Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Илиева, В. Тирринг, Анионы и дуальность Бозе–Ферми в модели Тирринга при конечных температурах, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 1, 40–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:06:54

© 1999 г.

Н. Илиева^{*,†}, В. Тирринг^{*}

АНИОНЫ И ДУАЛЬНОСТЬ БОЗЕ–ФЕРМИ В МОДЕЛИ ТИРРИНГА ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ¹⁾

Построены решения модели Тирринга в рамках алгебраического подхода к квантовой теории поля. Показано, что для всех положительных температур фермионные решения существуют только для выделенных значений константы связи $\lambda = \sqrt{2(2n+1)}\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти фермионы неэквивалентны и только для $n = 1$ являются каноническими полями. В общем случае решения являются анионами. Разные анионы (которых несчетное множество) реализуются в ортогональных пространствах и подчиняются динамическим уравнениям (типа фундаментального уравнения Гейзенберга для “праматерии”), отвечающим различным значениям статистического параметра. Таким образом, константа взаимодействия связана со статистическим параметром, а полное гильбертово пространство оказывается несепарабельным. В каждом его секторе выполняется свое “прауравнение”. Эту особенность в принципе нельзя обнаружить любым разложением по λ . Более того вследствие зависимости между постоянной взаимодействия и статистическим параметром ясно, что такое разложение всегда обречено на неудачу и никогда не сможет раскрыть подлинную структуру теории.

Показано, что температурные корреляционные функции голых и канонических одетых фермионов совпадают, что согласуется с однозначностью τ -состояния Кубо–Мартина–Швингера для алгебры канонических антиперестановочных соотношений (где τ – автоморфизм сдвига). Построена также α -анионная двухточечная функция. Для случая скалярного поля соответствующий ответ известен из литературы.

Для нас большая честь предложить настоящую статью для юбилейного выпуска журнала “Теоретическая и математическая физика,” посвященного его 30-летию. По своему бесспорному научному авторитету и высоким стандартам журнал занимает достойное место в наследии своего создателя Н. Н. Боголюбова – одного из выдающихся ученых нашего столетия. Мы желаем, чтобы этот авторитет и эти стандарты сохранялись и в будущем.

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

^{*}Институт теоретической физики, Университет Вены, Вена, Австрия; Международный институт математической физики им. Ервина Шредингера, Вена, Австрия

[†]Постоянный адрес: Институт ядерных исследований и ядерной энергетики Болгарской академии наук, София, Болгария. E-mail: ilieva@ap.univie.ac.at

1. ВВЕДЕНИЕ

После того как Ли построил точно решаемую нерелятивистскую квантово-полевою модель [1], было немало попыток найти другие точно решаемые примеры. Однако возможность решить нетривиальную релятивистскую модель квантовой теории поля (КТП) в те времена даже и не обсуждалась. Тем не менее идея применить анзац Бете [2] к фундаментальному уравнению Гейзенберга [3], редуцированному к двумерному пространству-времени, привела к успеху – построению точно решаемой релятивистской модели – модели Тирринга [4]. За 40 лет своего существования она не только активно изучалась, но и успешно применялась для анализа, апробации и иллюстрации различных проблем двумерных полевых теорий и методов их решения.

Мы не ставим себе цель обсуждать обширнейшую библиографию по этой теме, а сконцентрируем внимание на исходном пункте – на уравнении Гейзенберга. Ввиду полного отсутствия в нем бозонных степеней свободы это уравнение является крайним выражением того взгляда, что лишь фермионы должны присутствовать в начальном формализме фундаментальной теории элементарных частиц. Эта точка зрения часто принимается как сама собой разумеющаяся.

Противоположная точка зрения, а именно, что теория, включающая в своем формализме только наблюдаемые поля (с необходимостью незаряженные бозоны), способна описывать эволюцию и симметрии физической системы, будучи ядром алгебраической КТП [5], также имеет своих сторонников. На самом деле этим ставится вопрос принципиального характера, можно ли и в каких случаях делать однозначные выводы об эволюции и симметриях заряженных полей исходя из экспериментальных данных о наблюдаемых.

Как мы увидим, рассматриваемая нами модель не позволяет ответить на этот вопрос, поскольку обе формулировки дают возможность построения физически существенных объектов – одетых фермионов.

Во всяком случае, прежде чем утверждать, что уравнение типа

$$\not\partial\psi(x) = \lambda\psi(x)\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (1.1)$$

описывает всю Вселенную, следует выяснить, – задает ли оно какой-либо математически корректный объект. Наша цель – обсудить те элементы, которые делают его решение хорошо определенным. Сначала мы будем рассматривать только киральные фермионы и ограничимся двумерным пространством-временем, так что фермионы эти будут зависеть только от одной конусной координаты. Мы хотим воспользоваться также и дуальностью Бозе–Ферми, имеющей место в двумерии. Эта дуальность означает, что в определенных моделях можно задать формальные функции от фермионных полей, которые будут обладать вакуумным ожиданием и статистикой, характерными для бозонов и наоборот. Такую эквивалентность следует понимать в рамках теории возмущений: ряды теории возмущений для связанных таким образом теорий почленно совпадают (и могут существовать, даже если соответствующие модели не являются точно решаемыми или их физический смысл не ясен).

Такая дуальность возможна благодаря следующим двум фактам. Во-первых, и это основная причина существования точно решаемых моделей в двумерии, фермионные токи могут быть построены как “поля”, действующие в пространстве представления фермионов. Так, переход “бозонов в фермионы” основывается на том, что соответствующие бозоны есть токи, а фермионы, по существу, определены своими перестановочными соотношениями с ними. Во-вторых, это наблюдение, сделанное в пионерских работах Йордана [6] и Борна [7]: из-за неограниченности снизу свободного фермионного гамильтониана фермионные операторы рождения и уничтожения должны быть подвергнуты тому, что мы теперь назвали бы преобразованием Боголюбова. Таким образом достигается стабильность системы, но возникает дополнительный аномальный член в коммутаторе токов (позднее он был назван “швингеровским членом”). Этот член, в свою очередь, делает возможной и саму “бозонизацию”.

Дуальность Бозе–Ферми строго обоснована в смысле построения бозонов из фермионов: согласованные выражения существуют для билинейных по фермионам величин, которые непосредственно связаны с наблюдаемыми теории.

Проблема строгого построения операторнозначных обобщенных функций и, возможно, операторов, имеющих основные свойства фермионов как функций одних только бозонных полей, более сложна. На уровне операторнозначных обобщенных функций решения были предложены Дел’Антонио и др. [8] и Мандельштамом [9], а на уровне операторов в гильбертовых пространствах – Кари и сотрудниками [10, 11] и (в пространствах Крейна) Ачерби, Моркио и Строкки [12].

Таким образом, наша цель – придать точный смысл в рамках общего алгебраического подхода следующим трем соотношениям:

$$[\psi^*(x), \psi(x')]_+ = \delta(x - x'), \quad [\psi(x), \psi(x')]_+ = 0 \quad (\text{КАС}), \quad (1.2a)$$

$$j(x) = \psi^*(x)\psi(x) \quad (\text{ток}), \quad (1.2b)$$

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dx} \psi(x) = \lambda j(x) \psi(x) \quad (\text{фундаментальное уравнение}). \quad (1.2в)$$

Мы приступим к ее реализации построением последовательности алгебраических вложений начиная с КАС-алгебры (алгебры канонических антиперестановочных соотношений (КАС)) для голых фермионов. Уравнение (1.2в) содержит объекты, которые согласно (1.2a) существенно разрывны. Поэтому удобнее перейти к операторам в гильбертовом пространстве, чтобы можно было воспользоваться многообразием топологий в нем для лучшего контроля предельных переходов. Вообще говоря, вряд ли можно надеяться на равномерную сходимость, но мы должны стремиться как минимум к сильной сходимости, с тем чтобы предел произведения равнялся произведению пределов. Обозначив

$$\psi_f = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \psi(x),$$

находим, что (1.2a) принимает вид

$$[\psi_f^*, \psi_g]_+ = \langle f | g \rangle, \quad (1.3)$$

где $f \in L^2(\mathbb{R})$ и $\langle \cdot | \cdot \rangle$ – это скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R})$. Последнее соотношение указывает на то, что ψ_f ограничены и образуют C^* -алгебру КАС. В этой алгебре трансляции $x \rightarrow x + t$ задают автоморфизм τ_t , и мы воспользуемся соответствующими ему состоянием ω_β Кубо–Мартина–Швингера (КМШ) и ассоциированным представлением π_β , для того чтобы расширить алгебру КАС. Хотя формально $j = \infty$, соответствующим величинам можно придать смысл как сильным пределам в $\mathcal{H}_\beta$, сгладив $\psi(x)$ в интервале ε до $\psi_\varepsilon(x)$ и потом определив

$$j_f = \int dx f(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\psi_\varepsilon^*(x) \psi_\varepsilon(x) - \omega_\beta(\psi_\varepsilon^*(x) \psi_\varepsilon(x))), \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Эти пределы существуют в сильном резольвентном смысле и задают самосопряженные операторы с законом умножения

$$e^{ij_f} e^{ij_g} = \exp \left\{ \frac{i}{8\pi} \int dx (f(x)g'(x) - f'(x)g(x)) \right\} e^{ij_{f+g}}. \quad (1.4)$$

Таким образом задана алгебра токов $\mathcal{A}_c$. Ее вейлевская структура одна и та же для всех положительных β , состояние ω_β определено и для нее.

Построение взаимодействующих фермионов, которые на уровне обобщенных функций должны были бы выглядеть примерно как

$$\Psi(x) = Z e^{i\lambda \int_{-\infty}^x dx' j(x')} \stackrel{?}{=} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \Psi_{\varepsilon, R}(x)$$

(с некоторым нормировочным параметром Z), наталкивается как на инфракрасные ($R \rightarrow \infty$), так и на ультрафиолетовые ($\varepsilon \rightarrow 0$) проблемы, поскольку для

$$\Psi_{\varepsilon, R}(x) = \exp \left\{ i\lambda \int dx' (\varphi_\varepsilon(x - x') - \varphi_\varepsilon(x - x' + R)) j(x') \right\},$$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -\varepsilon, \\ -\frac{x}{\varepsilon}, & -\varepsilon \leq x \leq 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

не существует ни предела $R \rightarrow \infty$, ни предела $\varepsilon \rightarrow 0$ хотя бы в смысле слабой сходимости в $\mathcal{H}_\beta$. Поэтому необходимо расширить алгебру $\pi_\beta(\mathcal{A}_c)''$, чтобы найти место и объектам такого рода.

Есть два подхода к решению инфракрасной проблемы. Поскольку автоморфизм, генерируемый унитарными элементами $\Psi_{\varepsilon, R}(x)$, для $R \rightarrow \infty$ сходится к пределу γ , с его помощью можно построить скрученное произведение $\bar{\mathcal{A}}_c = \mathcal{A}_c \overset{\gamma}{\rtimes} \mathbb{Z}$, в котором есть унитарные операторы со свойствами, требуемыми от искомого предельного элемента [13, 14]. С другой стороны, симплектическая форма в (1.4) и состояние ω_β могут быть заданы для предельного элемента $\Psi_\varepsilon(x)$, этим мы и займемся ниже. Первый подход обсудим коротко в приложении.

В обоих случаях гильбертово пространство $\overline{\mathcal{H}}_\beta$ приобретает секторную структуру; подпространства

$$\mathcal{A}_c \prod_{i=1}^n \Psi_\varepsilon(x_i) \mid \Omega\rangle,$$

соответствующие разным значениям n , ортогональны между собой и могут быть названы n -зарядовыми секторами. Объекты $\Psi_\varepsilon(x)$ для $|x_i - x_j| > 2\varepsilon$ подчиняются анионной статистике с параметром λ^2 и уравнению (1.2в), в котором $j(x)$ усреднен по интервалу длиной ε .

При снятии ультрафиолетовой регуляризации сектора размножаются и подпространства $\mathcal{A}_c \Psi(x) \mid \Omega\rangle$ становятся ортогональными для разных x , а само пространство $\overline{\mathcal{H}}_\beta$ – несепарабельным. Чтобы построить канонические поля типа (1.3), предельный переход $\varepsilon \downarrow 0$ должен сопровождаться перенормировкой полей $\Psi_\varepsilon \rightarrow \varepsilon^{-1/2} \Psi_\varepsilon$ с тем, чтобы величины

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1/2} \int dx f(x) \Psi_\varepsilon(x) = \Psi_f$$

сходились сильно в $\overline{\mathcal{H}}_\beta$ и удовлетворяли фундаментальному уравнению (1.2в) в смысле обобщенных функций.

Ток (1.2б) построен из голых фермионов ψ и, разумеется, чувствителен к бесконечной перенормировке одетых полей Ψ . Поэтому предпочтительнее заменить уравнение (1.2б) на условие, чтобы сглаженные токи j_f являлись генераторами локальных калибровочных преобразований. Действительно, имеет место следующее соотношение:

$$e^{ij_f} \Psi_g e^{-ij_f} = \Psi_{e^{if}g}, \quad (1.5)$$

и в этом смысле уравнение (1.2б) тоже удовлетворено.

Построенные таким образом объекты в общем случае являются анионами, и только для выделенных значений постоянной взаимодействия, $\lambda = \sqrt{2(2n+1)}\pi$, $n \in \mathbb{N}$, они оказываются фермионами, так что постоянная взаимодействия связана со статистическим параметром. Так мы приходим к выводу, что и на самом деле в уравнении Гейзенберга есть что-то “магическое”, поскольку оно допускает фермионные решения в этой конструкции только для изолированных значений константы связи, тогда как классически подстановка

$$\Psi(x) = Z \exp \left\{ i\lambda \int_{-\infty}^x dx' j(x') \right\}$$

решает соотношение (1.2в) для любого λ . Эту особенность никак нельзя заметить при разложении в степенной ряд по λ .

Представленная здесь схема указывает на то, что одетые фермионы, полученные для специальных значений λ (и, вообще говоря, отличающиеся от голых фермионов), могут быть построены как из последних, так и прямо из алгебры токов (т.е. наблюдаемых), так что не может быть отдано априорного предпочтения ни одной из этих двух формулировок. Для строгости этого утверждения нужно еще сравнить возникающие в обоих случаях корреляционные функции. Как мы убедимся, они действительно совпадают,

что согласуется с однозначностью τ -КМШ-состояния для КАС-алгебры. Мы рассмотрим также температурные корреляционные функции анионов, в частности покажем, что они согласуются с недавним результатом в [15] для специального случая скалярного поля.

Говоря о *симметрии* физической системы, подразумевают некий автоморфизм α соответствующей ей алгебры $\mathcal{A}$. Построенная нами последовательность алгебраических вложений предлагает пример *разрушения симметрии*. Оно состоит в том, что для определенного расширения $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, $\nexists \beta \in \text{Aut } \mathcal{B}$: $\beta|_{\mathcal{A}} = \alpha$ для некоторого $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{A}$. Это явление похоже на спонтанный коллапс симметрии [16] и, в отличие от спонтанного нарушения симметрии [17], имеет место только в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

2. БОЗОНЫ ИЗ ФЕРМИОНОВ: КАС-АЛГЕБРА, ЕЕ КМШ-СОСТОЯНИЯ И АССОЦИИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА

Рассмотрим C^* -алгебру $\mathcal{A}^l$, образующими которой являются ограниченные операторы

$$\psi_f = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \tilde{\psi}(p) \tilde{f}(p), \quad \tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ipx} f(x), \quad (2.1)$$

где операторнозначные распределения $\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяют КАС:

$$[\psi^*(x), \psi(x')]_+ = \delta(x - x'), \quad (2.2)$$

и $f \in L^2(\mathbb{R})$. Эта алгебра описывает (лево)киральные фермионы (соответствующие величины снабжены значком l , под x подразумевается $x - t$). Она характеризуется соотношениями

$$[\psi_f^*, \psi_g]_+ = \langle f | g \rangle = \int dx f^*(x) g(x). \quad (2.3)$$

Сдвиги τ_t задают автоморфизм алгебры $\mathcal{A}^l$

$$\tau_t \psi_f = \psi_{f_t}, \quad f_t(x) = f(x - t), \quad (2.4)$$

а $L^2(\mathbb{R})$ оснащает ее нормой, такой что τ_t равномерно (поточечно) непрерывно и даже дифференцируемо по t для плотного множества функций f , для которых производная

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta} = f'(x)$$

существует в $L^2(\mathbb{R})$:

$$\left. \frac{d}{dt} \tau_t \psi_f \right|_{t=0} = -\psi_{f'}. \quad (2.5)$$

τ -КМШ-состояния над алгеброй $\mathcal{A}^l$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega_\beta(\psi_f^* \psi_g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{\tilde{f}^*(p) \tilde{g}(p)}{1 + e^{\beta p}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi} \int \frac{dx dx' f^*(x) g(x')}{i(x - x') - n\beta + \varepsilon}, \quad \varepsilon \downarrow 0, \\ \omega_\beta(\psi_g \psi_f^*) &= \omega_\beta(\psi_f^* \tau_{i\beta} \psi_g).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Каждому ω_β соответствуют представление π_β с циклическим вектором $|\Omega\rangle$, $\omega_\beta(a) = \langle \Omega | a | \Omega \rangle$ в $\mathcal{H}_\beta = \overline{\mathcal{A}^l |\Omega\rangle}$ и алгебра фон Неймана $\pi_\beta(\mathcal{A}^l)''$. Она содержит алгебру токов $\mathcal{A}_c^l$, в которой придается смысл формальному выражению $j(x) = \psi^*(x) \psi(x)$.

Чтобы показать это, воспользуемся следующими двумя леммами (доказательство см. в [14]), служащими основой для всего построения.

ЛЕММА 2.1. *Если ядро $K(k, k'): \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ задает неотрицательный оператор и $K(k, k) \in L^1(\mathbb{R})$, то $\forall \beta \in \mathbb{R}^+$*

$$\begin{aligned}\lim_{M \rightarrow \pm\infty} B_M &= \lim_{M \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk dk' K(k, k') \tilde{\psi}^*(k + M) \tilde{\psi}(k' + M) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk dk' \lim_{M \rightarrow \pm\infty} K(k, k') \omega_\beta(\tilde{\psi}^*(k + M) \tilde{\psi}(k' + M)) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int dk K(k, k) & \text{для } M \rightarrow +\infty, \\ 0 & \text{для } M \rightarrow -\infty \end{cases}\end{aligned}$$

в смысле сильной сходимости в $\mathcal{H}_\beta$.

Следует отметить, что, даже если $\int |K|^2$ возрастает с ростом M , то тем не менее разность $B_M - \langle B_M \rangle$ может сходиться к (неограниченному) оператору.

ЛЕММА 2.2. *Если*

$$B_M = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk dk' \tilde{f}(k - k') \Theta(M - |k|) \Theta(M - |k'|) \tilde{\psi}^*(k) \psi(k'),$$

где $\tilde{f}$ убывает быстрее экспоненты и есть фурье-преобразование положительной функции, то разность $B_M - \omega_\beta(B_M)$ для $M \rightarrow \infty$ является последовательностью Коши, сильно сходящейся к нулю на плотном подмножестве $\mathcal{H}_\beta$.

ЗАМЕЧАНИЯ 2.1.

1. Лемма 2.1 выражает интуитивное представление о том, что все уровни с $k > 0$ вакантны и, наоборот, для $k < 0$ все уровни заполнены.

2. B_M есть положительный оператор. Диагонализуя K , мы видим, что

$$\|B_M\| = \|K\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int dk K(k, k).$$

3. Как только что было сказано, $\|B_M\| < 2M \tilde{f}(0)$, где $f(x) \geq 0$. Это не является существенным ограничением, поскольку любую функцию можно считать линейной комбинацией положительных функций.

4. Предел j_f — это неограниченный оператор. Поэтому сходимость имеет место не во всем $\mathcal{H}_\beta$. Однако, поскольку для j_f выполняется $\tau_{i\beta} j_f = j_{e\beta p} f$, то плотное подмножество, на котором имеется сходимость, инвариантно относительно j_f . Таким образом, выполняется сильная резольвентная сходимость, т.е. ограниченные функции от B_M сходятся сильно. К тому же коммутатор пределов равен пределу коммутатора.

Так мы приходим к выводу, что предел существует и самосопряжен на подходящей области определения. Формально мы запишем его как

$$\begin{aligned} j_f &= \lim_{M \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk dk' K(k, k') \tilde{\psi}^*(k+M) \tilde{\psi}(k'+M) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk dk'}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k-k') : \tilde{\psi}(k)^* \tilde{\psi}(k') :. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Покажем, что токи (2.7) удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям (КПС) с подходящей симплектической формой σ [6, 18].

ТЕОРЕМА 2.1. *Имеет место уравнение*

$$\begin{aligned} [j_f, j_g] &= i\sigma(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(2\pi)^2} p \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) = \\ &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для распределений $\tilde{\psi}(k)$ получаем алгебраически

$$[\tilde{\psi}^*(k) \tilde{\psi}(k'), \tilde{\psi}^*(q) \tilde{\psi}(q')] = 2\pi [\tilde{\psi}^*(k) \tilde{\psi}(q') \delta(q-k') - \tilde{\psi}^*(q) \tilde{\psi}(k') \delta(k-q')].$$

Отсюда, после замены переменных следует для операторов

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^3} \int dk dp dp' \tilde{f}(p) \tilde{g}(p') \tilde{\psi}^*(p+p'+k) \tilde{\psi}(k) \Theta(M-|k|) \times \\ &\times \Theta(M-|p+p'+k|) [\Theta(M-|p'+k|) - \Theta(M-|p+k|)]. \end{aligned}$$

Для фиксированных p и p' и $M \rightarrow \infty$ разрешенная область k содержится в интервалах $(M-|p|-|p'|, M)$ и $(-M, -M+|p|+|p'|)$. В результате замены $k \rightarrow k \pm M$ мы оказываемся в ситуации леммы 2.1, следовательно, коммутатор токов (2.7) равномерно ограничен по M . Если $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ убывают быстрее экспоненты, то коммутатор сходится к среднему значению. В итоге получаем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(2\pi)^2} \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p) \int dk \Theta(M-|k|) \times \\ &\times [\Theta(M-|k-p|) - \Theta(M-|k+p|)] \xrightarrow[1+e^{\beta k}]{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(2\pi)^2} p \tilde{f}(p) \tilde{g}(-p). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЯ 2.2.

1. Токи j_f удовлетворяют КПС, следовательно, они не могут быть ограничены. Поэтому предпочтительней записать соотношение (2.8) в вейлевской форме для соответствующих унитарных операторов

$$e^{ij_f} e^{ij_g} = e^{\frac{i}{2}\sigma(g,f)} e^{ij_{f+g}} = e^{i\sigma(g,f)} e^{ij_g} e^{ij_f}.$$

2. Токи j_f самосопряжены, поэтому унитарные операторы $e^{i\alpha j_f}$ генерируют однопараметрические группы – локальные калибровочные преобразования

$$e^{-i\alpha j_f} \psi_g e^{i\alpha j_f} = \psi_{e^{i\alpha f} g}.$$

3. Состояние ω_β может быть расширено до $\bar{\omega}_\beta$ над алгеброй $\pi_\beta(\mathcal{A}^l)''$, а автоморфизм τ_t – до $\bar{\tau}_t$, $\bar{\tau}_t \in \text{Aut } \pi_\beta(\mathcal{A}^l)''$, где $\bar{\tau}_t j_f = j_{f_t}$. Более того $\bar{\omega}_\beta$ есть $\bar{\tau}$ -КМШ-состояние. Оно имеет вид ([14], см. также [15])

$$\bar{\omega}_\beta(e^{ij_f}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{p}{1 - e^{-\beta p}} |\tilde{f}(p)|^2 \right].$$

4. Физически существенная симметрия алгебры $\mathcal{A}^l$, а именно четность P :

$$P \in \text{Aut } \mathcal{A}^l, \quad P\psi_f = \psi_{Pf}, \quad Pf(x) = f(-x),$$

потеряна в π_β , т.к. коммутатор

$$[j(x), j(x')] = -\frac{i}{2\pi} \delta'(x - x')$$

не инвариантен относительно замены $j(x) \rightarrow j(-x)$. Таким образом, $P \notin \text{Aut } \pi_\beta(\mathcal{A}^l)''$ и $\bar{\omega}_\beta$ не является P -инвариантным состоянием.

5. Расширенный автоморфизм сдвигов $\bar{\tau}_t$ не только сильно непрерывен, но для подходящих сглаживающих функций f он также дифференцируем по t (в сильном смысле на плотном подмножестве в $\mathcal{H}_\beta$)

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dt} \bar{\tau}_t e^{ij_f} = \left[j_{f'_t} + \frac{1}{2} \sigma(f_t, f'_t) \right] e^{ij_{f_t}} = e^{ij_{f_t}} \left[j_{f'_t} - \frac{1}{2} \sigma(f_t, f'_t) \right] = \frac{1}{2} \left[j_{f'_t} e^{ij_{f_t}} + e^{ij_{f_t}} j_{f'_t} \right].$$

6. Симплектическая структура формально не зависима от β [19], однако для $\beta < 0$ она меняет знак, $\sigma \rightarrow -\sigma$, и при $\beta = 0$ (критическое состояние) становится равной нулю.

Таким образом, исходя из КАС-алгебры $\mathcal{A}^l$, мы выделили в алгебре $\pi_\beta(\mathcal{A}^l)''$ бозонные поля – токи, удовлетворяющие КПС-соотношениям. Существенным при этом был подходящий выбор состояния. Мы использовали стационарное состояние при конечной температуре (КМШ-состояние), которое для КАС-алгебры определено однозначно. Другая возможность состояла бы во введении дираковского вакуума (путем заполнения уровней с отрицательной энергией). Именно так поступали в середине тридцатых годов [6, 7], с тем чтобы добиться стабильности фермионной системы. Этот же прием применялся и позже в контексте модели Лутингера [20]. При этом был обнаружен дополнительный эффект, состоящий в возникновении аномального члена в коммутаторе токов (позднее названного швингеровским членом), который, собственно, и делает возможной бозонизацию этих моделей.

3. РАСШИРЕНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathcal{A}_c$: ПОСТРОЕНИЕ ФЕРМИОНОВ ИЗ БОЗОНОВ

В предыдущих рассмотрениях алгебра $\mathcal{A}_c^l$ была определена для сглаженных токов j_f , например со сглаживающей функцией $f \in C_0^\infty$. Алгебраическая структура, однако, задается симплектической формой $\sigma(f, g)$ (см. (2.8)), которая хорошо определена также для пространства Соболева, $\sigma(f, g) \rightarrow \sigma(\bar{f}, \bar{g})$, $\bar{f}, \bar{g} \in H_1$, $H_1 = \{f: f, f' \in L^2\}$. Состояние $\bar{\omega}_\beta$ тоже может быть расширено до H_1 , т.к. $\bar{\omega}_\beta(e^{ij\bar{f}}) > 0$ для функций $\bar{f} \in H_1$. Антикоммутирующие операторы, которые мы хотели бы построить, выглядят примерно как e^{ijf} , где $f(x) = 2\pi\Theta(x_0 - x) \notin H_1$. Для таких функций все еще возможно придать смысл симплектической форме $\sigma(f, g)$, однако соответствующее состояние ω_β обнаруживает сингулярное поведение как для $p \rightarrow 0$, так и для $p \rightarrow \infty$, так что

$$\omega_\beta(e^{ij\Theta}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{p(1 - e^{-\beta p})} \right] = 0$$

и такой оператор действовал бы в $\mathcal{H}_\beta$ как нуль. Поэтому аппроксимация функции Хевисайда Θ функциями из H_1 привела бы к унитарным операторам, которые слабо сходятся к нулю.

Наглядную демонстрацию такой ситуации предлагает следующий пример.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим H_1 -функцию $\Phi_{\delta, \varepsilon}(x)$, которая может служить в качестве приближения к ступенчатой функции,

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \Phi_{\delta, \varepsilon}(x) = \Theta(x),$$

$$\Phi_{\delta, \varepsilon}(x) = \varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x + \delta) \in H_1.$$

При этом

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -\varepsilon, \\ -\frac{x}{\varepsilon}, & -\varepsilon \leq x \leq 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\tilde{\Phi}_{\delta, \varepsilon}(p) = \frac{1 - e^{ip\varepsilon}}{\varepsilon p^2} (1 - e^{ip\delta})$$

и

$$\|\Phi_{\delta, \varepsilon}\|_\beta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{p}{1 - e^{-\beta p}} |\tilde{\Phi}(p)|^2 = 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{p}{1 - e^{-\beta p}} \frac{\sin^2 p \frac{\varepsilon}{2}}{\varepsilon^2 p^4} \sin^2 p \frac{\delta}{2},$$

$$\|\Phi\|_\beta^2 \geq c \int_0^{1/\delta} dp \delta^2 = c\delta$$

для $\beta/\delta, \varepsilon/\delta \ll 1$ и c – постоянная. Отсюда следует, что для $\delta \rightarrow \infty$ имеем $\|\Phi_\delta\|_\beta \rightarrow \infty$. Кроме того, $\|\Phi_\delta - f\|_\beta \rightarrow \infty$, поскольку

$$\|\Phi_\delta - f\|_\beta \geq \|\Phi_\delta\|_\beta - \|f\|_\beta \rightarrow \infty \quad \forall \|f\|_\beta < \infty,$$

откуда

$$|\langle \Omega | e^{-ijf} e^{ij\Phi_\delta} | \Omega \rangle| = e^{-\frac{1}{2} \|\Phi_\delta - f\|_\beta^2} \rightarrow 0.$$

Если учесть, что $e^{ijf} |\Omega\rangle$, $\|f\|_\beta < \infty$ есть полный набор векторов в $\mathcal{H}_\beta$, то мы приходим к выводу, что $e^{ij\Phi_\delta} |\Omega\rangle$, а следовательно, и $e^{ij\Phi_\delta}$ сходятся слабо к нулю.

Следует подчеркнуть, что при этом автоморфизм

$$e^{ijf} \rightarrow e^{-ij\Phi_\delta} e^{ijf} e^{ij\Phi_\delta} = e^{i\sigma(\Phi_\delta, f)} e^{ijf}$$

сходится, т.к.

$$\sigma(f, \Phi_\delta) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(\int_{-\varepsilon}^0 - \int_{-\varepsilon-\delta}^{-\delta} \right) dx f(x) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 dx f(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} f(0).$$

Расходимость $\|\Phi_{\delta,\varepsilon}\|$ связана с хорошо знакомой проблемой безмассового скалярного поля в двумерии, для борьбы с которой известны разные способы действия [21]. Мы воспринимаем ее как указание на необходимость в расширении $\mathcal{A}_c^l$ до некоторой алгебры $\bar{\mathcal{A}}_c^l$ и гильбертова пространства $\mathcal{H}$ до пространства $\bar{\mathcal{H}}$, генерируемого этой самой алгеброй $\bar{\mathcal{A}}_c^l$ на естественном расширении состояния. Поэтому мы добавляем к $\mathcal{A}_c^l$ идеализованный элемент $e^{i2\pi j\varphi_\varepsilon} = U_\pi$ и сохраняем прежние σ и ω_β . С таким же успехом мы могли бы воспользоваться автоморфизмом γ , генерируемым оператором U_π , чтобы построить скрученное произведение $\bar{\mathcal{A}}_c^l = \mathcal{A}_c^l \rtimes \mathbb{Z}$. Существуют естественное расширение состояния $\bar{\omega}$ до $\bar{\mathcal{A}}_c^l$ и естественный изоморфизм пространств $\bar{\mathcal{H}}$ и $\bar{\mathcal{A}}_c^l[\bar{\Omega}]$. Здесь $\bar{\mathcal{H}}$ – счетная ортогональная сумма секторов с n частицами, генерируемых оператором U_π . Так,

$$\langle \Omega | e^{ijf} U_\pi | \Omega \rangle = 0 \quad (3.1)$$

означает просто, что U_π выводит $|\Omega\rangle$ в одночастичный сектор. Вообще говоря,

$$\langle \Omega | U_\pi^{*n} e^{ijf} U_\pi^m | \Omega \rangle = \delta_{nm} \omega_\beta(\gamma^n e^{ijf}).$$

Квазисвободные автоморфизмы алгебры $\mathcal{A}_c^l$ (например, τ_t) могут быть естественным образом расширены до $\bar{\mathcal{A}}_c^l$, $\tau_t U_\pi = e^{i\pi j\varphi_{\varepsilon,t}}$, $\varphi_{\varepsilon,t}(x) = \varphi_\varepsilon(x+t)$. Поскольку $\varphi_\varepsilon - \varphi_{\varepsilon,t} \in H_1 \forall t$, это расширение не выводит из алгебры $\bar{\mathcal{A}}_c^l$.

У оператора U_π есть некоторые характеристики фермионного поля, т.к.

$$\sigma(\varphi_\varepsilon, \tau_t \varphi_\varepsilon) = -\sigma(\varphi_\varepsilon, \tau_{-t} \varphi_\varepsilon) = \frac{1}{4\pi} \begin{cases} 1, & t > \varepsilon, \\ \frac{2t}{\varepsilon} - \frac{t^2}{\varepsilon^2}, & 0 \leq t \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.2)$$

Для большей общности мы могли бы ввести операторы $U_\alpha = e^{i\sqrt{2\pi}\alpha j\varphi_\varepsilon}$, для которых в соответствии с (3.2) и с учетом соотношения

$$\text{sgn}(t) = \Theta(t) - \Theta(-t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Верны соотношения*

$$\begin{aligned} U_\alpha \tau_t U_\alpha &= \tau_t(U_\alpha) U_\alpha e^{i\alpha \operatorname{sgn}(t)/2}, \\ U_\alpha^* \tau_t U_\alpha &= \tau_t(U_\alpha) U_\alpha^* e^{i\alpha \operatorname{sgn}(t)/2} \quad \forall |t| > \varepsilon. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Следует подчеркнуть существенную разницу между общим случаем анионной статистики и двумя частными случаями – бозе- ($\alpha = 2 \cdot 2n\pi$) и ферми- ($\alpha = 2(2n + 1)\pi$) статистиками. Только в этих двух случаях четность P (см. замечание 2.2, п. 4) является автоморфизмом расширенной алгебры, генерируемой U_α . Таким образом, P , которая была потеряна в алгебре $\mathcal{A}_c^l$, теперь восстановлена для двух специальных подалгебр.

Сектора с разным числом частиц ортогональны в любом случае

$$\langle \Omega | U_\alpha^{*n} e^{ijf} U_\alpha^m | \Omega \rangle = 0 \quad \forall n \neq m, \quad f \in H_1.$$

Более того сектора с разной статистикой ортогональны $\langle \Omega | U_\alpha^* U_{\alpha'} | \Omega \rangle = 0$, $\alpha \neq \alpha'$. Таким образом, если бы мы присоединили к алгебре токов объекты $U_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$, то гильбертово пространство $\overline{\mathcal{H}}_\beta$ получилось бы несепарабельным.

Теперь мы хотим устранить ультрафиолетовую регуляризацию, устремив ε к нулю. Поступая, как и в предыдущем случае, мы можем расширить σ и τ_t , сохранив при этом ω , сектора составляют несчетное множество. Это вызвано тем, что $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta(x)$ и

$$\|\Theta - \Theta_t\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp p}{1 - e^{-\beta p}} \frac{|1 - e^{itp}|^2}{p^2}$$

конечно в окрестности $p = 0$, но расходится логарифмически для $p \rightarrow \infty$. Это означает, что $e^{ijf} e^{ij\Theta} | \Omega \rangle$, $f \in H_1$, порождает сектор, в котором одна из частиц (фермион, бозон или анион) находится в точке $x = 0$ и который ортогонален к $e^{ijf} e^{ij\Theta_t} | \Omega \rangle \quad \forall t \neq 0$. Таким образом, полное гильбертово пространство несепарабельно и сдвиг τ_t не является даже слабо непрерывным, так что нет никакого шанса осмыслить выражение $\frac{d}{dt} \tau_t e^{ij\Theta}$.

До сих пор мы рассматривали только киральные фермионы. В общем случае в представленной выше конструкции не возникает существенных изменений. Единственный новый элемент связан с необходимостью обеспечить антиперестановочность фермионов разной киральности, что приводит к еще большему расширению алгебры токов за счет расширения пространства ее сглаживающих функций.

Теперь образующими вейлевской алгебры $\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_c^r \otimes \mathcal{A}_c^l$ являются унитарные операторы

$$W(f_r, f_l) = \exp \left\{ i \int (f_r(x) j_r(x) + f_l(x) j_l(x)) dx \right\},$$

где $\sigma(f_l, g_l)$ задано уравнением (2.8) и $\sigma(f_r, g_r) = -\sigma(f_l, g_l)$. Минимальное расширение $\mathcal{A}_c$ достигается добавлением двух идеализованных элементов:

$$U_\pi^l := W(c_l, 2\pi(1 - \varphi_\varepsilon)) \quad \text{и} \quad U_\pi^r := W(2\pi\varphi_\varepsilon, c_r),$$

$$c_l - c_r = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{к примеру, } c_r = \pi/2 = -c_l).$$

Для $\varepsilon \rightarrow 0$ они генерируют (внешний) автоморфизм $\mathcal{A}_c$:

$$U_\pi^{r(l)} : \quad \gamma_{r(l)} W(f_r, f_l) = e^{i f_{r(l)}(0)} \exp \left\{ \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} f'_{r(l)}(y) dy \right\} W(f_r, f_l),$$

в котором для двух подалгебр $\{W(\bar{f}, \bar{f})\}$ и $\{W(\bar{f}, -\bar{f})\}$, $\bar{f} \in \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{C}_0^\infty$, легко прослеживаются векторные и аксиально-векторные калибровочные преобразования.

В дополнение к очевидному обобщению теоремы 3.1 имеет место следующее соотношение:

$$U_\pi^{r(*)} U_\pi^l = -U_\pi^l U_\pi^{r(*)}.$$

Таким образом, мы можем отождествить киральные компоненты фермионного поля со следующими унитарными объектами:

$$\begin{aligned} \psi_r(x) &\simeq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left\{ i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(y-x) j_r(x') dx' \pm i \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} j_l(x') dx' \right\}, \\ \psi_l(x) &\simeq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp \left\{ \mp i \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} j_r(x') dx' + i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(x-y) j_l(x') dx' \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В общем случае можно думать о расширении алгебры $\mathcal{A}_c$ двумя абстрактными элементами $U_\alpha^{r(l)}$:

$$\begin{aligned} U_\alpha^r &:= W \left(\sqrt{2\pi\alpha} \varphi_\varepsilon, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} \right), \\ U_\alpha^l &:= W \left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}}, \sqrt{2\pi\alpha} (1 - \varphi_\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Теорема 3.1 распространяется также и на это обобщение модели. Как и следовало ожидать, допустив произвольные значения для α , мы приходим к чрезвычайно богатой полевой структуре. Определенная статистика в ней сохраняется только в рамках одного заданного класса полей (с определенным значением α), причем даже разные фермионы (характеризуемые разными дважды нечетными значениями α) не антикоммутируют между собой, а удовлетворяют обменным соотношениям согласно общему закону анионной статистики.

4. АНИОНЫ В АЛГЕБРЕ $\pi_{\overline{w}}(\bar{\mathcal{A}}_c)''$

Наша цель теперь – построить локальные поля, которые удовлетворяют некоторым анионным обменным соотношениям. Для этого надо воспользоваться другим ультрафиолетовым пределом. Разумеется, величины типа

$$\begin{aligned} [\Psi^*(x), \Psi(x')]_\alpha &:= \Psi^*(x) \Psi(x') \exp \left\{ i \frac{2\pi - \alpha}{4} \operatorname{sgn}(x' - x) \right\} + \\ &+ \Psi(x') \Psi^*(x) \exp \left\{ -i \frac{2\pi - \alpha}{4} \operatorname{sgn}(x' - x) \right\} = \delta_\alpha(x - x') \end{aligned}$$

могут быть только операторнозначными обобщенными функциями. Соответственно, чтобы породить операторы, они должны быть проинтегрированы с подходящими основными функциями. Более того в искомом пределе рассматриваемые нами до сих пор унитарные объекты должны быть перенормированы так, чтобы у обобщенной функции $\delta_\alpha(x - x')$ (которая должна быть сконцентрирована в точке и для определенных значений α предположительно переходить в обычную δ -функцию) появился коэффициент 1. Подходящим кандидатом для $\Psi(x)$ мог бы быть предел

$$\Psi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n_\alpha(\varepsilon) \exp \left[i\sqrt{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dy \varphi_\varepsilon(x - y) j(y) \right],$$

где функция φ_ε задана в примере 3.1, а $n_\alpha(\varepsilon)$ есть некоторая нормировка. Обозначив $\varphi_{\varepsilon,x}(y) = \varphi_\varepsilon(x - y)$ и $\tilde{\alpha} = \sqrt{2\pi\alpha}$, можем записать интересующие нас произведения как

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon^*(x) \Psi_\varepsilon(x') &= \exp \left\{ i2\pi\alpha\sigma(\varphi_{\varepsilon,x}, \varphi_{\varepsilon,x'}) \right\} \exp \left\{ i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,x'} - \varphi_{\varepsilon,x}} \right\}, \\ \Psi_\varepsilon(x') \Psi_\varepsilon^*(x) &= \exp \left\{ -i2\pi\alpha\sigma(\varphi_{\varepsilon,x}, \varphi_{\varepsilon,x'}) \right\} \exp \left\{ i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,x'} - \varphi_{\varepsilon,x}} \right\}. \end{aligned}$$

Из (3.2) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma(\varphi_{\varepsilon,x}, \varphi_{\varepsilon,x'}) &= \operatorname{sgn}(x - x') \left\{ \Theta(|x - x'| - \varepsilon) + \Theta(\varepsilon - |x - x'|) \frac{(x - x')^2}{\varepsilon^2} \right\} = \\ &= \operatorname{sgn}(x - x') D_\varepsilon(x - x'), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} [\Psi_\varepsilon^*(x), \Psi_\varepsilon(x')]_\alpha &= \\ &= 2n_\alpha^2(\varepsilon) \cos \left[\operatorname{sgn}(x - x') \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}(1 - D_\varepsilon(x - x')) \right) \right] \exp \left\{ i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,x'} - \varphi_{\varepsilon,x}} \right\}. \end{aligned}$$

Для значений $|x - x'| \geq \varepsilon$ аргумент косинуса становится $\pm\pi/2$, так что α -коммутатор обращается в нуль в соответствии с теоремой 3.1. Чтобы получить δ -функцию для $|x - x'| \leq \varepsilon$, заметим, что $\cos(\dots) > 0$ и $\omega_\beta(e^{i\alpha j}) > 0$, так что выбором $n_\alpha(\varepsilon)$ мы должны удовлетворить требованию

$$2n_\alpha^2(\varepsilon) \varepsilon \int_{-1}^1 d\delta \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}(1 - \delta^2) \right) \cdot \omega_\beta \left(\exp \left\{ i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,x-\varepsilon\delta} - \varphi_{\varepsilon,x}} \right\} \right) = 1$$

и еще убедиться, что $[\dots]_\alpha$ для $\varepsilon \downarrow 0$ сходится сильно к c -числу. Чтобы последнее было конечным, мы должны сгладить $\Psi(x)$ с L^2 -функциями g и h :

$$\begin{aligned} \int dx dx' g^*(x) h(x') [\Psi_\varepsilon^*(x), \Psi_\varepsilon(x')]_\alpha &= \\ &= \int dx dx' g^*(x) h(x') 2n_\alpha^2(\varepsilon) \cos(\dots) \exp \left\{ i\sqrt{2\pi\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,x'} - \varphi_{\varepsilon,x}} \right\}. \end{aligned}$$

Данное выражение сходится в сильном смысле к скалярному произведению $\langle g|h \rangle$, если для $\varepsilon \downarrow 0$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \left\langle \exp \left\{ -i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,x'} - \varphi_{\varepsilon,x}} \right\} \exp \left\{ i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,y'} - \varphi_{\varepsilon,y}} \right\} \right\rangle_{\beta} - \\ & - \left\langle \exp \left\{ -i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,x'} - \varphi_{\varepsilon,x}} \right\} \right\rangle_{\beta} \left\langle \exp \left\{ i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,y'} - \varphi_{\varepsilon,y}} \right\} \right\rangle_{\beta} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

для почти всех значений x, x', y, y' . Напомним, что

$$\langle e^{-ij_a} e^{ij_b} \rangle_{\beta} = \langle e^{-ij_a} \rangle_{\beta} \langle e^{ij_b} \rangle_{\beta} \exp \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp p}{1 - e^{\beta p}} \tilde{a}(-p) \tilde{b}(p) \right].$$

В нашем конкретном случае последний множитель равен

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp p}{1 - e^{-\beta p}} \frac{|1 - e^{ip\varepsilon}|^2}{\varepsilon^2 p^4} (e^{ipx} - e^{ipx'}) (e^{-ipy} - e^{-ipy'}) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp 2(1 - \cos p)}{p^3 (1 - e^{-\beta p/\varepsilon})} (e^{ipx/\varepsilon} - e^{ipx'/\varepsilon}) (e^{-ipy/\varepsilon} - e^{-ipy'/\varepsilon}). \end{aligned}$$

Для фиксированных $\beta \neq 0$ и почти всех x, x', y, y' он сходится (при $\varepsilon \rightarrow 0$) к нулю по Риману–Лебегу. Таким образом, мы получаем объект типа δ -функции. Структуру особенности этого объекта обсудим ниже уже на основе соответствующего состояния.

Аналогичным образом можно убедиться, что $\exp \left\{ i\tilde{\alpha} j_{\varphi_{\varepsilon,x} + \varphi_{\varepsilon,x'}} \right\}$ сходится в смысле сильной сходимости к нулю и что объекты $\Psi_{\varepsilon,g}$ формируют последовательность Коши, сильно сходящуюся к нулю для $\varepsilon \rightarrow 0$. Обобщение вышеизложенных рассуждений предлагает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Величина $\Psi_{\varepsilon,g}$ сходится в смысле сильной сходимости для $\varepsilon \rightarrow 0$ к оператору Ψ_g , который при $\alpha = 2\pi$ удовлетворяет соотношениям*

$$[\Psi_g^*, \Psi_h]_+ = \langle g|h \rangle, \quad [\Psi_g, \Psi_h]_+ = 0.$$

Если $\text{supp } g < \text{supp } h$, то

$$\Psi_g^* \Psi_h e^{i\frac{2\pi-\alpha}{4}} + \Psi_h \Psi_g^* e^{-i\frac{2\pi-\alpha}{4}} = 0 \quad \forall \alpha.$$

Теперь остается убедиться в справедливости утверждения (1.5), а именно в том, что и для Ψ_g ток j_f индуцирует локальные калибровочные преобразования $g(x) \rightarrow e^{2i\alpha f(x)} g(x)$. Для конечных ε справедливо

$$e^{ij_f} \Psi_{\varepsilon,g} e^{-ij_f} = \Psi_{\varepsilon, e^{i2\pi\alpha\sigma(f, \varphi_{\varepsilon})} g},$$

и при $\varepsilon \downarrow 0$ получаем

$$\sigma(f, \varphi_{\varepsilon}) \rightarrow \frac{1}{2\pi} f(0),$$

так что

$$\sigma(f, \tau_x \varphi_{\varepsilon}) = \frac{1}{2\pi} f(x).$$

В завершение рассмотрим статус уравнения Гейзенберга в нашей конструкции. Конечно, произведение операторнозначных распределений в его правой части можно осмыслить только при определенных предписаниях о предельных переходах. Формально оно должно равняться

$$\Psi(x)\Psi^*(x)\Psi(x) = [\Psi(x), \Psi^*(x)]_+ \Psi(x) - \Psi^*(x)\Psi(x)^2 = \delta(0)\Psi(x) - 0.$$

Из замечания 2.2, п. 5 мы знаем, что

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_\varepsilon(x) = \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{2} [\bar{j}(x), \Psi_\varepsilon(x)]_+, \quad \bar{j}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^x dy j(y).$$

При помощи соотношения

$$j_{\varphi'} e^{ij_\varphi} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{i\frac{\alpha}{2} \sigma(\varphi', \varphi)} e^{ij_\varphi + \alpha \varphi'} \Big|_{\alpha=0}$$

можно убедиться, что предел при $\varepsilon \downarrow 0$ существует для среднего значения по полному набору векторов и поэтому задает плотно определенные (незамкнутые) квадратичные формы. Сами по себе они не приводят к операторам, но, как мы знаем из лемм 2.1 и 2.2, они задают операторнозначные обобщенные функции для основных функций из H_1 . Из всего этого можно сделать вывод, что уравнение Гейзенберга выполняется в смысле операторнозначных обобщенных функций

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) = \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{2} [j(x), \Psi(x)]_+. \quad (4.1)$$

Примечателен тот факт, что постоянная взаимодействия λ в (1.1) связана с параметром статистики α . Фермионные решения (в этой конструкции) существуют только для $\lambda = \sqrt{2\pi}$. Разумеется, можно было бы добиться ферми-статистики для любого значения λ посредством перенормировки голых фермионных полей $\psi \rightarrow \sqrt{Z}\psi$ (соответственно токов $j \rightarrow Zj$) с подходящим $Z(\lambda)$. Однако это только означало бы жонглировать коэффициентами. Другая возможность состояла бы в расширении алгебры токов $\mathcal{A}_c$ добавлением $e^{i\sqrt{2\pi\alpha}j_{\varphi\varepsilon}} \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда в $\mathcal{H}_\omega$ возникает несчетное множество ортогональных секторов, по одному для каждого значения α , и в каждом из них выполняется свое прауравнение. Так, разные анионы возникают в ортогональных гильбертовых пространствах, и $e^{i\sqrt{2\pi\alpha}j_{\varphi\varepsilon}}$ не является непрерывным по α даже в слабом смысле. Поскольку α связано с постоянной взаимодействия λ , ясно, что разложение по λ обречено на неудачу и не в состоянии раскрыть подлинную структуру теории.

5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В КМШ-СОСТОЯНИИ

В терминах распределений τ -КМШ-состояние ω_β над алгеброй $\mathcal{A}^l$ есть

$$\begin{aligned} \langle \psi^*(x)\psi(x') \rangle_\beta &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{-ip(x-x')}}{2\pi(1+e^{\beta p})} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i(x-x'+i\varepsilon) - n\beta}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Вклад конечной температуры можно выделить явным образом:

$$\langle \psi^*(x)\psi(x') \rangle_\beta = \frac{i(x-x')}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x-x')^2 + n^2\beta^2} - \frac{1}{2\pi[i(x-x') - \varepsilon]}.$$

Для лучшего сравнения с температурными корреляторами одетых фермионов наиболее удобна компактная запись

$$\langle \psi^*(x)\psi(x') \rangle_\beta = \frac{1}{2\beta \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x'+i\varepsilon)}{\beta}}, \quad (5.2)$$

соответственно

$$\langle \psi(x')\psi^*(x) \rangle_\beta = -\frac{1}{2\beta \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x'-i\varepsilon)}{\beta}}. \quad (5.3)$$

Анионы, присутствующие в алгебре фон Неймана $\bar{\pi}_\beta(\bar{\mathcal{A}}_c)''$, ассоциированной с расширенной алгеброй токов $\bar{\mathcal{A}}_c$, имеют следующую форму:

$$\Psi_\alpha(x) \sim \exp \left[i\sqrt{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} dy f^x(y) j(y) \right] \quad (5.4)$$

со специальной основной функцией f (см. разделы 3 и 4; $f^x(y) = f(x-y)$).

Поля (5.4) являются элементами алгебры Вейля, т.е. для них выполняется обычное правило умножения

$$W(f)W(g) = W(f+g)e^{-i\sigma(f,g)/2},$$

где σ — симплектическая форма алгебры. Вспомнив симплектическую форму, унаследованную алгеброй $\bar{\pi}_\beta(\bar{\mathcal{A}}_c)''$ от алгебры токов $\mathcal{A}_c$ (а на самом деле, от $\pi_\beta(\mathcal{A}_c)''$), с учетом формулы (2.8) и замечания 2.2, п. 3 нетрудно получить интересные нас корреляционные функции.

Начнем с соотношения

$$\omega(e^{ijf}e^{ijg}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\omega(j_f^2) + \omega(j_g^2) + 2\omega(j_f j_g)) \right\}, \quad (5.5)$$

где

$$\omega_\beta(j_f j_g) = - \int \frac{dy dy' f(y) g(y')}{(2\beta)^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi(y-y'+i\varepsilon)}{\beta}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0_+.$$

Сдвиг $\tau_t: f(y) \rightarrow f(y-t)$ может быть аналитически продолжен для f в полосе $0 < \operatorname{Im} t < \beta$, а для g — в полосе $0 > \operatorname{Im} t > -\beta$. Это отражает тот факт, что ω_β является КМШ-состоянием и может также служить ультрафиолетовой регуляризацией, если рассматривать ε как возникающее из $\tau_{i\varepsilon} j f$. Функции f, g в нашем конкретном случае пропорциональны ступенчатой функции, $f^x(y) \sim -\Theta(x-y)$, $g^{x'}(y') \sim \Theta(x'-y')$, и инфракрасное обрезание $\Theta(-y) \rightarrow \Theta(-y-\delta)$ в конечном итоге не даст вклада. Чтобы избавиться от ультрафиолетового обрезания, мы должны положить

$$\Psi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} n_\alpha(\varepsilon) \exp \left\{ i\sqrt{2\pi\alpha} j_{\Theta_\varepsilon^x} \right\} = \Psi_\alpha(x). \quad (5.6)$$

В средних значениях в (5.5) пределы интегрирования соответственно суть $\int_{-\delta}^x \int_{-\delta}^{x'}$, $\int_{-\delta}^x \int_{-\delta}^x$ и $\int_{-\delta}^{x'} \int_{-\delta}^{x'}$ для $j_f j_g$, j_f^2 и j_g^2 . Достаточно рассчитать первый интеграл, другие два – его частные случаи:

$$\int_{-\delta}^x dy \int_{-\delta}^{x'} dy' \operatorname{sh}^{-2}(y - y' + i\varepsilon) = \ln \frac{\operatorname{sh}(x - x' + i\varepsilon)}{\operatorname{sh}(x + \delta + i\varepsilon)} - \ln \frac{\operatorname{sh}(-\delta - x' + i\varepsilon)}{\operatorname{sh}(i\varepsilon)}.$$

Чтобы вычислить (5.5), нужно из этого выражения вычесть $1/2$ последнего с $x' = x$ и еще $1/2$, но с $x = x'$. Тогда для $\delta \rightarrow \infty$ δ -члены сокращаются, и (с учетом всех коэффициентов) мы получаем

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \left[-\ln \operatorname{sh} \frac{\pi(x - x' + i\varepsilon)}{\beta} + \ln(i\varepsilon) \right].$$

При экспоненцировании для случая $\alpha = 2\pi$ получаем фермионную двухточечную КМШ-функцию и фактор ε , который должен быть скомпенсирован перенормировкой Ψ , так что для фермионов перенормировочный коэффициент должен равняться $n_{2\pi}(\varepsilon) = (2\pi\varepsilon)^{-1/2}$, а для случая произвольного α

$$n_\alpha(\varepsilon) = (2\pi\varepsilon)^{-\alpha/4\pi}.$$

Для всех значений α двухточечная функция (при $x \neq x'$ и $\beta = \pi$)

$$\langle \Psi_\alpha^*(x) \Psi_\alpha(x') \rangle_\beta = \langle \Psi_\alpha(x) \Psi_\alpha^*(x') \rangle_\beta = \left(\frac{i}{2\beta \operatorname{sh}(x - x')} \right)^{\alpha/2\pi} = S_\alpha(x - x'), \quad (5.7)$$

обладает нужными свойствами:

1) эрмитовостью:

$$S_\alpha^*(x) = S_\alpha(-x) \iff \langle \Psi_\alpha^*(x) \Psi_\alpha(x') \rangle_\beta^* = \langle \Psi_\alpha^*(x') \Psi_\alpha(x) \rangle_\beta;$$

2) α -коммутативностью:

$$S_\alpha(-x) = e^{i\alpha/2} S_\alpha(x) \iff \langle \Psi_\alpha(x') \Psi_\alpha^*(x) \rangle_\beta = e^{i\alpha/2} \langle \Psi_\alpha^*(x) \Psi_\alpha(x') \rangle_\beta;$$

3) КМШ-условием:

$$S_\alpha(x) = S_\alpha(-x + i\pi) \iff \langle \Psi_\alpha^*(x) \Psi_\alpha(x') \rangle_\beta = \langle \Psi_\alpha(x') \Psi_\alpha^*(x + i\pi) \rangle_\beta.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Если параметр деформации $\exp i\alpha/2$ не принадлежит сфере $\mathbb{S}^1$, а вместо этого $q \in (-1, 1)$, то не существует стационарных температурных состояний (КМШ-состояний). В этом случае не существует даже трансляционно-инвариантных состояний [22].

Для $\alpha = 2\pi$ равенство (5.7) дает

$$\langle \Psi_{2\pi}^*(x) \Psi_{2\pi}(x') \rangle_\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{2\beta \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x'+i\varepsilon)}{\beta}}. \quad (5.8)$$

Для $f(y) \rightarrow \Theta(x-y)$, $g(y') \rightarrow -\Theta(x'-y')$ ничего не меняется, $\langle \Psi_{2\pi}^*(x) \Psi_{2\pi}(x') \rangle_\beta = \langle \Psi_{2\pi}(x) \Psi_{2\pi}^*(x') \rangle_\beta$, тем самым мы убеждаемся в эквивалентности (5.2) и (5.3).

Для $\alpha = 4\pi$ результат такой же, как и для токов j :

$$\langle \Psi_{4\pi}^*(x) \Psi_{4\pi}(x') \rangle_\beta = -\frac{1}{\left(2\beta \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x'+i\varepsilon)}{\beta}\right)^2}, \quad (5.9)$$

тогда как для $\alpha = 6\pi$ получаем новый тип фермионов

$$\langle \Psi_{6\pi}^*(x) \Psi_{6\pi}(x') \rangle_\beta = -\frac{i}{\left(2\beta \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x'+i\varepsilon)}{\beta}\right)^3}. \quad (5.10)$$

Они не являются каноническими полями, поскольку

$$-[\Psi_{6\pi}^*(x), \Psi_{6\pi}(x')]_\alpha = [\Psi_{6\pi}^*(x), \Psi_{6\pi}(x')]_+ = -\frac{1}{8\pi^2} \left(\delta''(x-x') - \frac{\pi^2}{\beta^2} \delta(x-x') \right).$$

Это означает, что одной локальной антикоммутируемости недостаточно, чтобы обеспечить однозначность КМШ-состояния, нужны еще вдобавок и КАС-соотношения. Построенные нами Ψ_α , $\alpha \in (2\mathbb{N}+1)\pi$, описывают бесконечное множество неэквивалентных фермионов.

Для температурного среднего α -коммутатора получаем

$$\begin{aligned} \omega_\beta([\Psi^*(x), \Psi(x')]_\alpha) &= -i \left(-\frac{1}{2\beta \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x'+i\varepsilon)}{\beta}} \right)^{\alpha/2\pi} + \\ &+ i \left(-\frac{1}{2\beta \operatorname{sh} \frac{\pi(x-x'-i\varepsilon)}{\beta}} \right)^{\alpha/2\pi}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

и для $\varepsilon \rightarrow 0$ возникает распределение, в котором только ведущая сингулярность не зависит от температуры:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{1}{x-x'-i\varepsilon} \right)^{\alpha/2\pi} - \left(\frac{1}{x-x'+i\varepsilon} \right)^{\alpha/2\pi} \right\} = ?$$

Мы не будем пытаться интерпретировать “канонические” анионные обменные соотношения. Другую интересную проблему (о высших корреляционных функциях, поскольку вовлеченные в конструкцию предельные переходы могли бы сказаться на их свойствах) мы также обсудим в отдельной работе [23].

6. ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ

Остановимся коротко на случае фермионного мультиплета,

$$\{\psi_i^*(x), \psi_k(y)\} = \delta_{ik} \delta(x-y), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Заданная этим КАС-алгебра обладает очевидной $U(N)$ -симметрией

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad U \in U(N).$$

По аналогии с предыдущим случаем построим квадратичные формы $j_k(x) = \psi_k^*(x) \times \psi_k(x)$, которые удовлетворяют аномальным перестановочным соотношениям

$$[j_k(x), j_m(y)] = -\frac{i}{2\pi} \delta_{km} \delta'(x-y) \quad (6.1)$$

и порождают операторы $j_{f_k} = \int j_k(x) f_k(x) dx$, $f \in H_1$.

Обозначим соответствующие вейлевские операторы через $W(f_1, \dots, f_N)$:

$$W(f_1, \dots, f_N) = \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N j_{f_n} \right\}.$$

Алгебра токов (6.1) характеризуется (глобальной) $O(N)$ -симметрией

$$j \rightarrow Mj = j', \quad M \in O(N). \quad (6.2)$$

В этом случае антикоммутирующие поля могут быть выявлены в алгебре токов, расширенной так, чтобы допустить существование в ней следующих элементов:

$$U_{\pi_k} = \exp \left\{ i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-x') j_k(x') dx' + i \sum_{n=1, n \neq k}^N c_n \int_{-\infty}^{\infty} j_n(x') dx' \right\} = \psi_k(x),$$

$$c_k \in \mathbb{R}, \quad c_k - c_n = (2l+1)\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \forall k, n. \quad (6.3)$$

Для этих элементов имеет место соотношение

$$\psi_k^*(x) \psi_l(y) = \psi_l(y) \psi_k^*(x) e^{-i\pi \delta_{kl} \operatorname{sgn}(y-x)} e^{-i(1-\delta_{kl})(c_k - c_l)},$$

которое (после регуляризации) приводит к нужным КАС-соотношениям.

Естественно возникает вопрос о природе элементов, построенных тем же способом, но после преобразования (6.2) токов, а именно величины

$$\psi'_k(x) = \exp \left\{ i2\pi \int_{-\infty}^x M_{kl} j_l(x') dx' + (\dots) \right\}. \quad (6.4)$$

Существует ли связь между ними и $U(N)$ -преобразованными фермионами ψ'_k ? Иначе, имеется ли связь типа

$$\exp \left\{ i2\pi \int_{-\infty}^x M_{kl} j_l(x') dx' \right\} \longleftrightarrow U_{kl} \psi_l(x)?$$

Сразу видно, что $O(N)$ -преобразования, остающиеся (разумеется) изоморфизмом алгебры $\bar{\mathcal{A}}_c$, больше не являются автоморфизмом полной алгебры. Давно известно, что именно это несохранение симметрии – главное препятствие для применения обычной бозонизационной схемы (с нелокальными фермионными полями [24, 25]). Например, $O(N)$ -симметрию теории N свободных скалярных полей, возникающей путем бозонизации теории N свободных дираковских фермионов с $U(N) \times U(N)$ -киральной инвариантностью, нельзя сопоставить никакой подгруппе последней [26]. Предложенная в работе [25] схема бозонизации сохраняет все симметрии при переходе от одной формулировки к другой. Однако это не относится к полному циклу преобразований, в котором, как мы видели, некоторые симметрии могут быть (на самом деле с необходимостью и являются) спонтанно разрушенными.

Аналогичная ситуация имеет место также для U -инвариантности, о которой мы упоминали в начале раздела. В этом случае, например для $U(1)$, имеем

$$\psi_k(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi_k(x)$$

и получаем

$$\psi'_k(x) = e^{i\alpha} \exp \left\{ i2\pi \int_{-\infty}^x j_k(x') dx' \right\} = \exp \left\{ i2\pi \int_{-\infty}^x j'_k(x') dx' \right\},$$

где

$$j'_k(x') = j_k(x') + \frac{1}{2\pi} \bar{\alpha}(x'), \quad \bar{\alpha}_{(k)} \int_{-\infty}^x \bar{\alpha}(x') dx' = \alpha(x).$$

Для локальных преобразований последнее соотношение все еще задает автоморфизм расширенной алгебры, что согласуется с основной идеей развитой здесь конструкции, однако для глобальных преобразований это уже не так. Иными словами, в построенной таким образом полной алгебре нет больше глобальной $U(1)$ -симметрии.

Отметим, что при переходе из КАС-алгебры $\mathcal{A}$ к алгебре токов $\mathcal{A}_c$, содержащейся в алгебре фон Неймана $\pi_\beta(\mathcal{A})''$, была потеряна четность, и не только как симметрия, но также и как изоморфизм алгебры $\mathcal{A}_c$.

Таким образом, мы оказываемся в положении, когда после построения определенного (физически обоснованного) расширения $\bar{\mathcal{A}}_c$ алгебры наблюдаемых (здесь алгебры токов $\mathcal{A}_c$), $\bar{\mathcal{A}}_c \supset \mathcal{A}_c$, не существует $\beta \in \text{Aut } \bar{\mathcal{A}}_c$: $\beta|_{\mathcal{A}} = \alpha$ для некоторых $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{A}_c$. Это мы называем *разрушением симметрии*. Оно похоже на спонтанный коллапс симметрии, замеченный Буххольцем и Оджимой в контексте суперсимметрии [16], и, как видно, является полевым эффектом, поскольку, в отличие от спонтанного нарушения симметрии [17], не может возникнуть в конечномерном гильбертовом пространстве.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы придали строгий смысл равенствам (1.2а)–(1.2в), исходя из алгебры голых фермионов $\mathcal{A} = \text{КАС}(\mathbb{R})$. Сдвиг τ_t является автоморфизмом $\mathcal{A}$, которому сопоставляются КМШ-состояние (стационарное состояние при конечной температуре) ω_β и ассоциированное с ним представление π_β . В алгебре $\pi_\beta(\mathcal{A})''$ можно найти бозонные моды $\mathcal{A}_c$ с не

зависящей от β алгебраической структурой. Построив скрученное произведение $\mathcal{A}_c$ с неким внешним для нее автоморфизмом или с тем же успехом дополнив ее унитарным оператором до $\bar{\mathcal{A}}_c$, мы обнаруживаем в $\bar{\pi}_\beta(\bar{\mathcal{A}}_c)''$ анионные моды, которые удовлетворяют уравнению Гейзенберга в смысле обобщенных функций. Для определенных значений постоянной связи λ они представляют собой одетые, а не голые фермионы. Из последовательности алгебраических вложений $(\text{КАС})(\text{голые}) \subset \pi_\beta(\mathcal{A})'' \supset \mathcal{A}_c \subset \bar{\mathcal{A}}_c \subset \bar{\pi}_\beta(\bar{\mathcal{A}}_c)'' \supset (\text{КАС})(\text{одетые})$ следует, что в нашей модели нельзя заключить, что более фундаментально – фермионы или бозоны. Одетые фермионы могут быть построены как из голых фермионов, так и прямо из алгебры токов (т.е. наблюдаемых). Совпадают и корреляционные функции в обоих случаях. Это согласуется с единственностью τ -КМШ-состояния над КАС-алгеброй (τ – автоморфизм сдвигов). Соответствующая анионная двухточечная функция для специального случая скалярного поля воспроизводит недавний результат Борхерса и Ингвасона.

Благодарности. Авторы признательны Х. Нарнхофер, Р. Хаагу и Я. Ингвасону за плодотворные обсуждения по предмету настоящей статьи. Н.И. благодарит Австрийский фонд научных исследований за финансовую поддержку (грант № P11287-PHY) и Институт теоретической физики Венского университета за предоставленное гостеприимство.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Полевая алгебра как скрученное произведение

Представление о расширении C^* -алгебры посредством скрученного произведения как метода построения фермионов (т.е. ненаблюдаемых полей) из алгебры наблюдаемых связано с именами Доплихера, Хаага и Робертса. В работе [27] проблема получения разных полевых групп была сведена к построению расширений алгебры наблюдаемых дуальными к этим группам объектами. В явной форме скрученные произведения C^* -алгебр на полугруппы эндоморфизмов были введены в [28] для доказательства существования компактной глобальной калибровочной группы в физике частиц на базе одних только локальных наблюдаемых. В структурном анализе симметрий в алгебраической КТП [5] принципиальная возможность расширения автоморфизмов от сохраняющей единицу C^* -алгебры до ее скрученного произведения на дуальный к компактной группе объект также существенна, поскольку она позволяет исследовать разрушение симметрий [17] и делать конкретные выводы о вырождении вакуума [29].

Необходимость вовлечения в рассмотрение относительно сложного объекта – скрученного произведения на особым образом ориентированной симметрической моноидальной подкатегории $\text{End } \mathcal{A}$ сохраняющих единицу эндоморфизмов алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ [29] – связано с тем, что в общем случае имеются в виду неабелевы калибровочные группы. Для абелевой группы $U(1)$ возможно существенное упрощение, т.к. дуальный ей объект есть тоже группа – группа целых чисел $\mathbb{Z}$. С другой стороны, даже в этом простом случае проблема описания локальных калибровочных преобразований остается открытой. Поэтому для абелева случая рассмотрение скрученного произведения на дискретной группе предлагает одновременно реалистическую основу и разумные упро-

шения для анализа возникающей полевой алгебры. Мы коротко остановимся на применении общей конструкции к этому частному случаю, подробнее см. [13].

Мы начинаем с КПС-алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{V}_0, \sigma)$ над вещественным симплектическим пространством $\mathcal{V}_0$ с симплектической формой σ (см. (2.8)), образующими которой являются унитарные операторы $W(f)$, $f \in \mathcal{V}_0$. Для последних выполняются равенства

$$W(f_1)W(f_2) = e^{-i\sigma(f_1, f_2)/2}W(f_1 + f_2), \quad W(f)^* = W(-f) = W(f)^{-1}.$$

Вместо канонического расширения $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{V}, \bar{\sigma})$, $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ [12], мы хотим построить новую алгебру $\mathcal{F}$ такую, что $\text{КПС}(\mathcal{V}_0) \subset \mathcal{F} \subset \text{КПС}(\mathcal{V})$. Мы выбираем $\mathcal{V}_0 = \mathcal{C}_0^\infty$, $\mathcal{V} = \partial^{-1}\mathcal{C}_0^\infty$. Любой свободный (не внутренний) автоморфизм α , $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{A}$, задает скрученное произведение $\mathcal{F} = \mathcal{A} \overset{\alpha}{\bowtie} \mathbb{Z}$. О последнем можно думать (см. [30]) как о добавлении к изначальной алгебре $\mathcal{A}$ единственного унитарного оператора U вместе со всеми его (целочисленными) степенями, так что формально можно записать $\mathcal{F} = \sum_n \mathcal{A}U^n$, где U порождает автоморфизм α в $\mathcal{A}$, $\alpha A = UAU^* \quad \forall A \in \mathcal{A}$. Оператор U следует понимать как генерирующий заряд. $\mathcal{F}$ есть минимальное расширение, это существенный момент по сравнению с каноническим расширением, которое мы находим излишне большим, особенно когда приходится обсуждать вопросы, связанные со статистическим поведением и эволюцией. Выбирая

$$\alpha W(f) = e^{i\sigma(\bar{g}, f)}W(f), \quad \bar{g} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_0, \quad \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}, \quad (\text{П.1})$$

и отождествляя $U = W(\bar{g})$, мы естественным образом превращаем $\mathcal{F}$ в подалгебру $\text{КПС}(\mathcal{V})$.

Если в качестве $\mathcal{A}$ взять алгебру токов $\mathcal{A}_c$, а в качестве U — идеализованный элемент U_π , которым мы ее расширяли, налицо очевидное соответствие между функциональной картиной из раздела 3 и конструкцией со скрученным произведением. Отметим, что у последнего имеется еще дополнительная структура, что делает его в некоторых случаях предпочтительным. Записав элемент $F \in \mathcal{F}$ как $F = \sum_n A_n U^n$, $A_n \in \mathcal{A}$, мы видим, что удобно рассматривать $\mathcal{F}$ как бесконечномерное векторное пространство с ортонормированным базисом U^n и $A_n = (F)_n$ — компоненты F . Алгебраическая структура $\mathcal{F}$ предполагает, что умножение в нем не покомпонентно, а имеет место следующее соотношение:

$$(F \cdot G)_m = \sum_n F_n \alpha^n G_{m-n}.$$

Заданный квазисвободный автоморфизм $\rho \in \text{Aut } \mathcal{A}$ может быть расширен до $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда ассоциированный с ним автоморфизм $\gamma_\rho = \rho \alpha \rho^{-1} \alpha^{-1}$ является внутренним для $\mathcal{A}$. Поскольку γ_ρ порождается оператором $W(\bar{g}_\rho - \bar{g})$, это есть не что иное, как требование, чтобы $\bar{g}_\rho - \bar{g} \in \mathcal{V}_0$. Оно в точности совпадает с требованием в функциональной картине. Это требование выполнено для пространственных трансляций, а также и для эволюции во времени, но в отсутствие дальнего действия [13].

Состояние $\omega(\cdot)$ над $\mathcal{A}$ вместе с ассоциированным с ним (по теореме реконструкции) представлением π_ω также может быть расширено до $\mathcal{F}$. Пространство представления алгебры $\mathcal{F}$ можно рассматривать как прямую сумму подпространств заряда n , причем

каждое из них ассоциировано с состоянием $\omega \circ \alpha^{-n}$. В эту сумму естественно вложено $\mathcal{H}_0$ – пространство представления алгебры $\mathcal{A}$. Состояние ω неприводимо и $\omega \circ \alpha^{-n}$ не является нормальным по отношению к нему, поэтому расширение состояния над $\mathcal{A}$ до состояния над $\mathcal{F}$ однозначно определено средним значением в этом представлении с $|\Omega_0\rangle = |\omega\rangle$:

$$\langle \Omega_k | W^*(f) W(h) W(f) | \Omega_n \rangle = \delta_{kn} e^{-i\sigma(f+n\bar{g}, h)} \omega(W(h)).$$

При этом $U_k |\Omega\rangle = |\Omega_k\rangle$, $\langle \Omega_k | \Omega_n \rangle = \delta_{kn}$. Это не что иное как условие ортогональности зарядовых секторов, которое возникает и в функциональном описании, задаваемом соотношением (3.1).

В скрученном произведении калибровочные автоморфизмы задаются следующим образом:

$$\gamma_\nu U^n = e^{2\pi i \nu n} U^n, \quad \gamma_\nu W(f) = W(f). \quad (\text{П.2})$$

Отсюда для представления π_Ω получаем

$$\gamma_\nu \left(|F(f)^{(k)}\rangle \right) = \gamma_\nu (W(f) |\Omega_k\rangle) = e^{2\pi i \nu k} W(f) |\Omega_k\rangle.$$

Это оправдывает предположение о том, что векторы $|F(f)^{(k)}\rangle$ принадлежат k -зарядовому подпространству. Отметим, однако, что $\mathcal{A}$ является подалгеброй $\mathcal{F}$ для калибровочной группы $\mathcal{T} = [0, 1)$, тогда как она есть подалгебра КАС для калибровочной группы $\mathcal{T} \otimes \mathbb{R}$. Поэтому построенная таким образом алгебра скрученного произведения, будучи и в действительности ферми-алгеброй, не совпадает с алгеброй КАС, но только содержится в ней. Другими словами, такой тип расширения не позволяет включить также и локально-калибровочные преобразования, которые имеют особое значение для КТП.

Следовательно, конструкция из [13] нуждается в обобщении, которое описывало бы также локальные калибровочные преобразования. Естественнее всего было бы попробовать эту же схему, но со структурным автоморфизмом

$$\alpha_{\bar{g}_x} W(f) = \exp \left\{ i \sum_{n=0}^K f^{(n)}(x) \right\} W(f). \quad (\text{П.3})$$

Оказывается, однако, что только для $n = 0$ возникающая алгебра скрученного произведения допускает расширение автоморфизма, задаваемого пространственными трансляциями в $\mathcal{A}$. Это минимальное требование, которому должна была бы удовлетворять любая схема. Уже первая производная дает для нулевой моды разности $\bar{g}_{x_\delta} - \bar{g}_x$ выражение типа $\int y^{-1} \delta(y) dy$, которое выпадает из $\mathcal{C}_0^\infty$. Таким образом, интересующий нас автоморфизм мог бы иметь только следующую форму:

$$\alpha_{\bar{g}_x} W(f) = e^{if(x)} W(f). \quad (\text{П.4})$$

Можно думать, что этот автоморфизм порождается оператором $W(\bar{g}_x)$, где $\bar{g}_x = 2\pi \times \Theta(x - y)$. Соответственно оператор, добавляемый к алгебре $\mathcal{A}$ скрученным произведением, есть

$$U_x = \exp \left\{ i 2\pi \int_{-\infty}^x j(y) dy \right\}. \quad (\text{П.5})$$

По сравнению с конструкцией в работе [13] это означает расширение пространства основных функций не кинком, а его пределом — четкой ступенчатой функцией. В смысле обобщенных функций ее можно рассматривать как элемент пространства $\partial^{-1}\mathcal{V}_0$ для некоторого $\mathcal{V}_0$, поскольку производная от $\bar{g}_x$ имеет ограниченную нулевую фурье-компоненту. Аналогичным образом условие расширения пространственных трансляций удовлетворено: $\bar{g}_{x_\delta} - \bar{g}_x \in \mathcal{V}_0$, так что в алгебре скрученного произведения сдвиги задаются соотношениями

$$\bar{\tau}_{x_\delta} U_x = V_{x_\delta} U_x, \quad V_{x_\delta} = W(\bar{g}_{x_\delta} - \bar{g}_x). \quad (\text{П.6})$$

Отметим, что сдвиги не коммутируют со структурным автоморфизмом $\alpha_{\bar{g}_x}$, $\tau_{x_\delta} \alpha_{\bar{g}_x} W(f) \neq \alpha_{\bar{g}_x} \tau_{x_\delta} W(f)$. Поскольку

$$\sigma(\bar{g}_x, \bar{g}_{x_\delta}) = -\pi \operatorname{sgn}(\delta), \quad (\text{П.7})$$

уже элементы первого класса антикоммутируют между собой, и мы можем отождествить $U_x = \psi(x)$. Тогда (П.4) (после сглаживания функций из $\mathcal{C}_0^\infty$) есть не что иное, как соотношение (1.5), т.е. требование, чтобы токи генерировали локальные калибровочные преобразования построенных таким образом полей. Любое масштабное преобразование функции, задающей структурный автоморфизм $\alpha_{\bar{g}_x}$, приводит к нарушению соотношения (П.7), и вместо фермионов возникают поля, удовлетворяющие анионным обменным соотношениям. Это равносильно добавлению к алгебре $\mathcal{A}$ элемента U_α , где $\alpha = 2\pi\mu$, μ — параметр масштабного преобразования.

Отметим, что формализм скрученного произведения допускает одну интересную возможность: если для симплектической формы вместо (П.7) (или его непосредственного обобщения $\sigma(\bar{g}_x, \bar{g}_{x_\delta}) = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$) имеет место другое соотношение, а именно $\sigma(\bar{g}_x, \bar{g}_{x_\delta}) = (2n+1)\pi/\bar{n}^2$ для некоторого фиксированного $\bar{n} \in \mathbb{Z}$, то у скрученного произведения возникает зонная структура, причем элементы $2n\bar{n}$ -классов коммутируют, элементы $(2n+1)\bar{n}$ -классов антикоммутируют, а элементы классов с номерами $m \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{\bar{n}}$ подчиняются анионной статистике с параметром $r = \sqrt{2n+1} m/\bar{n}$. Так, поля с разной статистикой присутствуют в одной и той же алгебре, при этом гильбертово пространство остается сепарабельным.

Мы хотели бы отметить, что соотношение типа $\psi(x + \delta_x) = U_{x+\delta_x}$ может ввести в заблуждение. Указанный элемент существует в скрученном произведении только в смысле соотношения (П.6), так что для производной находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} &= \lim_{\delta_x \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \delta_x) - \psi(x)}{\delta_x} = \lim_{\delta_x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_x} (V_{x_\delta} U_x - U_x) = \\ &= \lim_{\delta_x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta_x} \left(e^{i2\pi \delta_x j(x)} - 1 \right) U_x = 2\pi i j(x) U_x =: 2\pi i j(x) \psi(x). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Это вместе с (2.5) дает для операторов

$$i\psi_{f'} = \psi_f j_{\Theta'}. \quad (\text{П.9})$$

Отметим, что в скрученном произведении, которое на самом деле можно рассматривать как левый $\mathcal{A}$ -модуль, уравнения движения (П.8), (П.9) возникают (именно по этой причине) без антисимметризации, как это было в функциональном представлении. В остальном результат остается тем же. Поэтому чувствительность скрученного произведения относительно масштабных преобразований есть другое проявление квантового “правила отбора” для значений константы связи λ в уравнении Гейзенберга (1.2в).

Список литературы

- [1] *T. D. Lee*. Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 1329.
- [2] *H. Bethe*. Z. Phys. 1931. V. 71. P. 205.
- [3] *W. Heisenberg*. Z. Naturforsch. 1954. V. 9a. P. 292.
- [4] *W. Thirring*. Ann. Phys. 1958. V. 3. P. 91.
- [5] *R. Haag*. Local Quantum Physics. Berlin–Heidelberg: Springer, 1993.
- [6] *P. Jordan*. Z. Phys. 1935. V. 93. P. 464; 1936. V. 98. P. 759; V. 99. P. 109.
- [7] *M. Born, N. Nagendra-Nath*. Proc. Ind. Acad. Sci. 1936. V. 3. P. 318.
- [8] *G. Dell'Antonio, Y. Frischman, D. Zwanziger*. Phys. Rev. D. 1972. V. 6. P. 988.
- [9] *S. Mandelstam*. Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 3026.
- [10] *A. L. Carey, S. N. M. Ruijsenaars*. Acta Appl. Math. 1987. V. 10. P. 1.
- [11] *A. L. Carey, C. A. Hurst, D. M. O'Brien*. J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 2212.
- [12] *F. Acerbi, G. Morchio, F. Strocchi*. Lett. Math. Phys. 1992. V. 26. P. 13; 1993. V. 27. P. 1.
- [13] *N. Ilieva, H. Narnhofer*. ÖAW Sitzungsber. II. 1996. V. 205. P. 13.
- [14] *N. Ilieva, W. Thirring*. Eur. J. Phys. C. 1999. V. 6. P. 705.
- [15] *H. J. Borchers, J. Yngvason*. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 601.
- [16] *D. Buchholz, I. Ojima*. Nucl. Phys. B. 1997. V. 498. P. 228.
- [17] *H. Narnhofer, W. Thirring*. Ann. Inst. Henri Poincaré. 1999. V. 70. P. 1.
- [18] *J. Schwinger*. Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 2425.
- [19] *H. Grosse, W. Maderner, C. Reitberger*. Can anomalies melt? In: Generalized Symmetries in Physics. Eds. H.-D. Döbner, V. Dobrev, A. Ushveridze. Singapore: World Scientific, 1994. P. 313.
- [20] *D. C. Mattis, E. Lieb*. J. Math. Phys. 1965. V. 6. P. 304.
- [21] *F. Strocchi*. Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory. Lecture Notes by F. Strocchi. Lecture Notes in Physics. V. 51. Singapore: World Scientific, 1993.
- [22] *H. Narnhofer* (частное сообщение). .
- [23] *N. Ilieva, W. Thirring* (готовится к печати). .
- [24] *S. Coleman*. Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2088.
- [25] *S. Mandelstam*. Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 3026.
- [26] *E. Witten*. Commun. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 455.
- [27] *S. Doplicher, R. Haag, J. Roberts*. Commun. Math. Phys. 1969. V. 15. P. 173.
- [28] *S. Doplicher, J. Roberts*. Ann. Math. 1989. V. 130. P. 75.
- [29] *D. Buchholz, S. Doplicher, R. Longo, J. Roberts*. Commun. Math. Phys. 1993. V. 155. P. 123.
- [30] *H. Araki*. A remark on a connection of return to equilibrium and multiple ground states in some perturbed XY-model. In: On Klauder's Path: A Field Trip. Eds. G. Emch, G. Hegerfeldt, L. Streit. River Edge. N. Y.: World Scientific, 1994. P. 11.

Поступила в редакцию 9.VI.1999 г.