа, принимающая только пять возможных значений $0, \pm 2\pi i \hbar, \pm 4\pi i \hbar$.

На языке модулярного группоида построено по одной $*$ -алгебре на каждый объект. Теперь для описания эквивариантности надо ассоциировать гомоморфизм соответствующих $*$ -алгебр каждому морфизму модулярного группоида. Для этого надо поставить в соответствие морфизм алгебр каждому флипу и каждой симметрии графа и проверить, что алгебра морфизмов удовлетворяет соотношениям (С.2), (С.4) и (С.5).

Действие симметрий графа, очевидно, состоит в перестановках генераторов. Зададим морфизмы флипов по правилу

$$\{A, B, C, D, Z\} \rightarrow \{A + \phi^{\hbar}(Z), B - \phi^{\hbar}(-Z), C + \phi^{\hbar}(Z), D - \phi^{\hbar}(-Z), -Z\}, \quad (7)$$

где A, B, C, D и Z расположены, как показано на рис. 4, $\phi^{\hbar}(z)$ — вещественная функция одного (вещественного) переменного

$$\phi^{\hbar}(z) = -\frac{\pi\hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}}{\text{sh}(\pi p) \text{sh}(\pi\hbar p)} dp, \quad (8)$$

а контур Ω проходит по вещественной оси, обходя сингулярность в нуле сверху.

Рис. 4

Основное утверждение работы — это следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Семейство алгебр $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma)$ — это квантование пространства $\mathcal{T}^H(S)$. Соотношение (7) задает действие группы классов отображений $\mathcal{D}(S)$ на $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma)$ внешними $*$ -автоморфизмами.

Теорема 4, в частности, показывает, что алгебра не зависит от частного выбора графа, определяющего структуру, что подчеркивается использованием обозначения $\mathcal{T}^H(S)$ вместо $\mathcal{T}^H(\Gamma)$.

Прежде чем привести доказательство, обсудим следствия теоремы 4 и свойства построенной алгебры и действия группы классов отображений.

СЛЕДСТВИЕ 1.

А. В пределе $\hbar \rightarrow 0$ морфизм (7) совпадает с классическим морфизмом (рис. 3).

Б. Морфизмы $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{T}^{1/\hbar}(\Gamma)$, задаваемые отображением $Z_{\alpha}^{\hbar} \mapsto Z_{\alpha}^{1/\hbar}/\hbar$, коммутируют с модулярными морфизмами.

В. Центр алгебры порождается суммами $Z_f^{\hbar} = \sum_{\alpha \in f} Z_{\alpha}^{\hbar}$ по всем граничным ребрам α грани f . Группа классов отображений действует на генераторы $Z_f^{\hbar}$ перестановками в точности так же, как она действует на дырки поверхности S .

Г. Для произвольного набора вещественных чисел $l_1, \dots, l_s$, ассоциированных с дырками поверхности S , существует единственное унитарное представление $\pi^{\hbar}(S, l_1, \dots, l_s)$ алгебры $T^H(S)$ в гильбертовом пространстве $H^{\hbar}(S, l_1, \dots, l_s)$ такое, что центральные элементы получаются умножением на эти константы $Z_f^{\hbar} = l_f$.

Д. Пусть $\mathcal{D}(S, l_1, \dots, l_s) \subset \mathcal{D}(S)$ – подгруппа группы классов отображений, сохраняющих присваивания чисел $l_1, \dots, l_s$ соответствующим дыркам. Тогда существует единственное проективное представление ρ подгруппы $\mathcal{D}(S, l_1, \dots, l_s)$ в $H^{\hbar}(S, l_1, \dots, l_s)$, задаваемое условием $\rho(x)\pi(t) = \pi(xt)\rho(x)$ для любых элементов $x \in \mathcal{D}(S, l_1, \dots, l_s)$ и $t \in T^H(S)$.

Е. Препятствием к тому, чтобы представление $\pi(S, l_1, \dots, l_s)$ было подлинным представлением (а не только проективным), является вторая кохомологическая группа $H^2(\mathcal{D}(S, l_1, \dots, l_s), U(1))$ или, что эквивалентно, вторая кохомологическая группа орбифолдного пространства модулей $H^2(T^H(S)/\mathcal{D}(S, l_1, \dots, l_s), U(1))$.

При доказательстве теоремы 4 используется простое наблюдение, которое удобно сформулировать как отдельное утверждение.

ЛЕММА. Рассмотрим алгебру (квантовый тор), порожденную двумя генераторами U и V , удовлетворяющими коммутационному соотношению $qUV = q^{-1}VU$, где q – ненулевое комплексное число. Тогда автоморфизм алгебры, заданный формулами $U \rightarrow (1 + qU)V$ и $V \rightarrow U^{-1}$, имеет порядок пять.

Из теоремы 4 и леммы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.

А. Пусть K – оператор, действующий на гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$, с интегральным ядром

$$K(x, z) = F^{\hbar}(z) e^{-\frac{zx}{2\pi i \hbar}}, \quad (9)$$

где

$$F^{\hbar}(z) = \exp\left(-\frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}}{p \operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi \hbar p)} dp\right). \quad (10)$$

Тогда оператор K пропорционален унитарному и удовлетворяет тождеству

$$K^5 = \text{const}. \quad (11)$$

Б. Пусть $\hbar = t/n$ – рациональное число, и предположим для простоты, что оба целых числа t и n нечетны. Введем линейный оператор $L(u)$, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$ и зависящий от одного положительного вещественного параметра через свою матрицу:

$$L(u)_j^i = F^{\hbar}(j, u) q^{2ij}, \quad (12)$$

где

$$F^{\hbar}(j, u) = (1 + u)^{\frac{j}{n}} \prod_{k=0}^{j-1} (1 + q^{2k-1} u^{\frac{1}{n}})^{-1}.$$

Тогда выполняется следующее тождество:

$$L(v^{-1})L(u^{-1}v^{-1} + u^{-1})L(v + vu^{-1} + u^{-1})L(v + uv)L(u) = \text{const}. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Естественно, множество неприводимых представлений алгебры $\mathcal{T}^{\hbar}(S)$ находится во взаимно однозначном соответствии с симплектическими листами $\mathcal{T}^H(S)$.

2. Группа $\mathcal{D}(S, l_1, \dots, l_s)$ зависит лишь от распределения значений центральных генераторов $l_1, \dots, l_s$. Если все l_i равны между собой, то, очевидно, $\mathcal{D}(S, l_1, \dots, l_s) = \mathcal{D}(S)$.

3. Описываемая конструкция является обобщением представления Шейла–Вейля симплектической группы [11]. При этом квантуемое пуассоново многообразие – это первая когомологическая группа $H^1(S)$ с компактным носителем и с действием группы классов отображений, заданным естественным образом. Эта аналогия становится еще более явной, если представить пространство $H^1(S)$ как пространство представлений группы $\pi_1(S)$, принимающих значения в $\mathbb{R}$, а $\mathcal{T}^{\hbar}(S)$ – как открытое подмножество пространства представлений группы $\pi_1(S)$ в $PSL(2, \mathbb{R})$.

4. Естественно спросить, образует ли описанное множество представлений группы классов отображений модулярный функтор. Другими словами, поскольку для любого вложения $S_1 \rightarrow S_2$ одной поверхности в другую существует индуцированный гомоморфизм групп классов отображений $\mathcal{D}(S_1) \rightarrow \mathcal{D}(S_2)$, возникает вопрос: всегда ли построенное унитарное представление $\mathcal{D}(S_2)$ разлагается в прямую сумму построенных представлений $\mathcal{D}(S_1)$? Ответ в большинстве случаев отрицателен.

5. Функция $F^{\hbar}(z)$, заданная формулой (10), имеет асимптотическое поведение $F(z) \rightarrow \exp\{\text{Li}_2(e^z)/\hbar\}$, где $\text{Li}_2(z)$ – это дилогарифм

$$\text{Li}_2(e^z) = \int_0^{e^z} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

Как эта функция, так и матричная функция (12) суть разновидности квантовых дилогарифмов, введенные Л. Д. Фаддеевым и Р. М. Капшаевым [4]. Заметим, что знаменитое пятичленное соотношение для функции Li_2 может быть записано в виде

$$\tilde{L}(v^{-1})\tilde{L}(u^{-1}v^{-1} + u^{-1})\tilde{L}(v + vu^{-1} + u^{-1})\tilde{L}(v + uv)\tilde{L}(u) = 1,$$

где $\tilde{L}(u) = e^{\text{Li}_2(u)}$.

6. С учетом предыдущих замечаний операторы, представляющие группу классов отображений в гильбертовом пространстве $H^{\hbar}(S, l_1, \dots, l_s)$, могут быть представлены как композиции: 1) преобразований Фурье, 2) операторов умножения на экспоненты от квадратичных форм и 3) операторов умножения на функции $F^{\hbar}$ (что очень близко к представлению Шейла–Вейля, в котором участвуют только первые два типа операторов).

7. Если справедливы обычные предположения о соотношении между деформационным и геометрическим квантованиями, то алгебра $\mathcal{T}^{\hbar}(S)$ действует на сечениях некоторого линейного расслоения над пространством Тейхмюллера. Аналогично подалгебра $\mathcal{T}^{\hbar}(S)$, инвариантная при действии группы классов отображений $\mathcal{D}(S)$, должна действовать на сечениях некоторого линейного расслоения над пространством модулей. Пространство модулярных форм является хорошим кандидатом для таких сечений.

4.1. Свойства функции $\phi^{\hbar}(z)$. Для доказательства теоремы 4 и следствий в этом пункте мы приводим свойства функции

$$\phi^{\hbar}(z) = -\frac{\pi\hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} dp$$

и доказываем некоторые из них.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для функции $\phi^{\hbar}(z)$ выполняется:

П.1: $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \phi^{\hbar}(z) = \ln(e^z + 1)$;

П.2: $\phi^{\hbar}(z) - \phi^{\hbar}(-z) = z$;

П.3: $\overline{\phi^{\hbar}(z)} = \phi^{\hbar}(\bar{z})$;

П.4: $\frac{1}{\hbar} \phi^{\hbar}(z) = \phi^{\frac{1}{\hbar}}\left(\frac{z}{\hbar}\right)$;

П.5: $\phi^{\hbar}(z + i\pi\hbar) - \phi^{\hbar}(z - i\pi\hbar) = \frac{2\pi i\hbar}{e^{-z} + 1}$;

П.6: $\phi^{\hbar}(z + i\pi) - \phi^{\hbar}(z - i\pi) = \frac{2\pi i}{e^{-z/\hbar} + 1}$;

П.7: Функция $\phi^{\hbar}(z)$ мероморфна с полюсами в точках $\{\pi i(m + n\hbar) | m, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{-\pi i(m + n\hbar) | m, n \in \mathbb{N}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства свойства П.1 заметим, что $\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi^{\hbar}(z) = 0$. Тогда достаточно доказать, что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{\hbar}(z) = \frac{1}{e^{-z} + 1}.$$

Левая часть этого равенства легко вычисляется с помощью вычетов:

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{\hbar}(z) &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} -\frac{\pi\hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{-ipe^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} dp = \\ &= \frac{i}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p)} = \frac{i}{2} \frac{1}{1 + e^z} \left(\int_{\Omega} - \int_{\Omega+i} \right) \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p)} dp = \\ &= \frac{-1}{1 + e^z} \operatorname{Res}_{|p=i\pi} \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p)} = \frac{1}{e^{-z} + 1}. \end{aligned}$$

Свойство П.2 проверяется вычислением правой части с помощью вычетов:

$$\begin{aligned} \phi^{\hbar}(z) - \phi^{\hbar}(-z) &= -\frac{\pi\hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz} - e^{ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} dp = \\ &= -\frac{\pi\hbar}{2} \left(\int_{\Omega} + \int_{-\Omega} \right) \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} dp = \\ &= \frac{\pi\hbar}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{|z=0} \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} = z. \end{aligned}$$

Свойство П.3 получается путем замены переменной интегрирования $q = -\bar{p}$:

$$\begin{aligned}\overline{\phi^{\hbar}(z)} &= -\frac{\pi\hbar}{2} \int_{\overline{\Omega}} \frac{e^{ip\bar{z}}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} dp = \\ &= \frac{\pi\hbar}{2} \int_{-\Omega} \frac{e^{ip\bar{z}}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} dp = \\ &= -\frac{\pi\hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ip\bar{z}}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} dp = \phi^{\hbar}(\bar{z}).\end{aligned}$$

Свойство П.4 получается при замене переменной интегрирования $q = p/\hbar$:

$$\begin{aligned}\phi^{\frac{1}{\hbar}}\left(\frac{z}{\hbar}\right) &= -\frac{\pi}{2\hbar} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz/\hbar}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi p/\hbar)} dp = \\ &= -\frac{\pi}{2\hbar} \int_{\Omega} \frac{e^{-iqz}}{\operatorname{sh}(\pi\hbar q) \operatorname{sh}(\pi q)} d(q\hbar) = \frac{1}{\hbar} \phi^{\hbar}(z).\end{aligned}$$

Свойства П.5 и П.6 доказываются аналогично свойству П.1, приведем доказательства лишь первого из них:

$$\begin{aligned}\phi^{\hbar}(z + i\pi\hbar) - \phi^{\hbar}(z - i\pi\hbar) &= -\frac{\pi\hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}(e^{\pi\hbar p} - e^{-\pi\hbar p})}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi\hbar p)} dp = \\ &= -\pi\hbar \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p)} dp = \frac{-\pi\hbar}{e^z + 1} \operatorname{Res}_{p=i\pi} \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p)} = \\ &= \frac{2\pi i\hbar}{e^{-z} + 1}.\end{aligned}$$

Свойство П.7 следует из очевидного наблюдения, что интеграл (8) сходится при $|\operatorname{Im} z| < \pi(1 + \hbar)$ и, следовательно, используя свойства П.5 и П.6, функцию $\phi^{\hbar}$ можно продолжить на всю комплексную плоскость. $\square$

4.2. Доказательство теоремы 4 и следствий. Следствие 1.А вытекает из тождества П.1.

Для доказательства следствия 1.Б нужно проверить, что морфизм $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{T}^{1/\hbar}(\Gamma)$ коммутирует с преобразованием флипа (этот морфизм, очевидно, коммутирует с симметриями графа). Это равносильно тому, что $(A + \phi^{\hbar}(Z))/\hbar = A/\hbar + \phi^{\hbar}(Z/\hbar)$, $(B - \phi^{1/\hbar}(-Z))/\hbar = A/\hbar - \phi^{\hbar}(-Z/\hbar)$ и т.д. Поэтому достаточно доказать, что $\phi^{\hbar}(z)/\hbar = \phi^{1/\hbar}(z/\hbar)$, что есть в точности свойство П.4.

Для проверки следствия 1.В надо проверить, что флип отображает центральные элементы алгебры в центральные элементы алгебры преобразованного графа. Это следует из свойства П.2 функции $\phi^{\hbar}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Переформулируем лемму следующим образом. Построим последовательность элементов квантового тора с помощью рекуррентного соотношения $U_{-1} = V^{-1}$, $U_0 = U$, $U_{i+1} = (1 + qU_i)U_{i-1}^{-1}$. Тогда $qU_{i+1}U_i = q^{-1}U_iU_{i+1}$, и $U_{i+5} = U_i$ для любого i .

Лемма доказывается прямым вычислением:

$$\begin{aligned} U_{i+5} &= (1 + qU_{i+4})U_{i+3}^{-1} = U_{i+3}^{-1} + qU_{i+2}^{-1}U_{i+3}^{-1} + U_{i+2}^{-1} = \\ &= (1 + q^{-1}U_{i+1})U_{i+2}^{-1} = U_i. \quad \square \end{aligned}$$

Следствия 1.Г–1.Е, касающиеся представлений, доказываются элементарными выкладками; заметим лишь, что следствия 1.Г, 1.Д прямо следуют из теоремы Стоуна–фон Неймана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 сводится к доказательству следующих утверждений:

1. Морфизмы (7) являются алгебраическими морфизмами.
2. Морфизмы (7) сохраняют $*$ -структуру.
3. Морфизмы (7) удовлетворяют тождествам (С.2), (С.4) и соотношениям симметрий графа.
4. Морфизмы (7) удовлетворяют пятичленному соотношению (С.5).

Чтобы доказать утверждение **1**, надо проверить, что $[A + \phi^h(Z), B - \phi^h(-Z)] = 0$, $[A + \phi^h(Z), D - \phi^h(-Z)] = 2\pi i\hbar$ (оставшиеся соотношения проверяются аналогично или выполняются очевидно). Используя свойство П.2, можно преобразовать коммутаторы:

$$\begin{aligned} [A + \phi^h(Z), B - \phi^h(-Z)] &= [A, B] - [A, \phi^h(-Z)] + [\phi^h(Z), B] = \\ &= 2\pi i\hbar \left(-1 - \frac{\partial}{\partial Z}(-\phi^h(-Z)) + \frac{\partial}{\partial Z}\phi^h(Z) \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} [A + \phi^h(Z), D - \phi^h(-Z)] &= [A, D] - [A, \phi^h(-Z)] + [\phi^h(Z), D] = \\ &= 2\pi i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial Z}(-\phi^h(-Z)) + \frac{\partial}{\partial Z}\phi^h(Z) \right) = 2\pi i\hbar. \end{aligned}$$

Доказательство утверждения **2**, т.е. того, что морфизмы (7) сохраняют вещественную структуру, очевидно, эквивалентно доказательству условия вещественности для функции $\phi^h(z)$, т.е. свойства П.3.

Согласованность морфизмов (7) с соотношением (С.2) прямо следует из свойства П.2, а согласованность с соотношением (С.4), а также с соотношениями симметрии графа очевидны по построению. Единственная нетривиальная проверка требуется при доказательстве того, что морфизмы (7) воспроизводят пятичленное соотношение (С.5).

В последовательности флипов (С.5) участвуют семь генераторов. Обозначим их $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, X_0$ и Y_0 , как показано на рис. 1. Заметим, что в результате преобразования флипа часть графа, показанная на рис. 1, циклически поворачивается. Обозначим через $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, X_i$ и Y_i элементы алгебры, ассоциированные с ребрами этого

подграфа после совершения i флипов. Из формулы (7) следует правило преобразования этих элементов:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= Y_i - \phi^{\hbar}(-X_i), \\ Y_{i+1} &= -X_i, \\ A_{i+1} &= D_i, \\ B_{i+1} &= E_i, \\ C_{i+1} &= A_i + \phi^{\hbar}(X_i), \\ D_{i+1} &= B_i - \phi^{\hbar}(-X_i), \\ E_{i+1} &= C_i + \phi^{\hbar}(X_i). \end{aligned} \tag{14}$$

Докажем, что последовательность этих операторных преобразований пятипериодична.

Предположим, что удалось доказать пятипериодичность X_i . Тогда пятипериодичность Y_i очевидна, поскольку $Y_{i+1} = -X_i$. Пятипериодичность операторов A_i следует из вычисления

$$X_{i+1} = Y_i - \phi^{\hbar}(-X_i) = -X_{i-1} - \phi^{\hbar}(-X_i),$$

откуда

$$\phi^{\hbar}(-X_i) = -X_{i+1} - X_{i-1}.$$

Учитывая свойство П.2, получим

$$\phi^{\hbar}(X_i) = X_i - X_{i+1} - X_{i-1}.$$

Используем теперь эти тождества для того, чтобы преобразовать A_{i+5} :

$$\begin{aligned} A_{i+5} &= D_{i+4} = B_{i+3} - \phi^{\hbar}(-X_{i+3}) = E_{i+2} - \phi^{\hbar}(-X_{i+3}) = \\ &= C_{i+1} + \phi^{\hbar}(X_{i+1}) - \phi^{\hbar}(-X_{i+3}) = A_i + \phi^{\hbar}(X_i) + \phi^{\hbar}(X_{i+1}) - \phi^{\hbar}(-X_{i+3}) = \\ &= A_i + (X_i - X_{i-1} - X_{i+1}) + (X_{i+1} - X_i - X_{i+2}) + (X_{i+4} + X_{i+2}) = \\ &= A_i + X_{i+4} - X_{i-1} = A_i. \end{aligned}$$

Таким образом, пятипериодичность A_i (и, аналогично, B_i , C_i , D_i , E_i и Y_i) следует из пятипериодичности X_i .

Чтобы доказать пятипериодичность X_i , введем алгебраические элементы

$$U_i = e^{-X_i}, \quad \tilde{U}_i = e^{-\frac{X_i}{\hbar}}.$$

Эти элементы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$qU_iU_{i+1} = q^{-1}U_{i+1}U_i, \quad \tilde{q}\tilde{U}_i\tilde{U}_{i+1} = \tilde{q}^{-1}\tilde{U}_{i+1}\tilde{U}_i, \quad U_i\tilde{U}_j = \tilde{U}_jU_i, \tag{15}$$

где

$$q = e^{\pi i \hbar}, \quad \tilde{q} = e^{\frac{\pi i}{\hbar}}.$$

Эти алгебраические элементы преобразуются особенно просто:

$$U_{i+1} = (1 + qU_i)U_{i-1}^{-1}, \tag{16}$$

$$\tilde{U}_{i+1} = (1 + \tilde{q}\tilde{U}_i)\tilde{U}_{i-1}^{-1}. \tag{17}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= e^{-X_{i+1}} = e^{-Y_i + \phi^h(-X_i)} = \exp\left(\frac{1}{2\pi i \hbar} \int_{-X_i}^{-X_i + 2\pi i \hbar} \phi^h(z) dz\right) e^{-Y_i} = \\ &= \exp\left(\frac{1}{2\pi i \hbar} \int_{-\infty}^{-X_i} (\phi^h(z + 2\pi i \hbar) - \phi^h(z)) dz\right) e^{X_{i-1}} = \\ &= \exp\left(\int_{-\infty}^{X_i} \frac{dz}{e^{-z - \pi i \hbar} + 1}\right) U_{i-1}^{-1} = (1 + qU_i) U_{i-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь использовалась стандартная формула

$$e^{A + \Phi(B)} = \exp\left\{\frac{1}{[A, B]} \int_B^{B+[A, B]} \Phi(z) dz\right\} e^A,$$

выполненная для любых A и B со скалярным коммутатором $[A, B]$.

Доказательство соотношения (17) аналогично.

Теперь для того чтобы показать, что последовательность X_i пятипериодична, достаточно доказать, что обе последовательности U_i и $\tilde{U}_i$ пятипериодичны. В самом деле, если свойство пятипериодичности выполняется только для последовательности U_i , этого еще недостаточно, поскольку логарифм оператора определен неоднозначно. Однако, если имеются два семейства операторов U и $\tilde{U}$, непрерывно зависящих от параметра $\hbar$, то в случае существования оператора X (также непрерывно зависящего от параметра $\hbar$) такого, что $U = e^X$ и $\tilde{U} = e^{X/\hbar}$, этот оператор определен однозначно. Такой оператор можно задать как предел

$$\lim_{(m+n/\hbar) \rightarrow 0} \frac{U^m \tilde{U}^n}{m + n/\hbar}$$

при любом иррациональном значении $\hbar$.

Однако соотношения (16) и (17) совпадают с соотношениями из формулировки леммы, и поэтому последовательности U_i и $\tilde{U}_i$ действительно пятипериодичны. $\square$

Теперь чтобы доказать следствие 2.А, рассмотрим представление алгебры, порожденной двумя вещественными генераторами X и Y и соотношением $[X, Y] = -2\pi i \hbar$. Любое унитарное представление этой алгебры эквивалентно представлению на пространстве $L^2(\mathbb{R})$, где $X = 2\pi i \hbar (\partial/\partial z)$ и $Y = z$, а z — вещественная переменная. После этого легко находится, что $K^{-1} X K = Y - \phi^h(-X)$ и $K^{-1} Y K = -X$. Как следует из теоремы 4, $K^{-5} X K^5 = X$ и $K^{-5} Y K^5 = Y$, и поэтому оператор K^5 — скаляр.

Следствие 2.Б доказывается аналогично. Квантовый тор $qUV = q^{-1}VU$ (где $q = e^{\pi i m/n}$ и оба числа m и n нечетны) имеет центр, порожденный операторами U^n и V^n . Для любых ненулевых констант u и v существует единственное (с точностью до сопряжения) конечномерное неприводимое представление, в котором $U^n = u$ и $V^n = v$. Заметим, что в этом случае $((1 + qU)V)^n = (1 + u)v$, и потому действие автоморфизма (флипа) на множестве представлений действительно имеет порядок пять (как следует из леммы). Выберем следующую явную реализацию матриц: $U\{u\}_j^i = u^{1/n} \delta_j^{i+1}$, $V\{v\}_j^i = v^{1/n} q^{2i} \delta_j^i$, $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Теперь легко проверить, что

$$L(u)U\{u\}L^{-1}(u) \sim (1 + qU\{(1 + u)v\})V\{u^{-1}\}$$

и

$$L(u)V\{v\}L^{-1}(u) \sim U\{(1+u)v\}^{-1},$$

где знак $\sim$ обозначает эквивалентность с точностью до скалярного множителя. Обозначая через L левую часть равенства (12), получим, что

$$LU\{u\}L^{-1} \sim U\{u\} \quad \text{и} \quad LV\{v\}L^{-1} \sim V\{v\}.$$

Поэтому, ввиду однозначной определенности представления при заданном значении центра, получим $L = \text{const}$.

Благодарности. Один из авторов (В.В.Ф.) благодарен за гостеприимство Центру теоретической физики в Марселе, Франция, где была написана существенная часть этой работы, и В. Овсиенко и О. Огиевскому за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 98-01-00327 (В.В.Ф. и Л.О.Ч.) и грантом поддержки научных школ № 96-15-96455 (В.В.Ф.).

Список литературы

- [1] *H. Verlinde, E. Verlinde.* Conformal field theory and geometric quantization. In: Superstrings 1989 (Trieste, 1989). Eds. M. Green et al. River Edge, NJ: World Sci. Publishing, 1990. P. 422–449.
- [2] *E. Witten.* The central charge in three dimensions. In: Physics and Mathematics of Strings. Eds. L. Brink, D. Friedan, and A.M. Polyakov. Teaneck, NJ: World Sci. Publishing, 1990. P. 530–559.
- [3] *S. Carlip.* Quantum gravity in 2 + 1 dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [4] *L. D. Faddeev, R. M. Kashaev.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. № 5. P. 427–434; hep-th/9310070.
- [5] *R. M. Kashaev.* Lett. Math. Phys. 1998. V. 43. № 2. P. 105–115; q-alg/9706018.
- [6] *O. Ya. Viro.* Lectures on combinatorial presentations of manifolds. In: Differential geometry and topology (Alghero, 1992). Eds. R. Caddeo and F. Tricerri. River Edge, NJ: World Sci. Publishing, 1993. P. 244–264.
- [7] *K. Strebel.* Quadratic Differentials. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1984.
- [8] *R. C. Penner.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 113. P. 299–339.
- [9] *V. V. Fock.* Dual Teichmüller spaces. Preprint MPIM-97. Bonn: MPIM, 1997; hep-th/9702018.
- [10] *W. M. Goldman.* Adv. Math. 1984. V. 54. P. 200–225.
- [11] *G. Lion, M. Vergne.* The Weil representation, Maslov index and theta series. Progress in Mathematics, 6. Boston, Mass.: Birkhäuser, 1980.

Поступила в редакцию 24.V.1999 г.