Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Семихатов, Резольвенты унитарных представлений $N = 2$ алгебры Вира-
соро в терминах свободных полей. I, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 1, 89–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:25:35

© 1999 г.

А. М. Семихатов*

РЕЗОЛЬВЕНТЫ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $N = 2$ АЛГЕБРЫ ВИРАСОРО В ТЕРМИНАХ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ. I¹⁾

Построена резольвента унитарных представлений $N = 2$ суперконформной алгебры через свободные поля. Резольвента порождается действием одного фермионного экранирующего оператора (порождающего в теоретико-полевой картине “гравитационные потомки”). Неприводимое представление выделяется из пространства свободных полей как когомологии этого экранирующего оператора.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, популярные в приложениях конструкции для бесконечномерных алгебр в терминах свободных полей (“бозонизации”) весьма радикально влияют на представления, изменяя структуру верма-подобных модулей [1]; резольвенты неприводимых представлений также изменяются, широко известным примером чего служит резольвента Фельдера [2], появляющаяся вместо резольвенты Бернштейна–Гельфанда–Гельфанда (БГГ) [3] для неприводимых представлений алгебры Вирасоро. Резольвенты, ассоциированные с бозонизациями, связаны с экранирующими операторами, действующими в пространствах представлений свободных полей (в действительности с соответствующей квантово-групповой структурой) [2, 4–6]. Неприводимое представление выделяется при этом как когомологии экранирующего оператора, чем собственно и определяется роль резольвент во всех конструкциях, связанных с “бозонизацией”.

Несмотря на широкое использование свободных полей, резольвенты неприводимых $N = 2$ представлений в терминах свободных полей выписаны не были (резольвенты неприводимых $N = 2$ представлений в терминах модулей Верма были построены в [7]). В данной работе мы восполним этот пробел для унитарных $N = 2$ представлений [8] путем построения резольвенты, ассоциированной с *фермионным* экранирующим оператором. Известно несколько конструкций в терминах свободных полей для $N = 2$ суперконформного расширения алгебры Вирасоро. В этой работе мы рассмотрим ту из них [9, 10], которая использовалась при анализе моделей Гинзбурга–Ландау (ГЛ) [10–12].

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии

*Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

Соответствующая резольвента строится в пространстве бозонной ($\beta\gamma$) и фермионной (bc) духовых систем (заметим, что $N = 2$ суперсимметрия в $bc\beta\gamma$ -системе известна со времени работы [13]). Резольвента имеет “линейную” двустороннюю структуру и в этом отношении подобна $\widehat{sl}(2)$ -резольвенте [4, 5], составленной из модулей Вакимото. Однако она *не* является образом известной $\widehat{sl}(2)$ -резольвенты при соответствии $\widehat{sl}(2) \leftrightarrow N = 2$ [14]; вместо этого $\widehat{sl}(2)$ -аналог построенной нами $N = 2$ резольвенты составлен из *твистованных* (подвергнутых преобразованию спектрального потока) модулей²⁾ (эта резольвента ранее не рассматривалась, очевидно, по причине слабой пространственности твистованных $\widehat{sl}(2)$ -модулей). Половина $N = 2$ резольвенты состоит из модулей, порожденных гравитационными потомками [16–18] старшего вектора в ко-гомологиях.

Общими свойствами, характерными для анализа $N = 2$ представлений (и отличающими их от представлений алгебры Вирасоро и $N = 1$ суперконформной алгебры), являются преобразование спектрального потока [19] и появление *твистованных* (под)модулей даже в том случае, когда рассмотрение начинается с “нетвистованного” модуля [15]. Спектральный поток отображает различные унитарные $N = 2$ представления друг в друга, причем циклически с длиной орбиты p (или $p/2$ в отдельных случаях четных p) [14, 7], где $p = 2, 3, 4, \dots$ параметризует центральный заряд. Таким образом, все унитарные представления могут быть получены применением спектрального потока только к $[p/2]$ представителям орбит спектрального потока. То же имеет место и для резольвент, чем мы и пользуемся в данной работе.

В разделе 2 мы напомним основные факты о $N = 2$ суперконформной алгебре и ее унитарных представлениях. В разделе 3 рассматривается $bc\beta\gamma$ -реализация $N = 2$ алгебры и формулируются основные утверждения, а в разделе 4 вычисляются БРСТ-когомологии фермионного экранирующего оператора (и, в частности, показывается, как в конструцию резольвенты включаются поля, являющиеся гравитационными потомками).

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. $N = 2$ алгебра и спектральный поток. $N = 2$ суперконформная алгебра рассматривается в базисе, где ненулевые коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] &= (m - n)\mathcal{L}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n] &= \frac{C}{3}m\delta_{m+n,0}, \\ [\mathcal{L}_m, \mathcal{G}_n] &= (m - n)\mathcal{G}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{G}_n] &= \mathcal{G}_{m+n}, \\ [\mathcal{L}_m, \mathcal{Q}_n] &= -n\mathcal{Q}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{Q}_n] &= -\mathcal{Q}_{m+n}, \\ [\mathcal{L}_m, \mathcal{H}_n] &= -n\mathcal{H}_{m+n} + \frac{C}{6}(m^2 + m)\delta_{m+n,0}, \\ \{\mathcal{G}_m, \mathcal{Q}_n\} &= \mathcal{L}_{m+n} - n\mathcal{H}_{m+n} + \frac{C}{6}(m^2 + m)\delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (2.1)$$

и $m, n \in \mathbb{Z}$. Здесь $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{H}_n$ – бозонные, а $\mathcal{G}_n$ и $\mathcal{Q}_n$ – фермионные элементы. Ниже мы не различаем центральный элемент C и его собственное значение $c \neq 3$, которое мы параметризуем как $c = 3(1 - 2/t)$, где $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Для унитарных представлений мы будем

²⁾Мы называем модули, преобразованные посредством спектрального потока, *твистованными*, см. [14, 15, 7].

писать $t = p = 2, 3, \dots$ (где $p = 2$ приводит к тривиальному представлению). Для описания той же алгебры в терминах токов и операторных произведений определим токи

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Q}_n z^{-n-1}, & \mathcal{G}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_n z^{-n-2}, \\ \mathcal{T}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_n z^{-n-2}, & \mathcal{H}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n z^{-n-1}.\end{aligned}$$

В базисе, выбранном в (2.1), спектральный поток [19] действует как

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{U}}_\theta : \quad \mathcal{L}_n &\mapsto \mathcal{L}_n + \theta \mathcal{H}_n + \frac{c}{6}(\theta^2 + \theta)\delta_{n,0}, & \mathcal{H}_n &\mapsto \mathcal{H}_n + \frac{c}{3}\theta\delta_{n,0}, \\ \mathcal{Q}_n &\mapsto \mathcal{Q}_{n-\theta}, & \mathcal{G}_n &\mapsto \mathcal{G}_{n+\theta}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

При $\theta \in \mathbb{Z}$ эти преобразования являются автоморфизмами алгебры. Позволяя θ принимать полуцелые значения в (2.2), мы получаем изоморфизм между секторами Рамона и Невё–Шварца.

2.2. Унитарные представления $N = 2$ алгебры. Напомним кратко, следуя [7], несколько фактов об унитарных $N = 2$ представлениях. Это неприводимые факторы твистованных топологических³⁾ модулей Верма (см. приложение или подробнее в [15]) $\mathfrak{V}_{h^+(r,1,p),p;\theta}$, где параметризующая центральный заряд переменная есть $t = p \in \mathbb{N} + 1$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$; для дальнейшего определим также $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$), h^+ определяется в (П.4) (см. приложение), r – натуральное число такое, что $1 \leq r \leq p-1$, и θ – твист (см. определение П.1 в приложении). Хотя модуль Верма может иметь любой целочисленный твист θ , унитарные представления периодичны с периодом p (т.е. действие спектрального потока с $\theta = p$ дает изоморфное представление):

$$\mathfrak{K}_{r,p;\theta+p} \approx \mathfrak{K}_{r,p;\theta}.\tag{2.3}$$

Для унитарных представлений твист θ можно поэтому рассматривать $\bmod p$; тогда унитарные представления нумеруются таким образом:

$$\mathfrak{K}_{r,p;\theta}, \quad 1 \leq r \leq p-1, \quad \theta \in \mathbb{Z}_p.\tag{2.4}$$

Среди этих представлений, однако, имеются *только* $p(p-1)/2$ *неизоморфных*, поскольку существуют $N = 2$ изоморфизмы:

$$\mathfrak{K}_{r,p;\theta+r} \approx \mathfrak{K}_{p-r,p;\theta}, \quad 1 \leq r \leq p-1, \quad \theta \in \mathbb{Z}_p.\tag{2.5}$$

Чтобы пронумеровать каждое унитарное представление только один раз, можно, например, взять $1 \leq r \leq [p/2]$ и оставить для θ весь интервал $0 \leq \theta \leq p-1$ или же допустить, что $1 \leq r \leq p-1$, но с условием $0 \leq \theta \leq r-1$. Имеется еще специальное свойство

³⁾ В другой системе наименований “*киральные* модули” [20].

периодичности для представлений $\mathfrak{K}_{r,2r;\theta}$, период спектрального потока на которых составляет половину от периода в (2.3): $\mathfrak{K}_{r,2r;\theta+r} \approx \mathfrak{K}_{r,2r;\theta}$.

Как отмечено во введении, структура всех унитарных представлений будет описана, коль скоро описаны представители каждой орбиты спектрального потока. Ниже мы сконцентрируем внимание на представлениях $\mathfrak{K}_{r,p;r-1}$, которые в терминах модулей Верма являются факторами (см. (П.9))

$$\mathfrak{K}_{r,p;r-1} = \frac{\mathfrak{V}_{\frac{1-r}{p},p;r-1}}{\mathfrak{V}_{\frac{r+1}{p}-2,p;p-1} + \mathfrak{V}_{\frac{r+1}{p},p;-1}}. \quad (2.6)$$

Нетвистованные представления будут также обозначаться как $\mathfrak{K}_{r,p} \equiv \mathfrak{K}_{r,p;0}$.

3. ДУХОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

3.1. $bc\beta\gamma$ -Бозонизация $N = 2$ генераторов. Реализация $N = 2$ алгебры через свободные поля, которую мы здесь рассматриваем, связана с A_{p-1} моделями ГЛ. По данной сумме $W(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ потенциалов ГЛ для A -серии строится кошулевский дифференциал для “уравнений движения” $\partial W / \partial \gamma_i = 0$ [9–11]; для отдельной A_{p-1} -модели

$$W(\gamma) = \frac{1}{p} \gamma^p$$

этот дифференциал имеет вид

$$\mathbb{Q}_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint c \gamma^{p-1}. \quad (3.1)$$

В БРСТ-подходе такой дифференциал налагает связь

$$\gamma(z)^{p-1} \approx 0. \quad (3.2)$$

Входящие в (3.1) поля c и γ можно рассматривать как соответствующие части систем первого порядка, фермионной (bc) и бозонной ($\beta\gamma$), чьи операторные произведения задаются формулами

$$b(z)c(w) = \frac{1}{z-w}, \quad \beta(z)\gamma(w) = \frac{-1}{z-w}. \quad (3.3)$$

Тогда [9, 10] $\mathbb{Q}_0$ коммутирует с $N = 2$ алгеброй (т.е. является ее экранирующим оператором), реализованной в терминах *токов* как

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= -\beta c, & \mathcal{G} &= -\frac{1}{p} \gamma \partial b - \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \partial \gamma b, & \mathcal{H} &= -\frac{1}{p} \beta \gamma + \left(1 - \frac{1}{p} \right) bc, \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{p} \partial b c - \left(1 - \frac{1}{p} \right) b \partial c + \frac{1}{p} \partial \beta \gamma - \left(1 - \frac{1}{p} \right) \beta \partial \gamma, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\partial = \partial / \partial z$. Эта алгебра помогает организовать когомологии оператора $\mathbb{Q}_0$, которые, как можно было ожидать [10, 11], оказываются равными сумме унитарных $N = 2$ представлений (прямая сумма (3.15) ниже). Для их вычисления мы и строим резольвенту, что, в свою очередь, требует более подробного исследования представлений (3.4). Напомним, что мы считаем $p \in \mathbb{N} + 1$.

3.2. Духовые системы. Мы считаем, что bc - и $\beta\gamma$ -поля имеют нецелые моды, т.е. “твистованные граничные условия,” а также принимаем точку зрения, согласно которой твистованные граничные условия на фермионы порождают дробный фермионный заряд вакуума. Для полевой системы первого порядка с (полу)целым спином λ и разложением по модам $b(z) = \sum b_n z^{-n-\lambda}$ и $c(z) = \sum c_n z^{-n-1+\lambda}$ удобно наложить условия аннигиляции на вакуум n -й картины в виде

$$b_{m+1-\lambda-n}|n\rangle_{bc} = 0, \quad c_{m+\lambda+n}|n\rangle_{bc} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Тогда $(bc)_0|n\rangle_{bc} = n|n\rangle_{bc}$. Эти соотношения мы и продолжим на рациональные λ и рациональный номер картины n .

Далее номера картин n и ν для bc - и $\beta\gamma$ -теорий будут такими дробными числами, что

$$p\nu \in \mathbb{Z}, \quad \nu - n \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Духовые системы в (3.4) имеют конформный спин

$$\lambda = 1 - \frac{1}{p}. \quad (3.7)$$

Таким образом, моды духовых полей можно записать в виде

$$\begin{aligned} b_m, \quad m \in \frac{1}{p} - n + \mathbb{Z}, \quad c_m, \quad m \in -\frac{1}{p} + n + \mathbb{Z}, \\ \beta_m, \quad m \in \frac{1}{p} - \nu + \mathbb{Z}, \quad \gamma_m, \quad m \in -\frac{1}{p} + \nu + \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Определим bc -модуль $\Lambda_\lambda(n)$ с циклическим вектором $|n\rangle_{bc}$ и $\beta\gamma$ -модуль $\Xi_\lambda(\nu)$ с циклическим вектором $|\nu\rangle_{\beta\gamma}$, которые подчинены условиям

$$b_{\geq 1-\lambda-n}|n\rangle_{bc} = 0, \quad c_{\geq \lambda+n}|n\rangle_{bc} = 0 \quad (3.9)$$

$$\beta_{\geq 1-\lambda-\nu}|\nu\rangle_{\beta\gamma} = 0, \quad \gamma_{\geq \lambda+\nu}|\nu\rangle_{\beta\gamma} = 0, \quad (3.10)$$

где для n и ν выполнены условия (3.6) и где мы считаем, что $b_{\geq 1-\lambda-n}$ означает $(b_{m+1-\lambda-n})_{m \in \mathbb{N}_0}$ и $c_{\geq \lambda+n}$ означает $(c_{m+\lambda+n})_{m \in \mathbb{N}_0}$ (конечно, $\Lambda_\lambda(n)$ и $\Lambda_\lambda(n')$ изоморфны, если $n - n' \in \mathbb{Z}$). Тогда

$$(bc)_0|n\rangle_{bc} = n|n\rangle_{bc}, \quad (3.11)$$

$$(\beta\gamma)_0|\nu\rangle_{\beta\gamma} = -\nu|\nu\rangle_{\beta\gamma}. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, в частности, что все моды тока $\mathbb{Q}(z) = c(z)\gamma(z)^{p-1}$ имеют вид

$$\mathbb{Q}_j = \sum_{m_1, \dots, m_{p-1} \in \mathbb{Z} - \frac{1}{p}} c_{j-m_1-\dots-m_{p-1}} \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_{p-1}},$$

где $j \in \mathbb{Z}$, поскольку

$$-m_1 - \dots - m_{p-1} \in (p-1)\frac{1}{p} - (p-1)\nu + \mathbb{Z} = -\frac{1}{p} + \nu + \mathbb{Z} = -\frac{1}{p} + n + \mathbb{Z}$$

в силу (3.6).

Для $N = 2$ представления, порожденного из вектора $|n\rangle_{bc} \otimes |\nu\rangle_{\beta\gamma} \in \Lambda_\lambda(n) \otimes \Xi_\lambda(\nu)$, спектральный поток $\bar{U}_\vartheta$ реализуется заменой bc - и $\beta\gamma$ -картин вида

$$\Lambda_\lambda(n) \rightarrow \Lambda_\lambda(n - \vartheta\lambda), \quad \Xi_\lambda(\nu) \rightarrow \Xi_\lambda(\nu + \vartheta(1 - \lambda)). \quad (3.13)$$

Эта реализация $N = 2$ спектрального потока позволяет произвольным образом фиксировать общий твист до самого последнего момента, когда спектральный поток с любым желаемым значением ϑ можно применить к представлениям свободных полей. Удобный для дальнейшего выбор твиста приводит к унитарным представлениям $\mathfrak{K}_{r,p;r-1}$ (см. уравнение (2.6)).

3.3. “Гравитационные потомки” и резольвента. Опишем теперь комплекс $N = 2$ представлений на $bc\beta\gamma$ -пространстве $\Lambda_\lambda(n) \otimes \Xi_\lambda(\nu)$ с когомологиями, равными унитарным $N = 2$ представлениям. Напомним, что $bc\beta\gamma$ -система является существенной частью конформно-полевого описания топологической гравитации [21, 22], где она порождает гравитационные потомки [16–18] примарного поля. Теоретико-представленческая картина гравитационных потомков будет видна из структуры комплекса (см. замечание 3.2 ниже).

Обозначения для модулей. Твистованный модуль Верма $\mathfrak{U}_{h,\ell,p;\theta}$ (см. (П.10)–(П.12) в приложении) однозначно характеризуется набором $(h, \ell, p; \theta)$, т.е., по существу, условиями старшего веса (и собственными значениями картановских генераторов), которым удовлетворяет его старший вектор. В реализациях же свободных полей модуль не характеризуется условиями старшего веса, выполненными на векторах, из которых этот модуль порожден. Тем не менее указание значений h , ℓ и θ полезно при анализе отображений между модулями. Мы будем поэтому использовать обозначение $\hat{\mathfrak{U}}_{h,\ell,p;\theta}(M, N)$ для модуля, порожденного из $|M\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda+\nu-1}^N |\nu\rangle_{\beta\gamma}$ при $N \geq 0$ или из $|M\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda-\nu}^{-N} |\nu\rangle_{\beta\gamma}$ при $N < 0$, коль скоро указанный вектор удовлетворяет тем же условиям старшего веса, что и твистованный массивный старший вектор $|h, \ell, p; \theta\rangle$. Аналогичным образом будем писать $\hat{\mathfrak{V}}_{h,p;\theta}(M, N)$ для модуля, порожденного из $|M\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda+\nu-1}^N |\nu\rangle_{\beta\gamma}$ при $N \geq 0$ (или из $|M\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda-\nu}^{-N} |\nu\rangle_{\beta\gamma}$ при $N < 0$), когда указанный вектор удовлетворяет тем же условиям старшего веса, что и твистованный топологический старший вектор $|h, p; \theta\rangle_{\text{top}}$. Более того, будем иногда опускать аргументы (M, N) , просто указывая вместо этого духовую реализацию старшего вектора модуля при первом появлении данного модуля.

Мы используем обозначения $\Lambda_\lambda(n)$ и $\Xi_\lambda(\nu)$ для духовых модулей, определенных в (3.9)–(3.12).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathfrak{G}_{n,\nu,p} = \Lambda_\lambda(n) \otimes \Xi_\lambda(\nu)$ ($\lambda = 1 - 1/p$) – духовое пространство представления, где $n, \nu \in (1/p)\mathbb{Z}$, $\nu - n \in \mathbb{Z}$ и

$$1 + (\nu + 1)(1 - p) \leq n \leq \nu(1 - p).$$

Тогда существует комплекс $N = 2$ представлений на $\mathfrak{G}_{n,\nu,p}$

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-m-1,0,p;p-1+\nu p} \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \cdots \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-2,0,p;p-1+\nu p} \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p},0,p;\nu p-1} \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \\ \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}+1,0,p;\nu p-1} \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \cdots \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}+m,0,p;\nu p-1} \xrightarrow{\mathbb{Q}_0} \cdots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $r = 1 + \nu(1 - p) - n$, модули $\widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}+m,0,p;\nu p-1}$ при $m \geq 0$ порождены $N = 2$ генераторами (3.4) из состояния $|1 + \nu(1 - p)\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda+\nu-1}^{mp+r} |\nu\rangle_{\beta\gamma} \in \Lambda_\lambda(n) \otimes \Xi_\lambda(\nu)$ и модули $\widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-m,0,p;p-1+\nu p}$, $m \geq 2$, порождены из $|2 - p + \nu(1 - p)\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda-\nu}^{mp-r-1} |\nu\rangle_{\beta\gamma}$. Когомологии комплекса (3.14) сконцентрированы в члене $\widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p},0,p;\nu p-1}(1 + \nu(1 - p), r)$ и даются унитарным $N = 2$ представлением $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$, в котором $\theta = \nu - n$.

Поскольку $\Lambda_\lambda(n) \approx \Lambda_\lambda(n')$ при $n - n' \in \mathbb{Z}$, имеет место следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Когомологии оператора $\mathbb{Q}_0$ на $\mathfrak{G}_{n,\nu,p}$ равны прямой сумме унитарных $N = 2$ представлений

$$\bigoplus_{r=1}^{p-1} \mathfrak{K}_{r,p;r-1+\nu p}. \quad (3.15)$$

Теорему 3.1 можно редуцировать к случаю, когда $\nu = 0$, т.к. данные в условиях теоремы инвариантны под действием сдвигов

$$n \mapsto n + a(1 - p), \quad \nu \mapsto \nu + a, \quad (3.16)$$

которые меняют твист посредством $\theta \mapsto \theta + pa$. При $a \in \mathbb{Z}$, таким образом, индуцируется изоморфизм (2.3) унитарных представлений. При нецелых $a \in (1/p)\mathbb{Z}$ такие сдвиги дают другое унитарное $N = 2$ представление, однако различие сводится к общему преобразованию спектрального потока, применяемого к духовым пространствам в соответствии с (3.13). Таким образом, теорема эквивалентна случаю при $\nu = 0$, который формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.1' (случай $\nu = 0$). Пусть r — целое число такое, что $1 \leq r \leq p - 1$, и пусть $\mathfrak{G}_{1-r,0,p} = \Lambda_\lambda(1 - r) \otimes \Xi_\lambda(0) \approx \Lambda_\lambda(0) \otimes \Xi_\lambda(0)$ при $\lambda = 1 - 1/p$ — духовое пространство представления. Тогда имеется комплекс $N = 2$ представлений на $\mathfrak{G}_{1-r,0,p}$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-m,0,p;p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-2,0,p;p-1} \rightarrow \\ \rightarrow \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p},0,p;-1} \rightarrow \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}+1,0,p;-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}+m,0,p;-1} \rightarrow \cdots, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где модули $\widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}+m,0,p;-1}$, $m \geq 0$, порождены $N = 2$ генераторами (3.4) из состояния $|1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{mp+r} |0\rangle_{\beta\gamma}$ и модули $\widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-m,0,p;p-1}$, $m \geq 2$, порождены из

$|2-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{mp-r-1} |0\rangle_{\beta\gamma}$. Когомологии комплекса (3.17) сконцентрированы в члене $\hat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}, 0, p; -1}(1, r)$ и даются унитарным представлением $\mathfrak{K}_{r, p; r-1}$.

Эквивалентная форма (3.17) имеет вид

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \hat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p} + m - 1, p; r - (m-1)p - 1}((m-1)p - r + 1, 0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \hat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p} + 1, p; r - p - 1}(p - r + 1, 0) \rightarrow \\ \rightarrow \hat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}, 0, p; -1} \rightarrow \hat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p} + 1, 0, p; -1} \rightarrow \cdots \rightarrow \hat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p} + m, 0, p; -1} \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (3.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Модули $\hat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p} + m, 0, p; -1}$, $m \geq 0$, в (3.17) порождены из “гравитационных потомков”

$$|1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{mp+r} |0\rangle_{\beta\gamma} \equiv \sigma_{(p)}^m(|1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^r |0\rangle_{\beta\gamma}), \quad \sigma_{(p)} = \gamma_{\lambda-1}^p,$$

из которых все, кроме исходного состояния с $m = 0$, являются $\mathbb{Q}_0$ -тривиальными. В топологической гравитации $bc\beta\gamma$ -состояния тензорно умножаются на примарные поля из других секторов, что собственно и дает гравитационные потомки. Как мы увидим в дальнейшем, связывающие гравитационные потомки уравнения “tic-tac-toe” имеют вид

$$\mathcal{Q}_1 |1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{(m+1)p+r} |0\rangle_{\beta\gamma} = (mp + r) \mathbb{Q}_0 |1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{mp+r} |0\rangle_{\beta\gamma} \quad (3.19)$$

(этот факт является существенной частью построения резольвенты). Здесь $\mathcal{Q}_1 |1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{mp+r} |0\rangle_{\beta\gamma} = |0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{mp+r-1} |0\rangle_{\beta\gamma}$ — особый вектор, удовлетворяющий твистованым топологическим условиям старшего веса. Как и в формализме ГЛ, состояние при $m = 0$ выделено тем, что $\gamma_{\lambda-1}$ (наибольшая из мод поля γ , не аннулирующих вакуум) возводится в степень $0 \leq r - 1 \leq k = p - 2$. Эффекты, вызванные гравитационным одеванием, обсуждались с разных точек зрения [16–18, 23–25].

Для доказательства теоремы нам понадобится проанализировать структуру духовой реализации $N = 2$ представлений.

4. СТРУКТУРА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

4.1. Векторы старшего веса в духовой реализации. Рассмотрим $N = 2$ модуль, порожденный действием генераторов (3.4) на старший вектор $|n\rangle_{bc} \otimes |\nu\rangle_{\beta\gamma}$. Указанное состояние удовлетворяет тем же условиям, что и твистованный топологический вектор старшего веса $\left| \left(1 - \frac{1}{p}\right)\nu + \frac{n}{p}, p; \nu - n \right\rangle_{\text{top}}$ (см. определение П.1 из приложения), что мы выразим записью

$$|n\rangle_{bc} \otimes |\nu\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \left(1 - \frac{1}{p}\right)\nu + \frac{n}{p}, p; \nu - n \right\rangle_{\text{top}}. \quad (4.1)$$

Если в соответствии со сказанным выше $\beta\gamma$ -система взята в нулевой картине (а следовательно, bc -картина целочисленна), мы рассмотрим старший вектор

$$|1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \frac{1-r}{p}, p; 1-r \right\rangle_{\text{top}} \quad (4.2)$$

и обозначим через $\widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}, p; r-1}(1-r, 0) \subset \Lambda_\lambda(1-r) \otimes \Xi_\lambda(0)$, $\lambda = 1 - 1/p$, порожденное из него $N = 2$ представление.

Следующая лемма является непосредственным следствием вычислений. Мы приводим ее в качестве отдельного утверждения ввиду ее частого использования в дальнейшем.

ЛЕММА 4.1. *Состояние $|m\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^a |0\rangle_{\beta\gamma}$ удовлетворяет тем же условиям старшего веса, что и твистованный массивный вектор старшего веса $|\frac{m+a}{p}, \frac{a(1-m)}{p}, p; -m\rangle$, если $m \neq 0$, и твистованным топологическим условиям старшего веса (П.1), если $m = 0$:*

$$|m\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^a |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \begin{cases} \left| \frac{m+a}{p}, \frac{a(1-m)}{p}, p; -m \right\rangle, & m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{N}, \\ \left| \frac{a+2}{p} - 1, p; -1 \right\rangle_{\text{top}}, & m = 0, \quad a \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Подобным же образом имеем

$$|m\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^a |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \begin{cases} \left| \frac{m-a-2}{p} + 1, (a+1) \left(1 + \frac{m-2}{p} \right), p; 1-m \right\rangle, & m \in \mathbb{Z} \setminus \{1-p\}, \quad a \in \mathbb{N}, \\ \left| \frac{1-a}{p} - 1, p; p-1 \right\rangle_{\text{top}}, & m = 1-p, \quad a \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.4)$$

а также

$$|m\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \frac{m}{p}, p; -m \right\rangle_{\text{top}}. \quad (4.5)$$

Далее, в модуле Верма $\widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}, p; r-1}(1-r, 0)$ имеются особые векторы (П.5) и (П.6), а именно

$$|E(r, 1, p)\rangle^{+, r-1} = \mathcal{G}_{-1} \dots \mathcal{G}_{r-2} \left| \frac{1-r}{p}, p; r-1 \right\rangle_{\text{top}}, \quad (4.6)$$

$$|E(p-r, 1, p)\rangle^{-, r-1} = \mathcal{Q}_{-p+1} \dots \mathcal{Q}_{-r} \left| \frac{1-r}{p}, p; r-1 \right\rangle_{\text{top}}. \quad (4.7)$$

ЛЕММА 4.2. *В $N = 2$ модуле $\widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}, p; r-1}(1-r, 0)$, порожденном из вектора (4.2), имеем*

$$|E(r, 1, p)\rangle^{+, r-1} = 0, \quad (4.8)$$

$$|E(p-r, 1, p)\rangle^{-, r-1} = |1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{p-r} |0\rangle_{\beta\gamma}. \quad (4.9)$$

Рис. 1. Топологические векторы старшего веса и коособые векторы на экстремальной диаграмме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, записывая $\mathcal{G}_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}+1/p} (m - j\lambda) \gamma_{j-m} b_m$, видим, что

$$\mathcal{G}_{r-2} |1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma} = (1-\lambda)(r-1) b_{r-1-\lambda} |1-r\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^r |0\rangle_{\beta\gamma}.$$

Вектор $\mathcal{G}_{r-3} \mathcal{G}_{r-2} |1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma}$ дополнительно пропорционален $(1-\lambda)(r-2)$ и т. д. Поэтому особый вектор (4.6) обращается в нуль в модуле $\widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}, p; r-1}(1-r, 0)$.

Вместо обратившегося в нуль особого вектора (4.6) в $bc\beta\gamma$ -пространстве представления обнаруживается вектор

$$\begin{aligned} |C\rangle &= b_{-\lambda} \dots b_{r-2-\lambda} b_{r-1-\lambda} |1-r\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^r |0\rangle_{\beta\gamma} = \\ &= |1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^r |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \frac{r+1}{p}, 0, p; -1 \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

действием на который операторов $\mathcal{Q}$ получается старший вектор $\mathcal{Q}_{-r+2} \dots \mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_1 |C\rangle = r! |1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma}$. В порожденном из $|C\rangle$ модуле $\widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}, 0, p; -1}(1, r)$ равен нулю заряженный особый вектор $\mathcal{Q}_{1-r} \dots \mathcal{Q}_1 \left| \frac{r+1}{p}, 0, p; -1 \right\rangle$. Порожденный из особого вектора (4.9) подмодуль $\widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{r+1}{p}-2, p; p-1}(1-p, r-p)$ участвует в отображениях

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{r+1}{p}-2, p; p-1}(1-p, r-p) &\xrightarrow{[\mathcal{Q}_{-p+1} \dots \mathcal{Q}_{-r}]} \widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}, p; r-1}(1-r, 0) \xrightarrow{[\mathcal{Q}_{2-r} \dots \mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_1]} \\ &\xrightarrow{[\mathcal{Q}_{2-r} \dots \mathcal{Q}_0 \mathcal{Q}_1]} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}, 0, p; -1}(1, r), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\mathfrak{A} \xrightarrow{[\mathcal{E}]} \mathfrak{B}$ означает, что старший вектор модуля $\mathfrak{A}$ отображается на вектор, получаемый применением оператора $\mathcal{E}$ к старшему вектору модуля $\mathfrak{B}$. Полезно рассмотреть экстремальную диаграмму [15], описывающую соотношения между входящими сюда

модулями (см. рис. 1⁴) и 2⁵). Пунктирная линия на рис. 1 изображает экстремальную диаграмму *фактор*-модуля $\hat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p},0,p;-1}(1,r) / \hat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p},p;r-1}(1-r,0)$, в котором нижнее о состояние становится топологическим особым вектором $|E(p-r,2,p)\rangle^{+,-1}$.

Рис. 2. Экстремальная диаграмма вблизи коособого вектора и отображение посредством оператора $\mathbb{Q}_0$.

Заметим, что особый вектор (4.9) $\mathbb{Q}_0$ -точен, т.е.

$$|1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{p-r}|0\rangle_{\beta\gamma} = a_{p,r} \mathbb{Q}_0|2-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{2p-r-1}|0\rangle_{\beta\gamma}, \quad (4.12)$$

где $a_{p,r}^{-1} = (p-r+1)(p-r+2)\dots(2p-r-1)^6$, тогда как вектор (4.10) не является $\mathbb{Q}_0$ -замкнутым:

$$\mathbb{Q}_0|1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^r|0\rangle_{\beta\gamma} = |0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{p+r-1}|0\rangle_{\beta\gamma}. \quad (4.13)$$

⁴) На рис. 1 жирные точки обозначают состояния, удовлетворяющие твистованным топологическим условиям старшего веса. Верхняя парабола является экстремальной диаграммой, порожденной из коособого вектора о (уравнение (4.10)), т.е. экстремальной диаграммой модуля $\hat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p},0,p;-1}(1,r)$; обращение в нуль заряженного особого вектора в $\hat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p},0,p;-1}(1,r)$ приводит к излому в точке, представляющей состояние $|1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma}$. Подмодуль $\hat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p},p;r-1}$, порожденный из $|0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{r-1}|0\rangle_{\beta\gamma}$ (или эквивалентным образом из $|1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma}$), ограничен “вертикальной” параболой. Нижняя парабола является экстремальной диаграммой подмодуля, построенного на особом векторе (4.9).

⁵) На рис. 2 верхний фрагмент представляет собой увеличенную левую верхнюю часть рис. 1. Коособый вектор отображается оператором $\mathbb{Q}_1$ в модуль $\hat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p},p;r-1}$, порожденный модами $\dots, \mathcal{G}_{-2}, \mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_{-1}, \dots$. Пунктирная линия “замечается” действием мод $\mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_{-1}, \dots$ и является экстремальной диаграммой соответствующего фактор-модуля. Нижняя диаграмма представляет результат применения $\mathbb{Q}_0$: в target-модуле имеется подмодуль, изоморфный фактор-модулю, изображенному пунктирной линией, тогда как подмодуль из верхней диаграммы отображается в нуль.

⁶) В дальнейшем мы опускаем подобные множители, коль скоро они не обращаются в нуль.

Далее, для старшего вектора (4.2) имеем

$$\mathbb{Q}_{\geq 1-r} |1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma} = 0, \quad (4.14)$$

так что, в частности, $\mathbb{Q}_0 |1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma} = 0$. Более того $|1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma}$ лежит в когомологии оператора $\mathbb{Q}_0$ при $1 \leq r \leq p-1$, потому что состояние $|2-r\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{p-1} |0\rangle_{\beta\gamma}$, являющееся кандидатом на $\mathbb{Q}_0$ -первообразную состояния $|1-r\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma}$ в соответствии со своей градуировкой, действительно даст требуемое состояние только при $r = p$, что лежит за пределами интервала для r в *унитарных* представлениях. В когомологиях $\mathbb{Q}_0$ особый вектор $|1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{p-r} |0\rangle_{\beta\gamma}$ (см. рис. 1) обращается в нуль. Поскольку коособый вектор *не* лежит в когомологии $\mathbb{Q}_0$, это дает основания полагать, что когомологии равны как раз *унитарному представлению* $\mathfrak{K}_{r,p;r-1}$, которое в терминах модулей Верма дается конструкцией (2.6).

Сделаем подобные рассуждения более строгими. Нам надо показать, что хотя структура подмодулей изменяется в реализации через свободные поля, тем не менее в когомологиях оператора $\mathbb{Q}_0$ “эффективно” осуществляется факторизация, подобная той, которая имеется в (2.6), и что в когомологиях не возникает лишних подмодулей. Последнее будет следовать из структуры вложений $N = 2$ модулей свободных полей. С практической точки зрения легче всего перенести на $N = 2$ представления результаты, известные для $\widehat{sl}(2)$ -модулей в бозонизации Вакимото. Мы рассмотрим ее в следующем п. 4.2, после чего в п. 4.3 вернемся к собственно $N = 2$ анализу.

4.2. Отображение на бозонизацию Вакимото. Напомним, что $\widehat{sl}(2)$ -токи можно построить [14] из $N = 2$ генераторов и бозонного скалярного поля χ с операторным произведением $\partial\chi(z)\partial\chi(w) = -1/(z-w)^2$ следующим образом:

$$J^+ = \mathcal{Q}e^\chi, \quad J^0 = -\frac{p}{2}\mathcal{H} + \frac{p-2}{2}\partial\chi, \quad J^- = p\mathcal{G}e^{-\chi}. \quad (4.15)$$

Так полученные $\widehat{sl}(2)_{p-2}$ -генераторы коммутируют с током $I^- = \sqrt{\frac{p}{2}}(\mathcal{H} - \partial\chi)$. При применении этой конструкции к $bc\beta\gamma$ -реализации $N = 2$ алгебры мы бозонизуем фермионные духи обычным образом,

$$b = e^{-\varphi}, \quad c = e^\varphi, \quad (4.16)$$

и определим новую бозонную систему первого порядка, а также независимый ток

$$\beta = \beta e^{\chi+\varphi}, \quad \gamma = \gamma e^{-\chi-\varphi}, \quad (4.17)$$

$$\sqrt{\frac{p}{2}}\partial\varphi = -\frac{1}{2}\beta\gamma + \frac{p+1}{2}\partial\varphi + \frac{p}{2}\partial\chi. \quad (4.18)$$

В терминах этих полей $\widehat{sl}(2)_{p-2}$ -токи (4.15) принимают вид бозонизации Вакимото

$$\begin{aligned} J^+ &= -\beta, \\ J^0 &= \sqrt{\frac{p}{2}}\partial\varphi + \beta\gamma, \\ J^- &= \beta\gamma\gamma + \sqrt{2p}\gamma\partial\varphi + (p-2)\partial\gamma. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Бозонизуя $\beta\gamma$ -поля из (3.4) как

$$\beta = \partial\xi e^{-\phi}, \quad \gamma = \eta e^{\phi}, \quad (4.20)$$

где $\eta\xi$ – фермионная система первого порядка, можно построить бозонный экранирующий оператор для $N = 2$ генераторов (3.4):

$$S_W = \frac{1}{2\pi i} \oint \beta e^{\frac{1}{p}(\phi-\varphi)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \partial\xi e^{(\frac{1}{p}-1)\phi - \frac{1}{p}\varphi}. \quad (4.21)$$

При отображении в $\widehat{sl}(2)$ -алгебру в соответствии с (4.15)–(4.18) оператор S_W превращается в стандартный экранирующий оператор бозонизации Вакимото

$$S_W = \frac{1}{2\pi i} \oint \beta e^{-\sqrt{2/p}\varphi} \quad (4.22)$$

(т.е. тот экранирующий оператор, который участвует в создании резольвенты из работы [4]). Заметим, что входящая в представление Вакимото $\beta\gamma$ -система бозонизована как $\beta = \partial\xi e^{-\phi}$, $\gamma = \eta e^{\phi}$ с теми же η и ξ , что и в (4.20).

С другой стороны, используемый при построении $N = 2$ резольвенты фермионный экранирующий оператор $\mathbb{Q}_0$ принимает в терминах вакимотовских ингредиентов вид

$$\mathbb{Q}_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{\sqrt{2p}\varphi} \gamma^{p-1} e^{\phi}. \quad (4.23)$$

Наряду с $\beta\gamma$ -полями сюда явно входит поле ϕ . Полная бозонизация требует также введения фермионного экранирующего оператора

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \eta, \quad (4.24)$$

который редуцирует пространство состояний посредством удаления моды ξ_0 [13].

В терминах $\widehat{sl}(2)$ -алгебры фермионный экранирующий оператор $\mathbb{Q}_0$ действует между $\widehat{sl}(2)$ -модулями с различными *твистами* (т.е. модулями, преобразованными спектральным потоком [14, 7]). Это происходит потому, что множитель e^{ϕ} в (4.23) изменяет $\beta\gamma$ -картину и тем самым твист $\widehat{sl}(2)$ старшего вектора. Поэтому, применяя рецепт статьи [14] для переписывания комплекса (3.18) в терминах вакимото-бозонизованных $\widehat{sl}(2)$ -модулей, мы получаем резольвенту, которая “пересекается” с известной из [4, 5] только в одной точке, в “центральной” модуле, в то время как все остальные модули в $\widehat{sl}(2)$ -аналоге комплекса (3.18) имеют ненулевые твисты. Во избежание возможных недоразумений относительно того, как *экранирующий* оператор изменяет условия старшего веса, в диаграмме (4.25), приведенной ниже, показаны некоторые из отображений, являющихся аналогом соответствующих отображений на рис. 2 (соглашения о $\widehat{sl}(2)$ -экстремальных диаграммах такие же, как и в [14]). Мы также указываем вертексные

операторы, соответствующие старшим векторам в “нетвистованном” модуле (в том, который содержит когомологии) и его подмодуле:

В центральном и правом модулях подмодуль лежит в ядре оператора $\mathbb{Q}_0$. Соответствующий фактор-модуль, чья экстремальная диаграмма показана пунктирной линией, при этом отображается на подмодуль в следующем слева модуле:

$$\begin{aligned}
 \beta^{p-r} e^{\frac{r-1}{\sqrt{2p}}\varphi} &= \mathbb{Q}_0 \beta^{2p-r-1} e^{-\phi} e^{\frac{r-2p-1}{\sqrt{2p}}\varphi}, \\
 J_0^+ \beta^{2p-r-1} e^{-\phi} e^{\frac{r-2p-1}{\sqrt{2p}}\varphi} &= \beta^{2p-r} e^{-\phi} e^{\frac{r-2p-1}{\sqrt{2p}}\varphi} = \mathbb{Q}_0 \beta^{3p-r-1} e^{-2\phi} e^{\frac{r-4p-1}{\sqrt{2p}}\varphi}, \\
 J_1^+ \beta^{3p-r-1} e^{-2\phi} e^{\frac{r-4p-1}{\sqrt{2p}}\varphi} &= \mathbb{Q}_0(\dots).
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Подобное продолжается и далее направо, где возникает последовательность модулей Вакимото с возрастающими твистами (т.е. являющимися образами отображения $\widehat{sl}(2)$ -спектрального потока с параметрами $\theta = 1, 2, \dots$). Диаграмму можно продолжить и налево от центрального модуля. Вследствие результатов работ [4, 5] о модулях Вакимото мы знаем теперь, как устроены неприводимые подфакторы в $N = 2$ модулях в $\mathfrak{G}_{n,\nu,p}$ ⁷⁾. Теперь мы опишем некоторые детали на языке $N = 2$ алгебры.

4.3. Окончание доказательства теоремы 3.1. Мы продолжаем рассматривать случай, когда $\nu = 0$, как в (3.17). Заметим, что (с точностью до ненулевых множителей, которые легко восстановить) имеются следующие отображения, продолжающие (4.12):

$$\begin{aligned}
 &|2-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{3p-r-1} |0\rangle_{\beta\gamma} \xrightarrow{\mathcal{Q}_{1-p}} \dots \\
 &\quad \downarrow \mathbb{Q}_0 \\
 &|2-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{2p-r-1} |0\rangle_{\beta\gamma} \xrightarrow{\mathcal{Q}_{1-p}} |1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{2p-r} |0\rangle_{\beta\gamma} \\
 &\quad \downarrow \mathbb{Q}_0 \\
 &|1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{p-r} |0\rangle_{\beta\gamma}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

⁷⁾ В качестве отдельной задачи интересно было бы построить по аналогии с [5] модули, “интерполирующие” между модулями Верма из БГГ-резольвенты и *твистованными* модулями Вакимото из $\widehat{sl}(2)$ -аналога комплекса (3.18).

Вычисляя условия старшего веса для возникающих таким образом состояний $|2-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{mp-r-1}|0\rangle_{\beta\gamma}$ и $|1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{mp-r}|0\rangle_{\beta\gamma}$, получаем

$$|1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{mp-r}|0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \frac{r+1}{p} - m-1, p; p-1 \right\rangle_{\text{top}}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} |2-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{mp-r-1}|0\rangle_{\beta\gamma} &\doteq \left| \frac{r+1}{p} - m, 0, p; p-1 \right\rangle = \\ &= \mathcal{Q}_{2-p} \dots \mathcal{Q}_{(m-1)p-r} |(m-1)p-r+1\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где, кроме того, $|(m-1)p-r+1\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \frac{1-r}{p} + m-1, p; r-1-(m-1)p \right\rangle_{\text{top}}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$, таким образом, имеется пара модулей

$$\widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}+m-1, p; r-1-(m-1)p}((m-1)p-r+1, 0) \supset \widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{r+1}{p}-m-1, p; p-1}(1-p, r-mp) \quad (4.30)$$

(разумеется, *модули* отображаются в сторону, противоположную стрелкам $\xrightarrow{\mathcal{Q}_{1-p}}$ в (4.27)). Топологический модуль *Верма* $\mathfrak{V}_{\frac{1-r}{p}+m-1, p; r-1-(m-1)p}$, соответствующий модулю в левой части (4.30), имеет особые векторы $|E(pm-r, 1, p)\rangle^{-, r-1-(m-1)p}$ и $|E(r, m, p)\rangle^{+, r-1-(m-1)p}$. Первый из них отвечает твистованному топологическому модулю Верма $\mathfrak{V}_{\frac{r+1}{p}-m-1, p; p-1}$ и в духовой реализации также оказывается равным старшему вектору подмодуля в правой части (4.30). С другой стороны, особый вектор $|E(r, m, p)\rangle^{+, r-1-(m-1)p}$ обращается в нуль в $\widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}+m-1, p; r-1-(m-1)p}((m-1)p-r+1, 0)$.

Далее, в твистованном топологическом модуле Верма с теми же параметрами старшего вектора, что и в правой части равенства (4.30), имеются особые векторы $|E((m+1)p-r, 1, p)\rangle^{+, p-1}$ и $|E(r, m+1, p)\rangle^{-, p-1}$. Из (П.5) сразу же следует, что первый из них равен нулю в духовой реализации. Для того чтобы увидеть, что происходит со вторым, воспользуемся рекурсивной структурой уравнений (П.8) и (П.7). В модуле $\widehat{\mathfrak{V}}_{\frac{r+1}{p}-m-1, p; p-1}(1-p, r-mp)$ особый вектор (П.8) с твистом $\theta = p-1$ принимает вид

$$\begin{aligned} |E(r, m+1, p)\rangle^{-, p-1} &= q(1-r-p, (m-1)p)\mathcal{E}^{+, r-(m-1)p-1}(r, m, p) \times \\ &\times q((m-1)p-r+1, -p) |1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{mp-r}|0\rangle_{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где можно *явно вычислить* действие продолженного оператора $q((m-1)p-r+1, -p)$ на старший вектор в духовой реализации:

$$q((m-1)p-r+1, -p) |1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{mp-r}|0\rangle_{\beta\gamma} = |(m-1)p-r+1\rangle_{bc} \otimes |0\rangle_{\beta\gamma}. \quad (4.32)$$

Здесь существенно, что остальные операторы в правой части (4.31) содержат только элементы универсальной обертывающей $N = 2$ алгебры, поскольку $q(1-r-p, (m-1)p) = \mathcal{Q}_{1-r-p} \dots \mathcal{Q}_{(m-1)p}$. Поэтому особый вектор в (4.31) является потомком вектора $|E(r, m, p)\rangle^{+, r-1-(m-1)p}$ и, таким образом, равен нулю.

Продолжая подобным же образом, получаем две центральные диаграммы (соответствующие $m = 1$ и 2) и расположенные справа от них диаграммы из последовательности

которая продолжается также и налево, как сейчас будет объяснено. *Подмодуль*, представленный жирными точками в каждой диаграмме, является ядром оператора Q_0 . Из этих диаграмм видно примыкание неприводимых подфакторов (ср. обсуждение после уравнения (II.9)).

Продолжение отображений налево от центра осуществляется следующим образом. Модуль $\hat{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}, p; r-1}(1-r, 0)$ можно эквивалентно представить как $\hat{\mathfrak{V}}_{\frac{r+1}{p}-1, p; -1}(0, r-1)$, что означает просто взятие следующего слева излома на экстремальной диаграмме в качестве старшего вектора (см. рис. 1) $|0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{r-1} |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \frac{r+1}{p} - 1, p; -1 \right\rangle_{\text{top}}$. Как мы видели, $Q_1 |1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^r |0\rangle_{\beta\gamma} = |0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{r-1} |0\rangle_{\beta\gamma}$. С учетом (4.13) это можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & |1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^r |0\rangle_{\beta\gamma} \xrightarrow{Q_1} |0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{r-1} |0\rangle_{\beta\gamma} \\
 & \quad \downarrow Q_0 \\
 & |1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{p+r} |0\rangle_{\beta\gamma} \xrightarrow{Q_1} |0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{p+r-1} |0\rangle_{\beta\gamma} \\
 & \quad \downarrow Q_0 \\
 & \dots \xrightarrow{Q_1} |0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{2p+r-1} |0\rangle_{\beta\gamma}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

(как и раньше, с точностью до ненулевых множителей). Таким образом, возникают “гравитационные потомки” старшего вектора⁸⁾

$$|0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{mp+r-1} |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \frac{r+1}{p} + m - 1, p; -1 \right\rangle_{\text{top}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{4.35}$$

Из того факта, что эти векторы удовлетворяют твистованным топологическим условиям старшего веса, следует, в частности, что $\xrightarrow{Q_1}$ отображает в подмодуль: $\mathcal{G}_{-1} |0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{mp+r-1} = 0$.

⁸⁾ Тот факт, что в диаграмму (4.34) входит мода Q_1 , определяется спектральным поворотом на $\theta = -1$ вектора старшего веса (4.35); при нулевом твисте для этого состояния получилась бы мода Q_0 , а в (4.27) — Q_{-p} . Заметим еще, что, восстанавливая коэффициенты, получаем (3.19).

В каждом из модулей $\hat{\mathbf{U}}_{\frac{r+1}{p}+m,0,p;-1}$, порожденных из состояния

$$|1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{pm+r} |0\rangle_{\beta\gamma} \doteq \left| \frac{r+1}{p} + m, 0, p; -1 \right\rangle$$

в (4.34), заряженный особый вектор $\mathcal{Q}_{1-r-pm} \dots \mathcal{Q}_1 |1\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{pm+r} |0\rangle_{\beta\gamma}$ обращается в нуль. В каждом из этих модулей имеется также заряженный особый вектор $\mathcal{Q}_1 \left| \frac{r+1}{p} + m, 0, p; -1 \right\rangle$, фактор по которому изоморфен подмодулю в образе оператора $\mathcal{Q}_1$ в следующем модуле $\hat{\mathbf{U}}_{\frac{r+1}{p}+m+1,0,p;-1}$ (см. рис. 2). Продолжая таким образом, учитываем также, что диаграммы (4.34) и (4.27) соединены друг с другом, как показано в (4.11), а именно

$$|0\rangle_{bc} \otimes \gamma_{\lambda-1}^{r-1} |0\rangle_{\beta\gamma} \xrightarrow{\mathcal{Q}_{1-p} \dots \mathcal{Q}_{-r} \mathcal{Q}_{2-r} \dots \mathcal{Q}_0} |1-p\rangle_{bc} \otimes \beta_{-\lambda}^{p-r} |0\rangle_{\beta\gamma}.$$

В результате получаем (4.33).

Из описанной в (4.33) структуры примыкания неприводимых подфакторов заключаем, что когомологии сконцентрированы в одном члене и являются унитарным представлением $\mathfrak{K}_{r,p}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применительно к $bc\beta\gamma$ -бозонизации $N = 2$ алгебры мы видели (теорема 3.1), в какой мере верно “фольклорное” утверждение о том, что “когомологии порождены киральными примарными полями”: когомологии действительно содержат киральное примарное поле (топологический вектор старшего веса) для каждого r из интервала $1 \leq r \leq p-1$, однако это состояние, с одной стороны, может быть *твистованным* посредством спектрального потока, а с другой стороны, должно отвечать весьма специальному неприводимому подфактору в (4.33) (где имеется также бесконечно много других твистованных топологических состояний старшего веса, которые *не* лежат в когомологиях). Резольвента совсем другой структуры для тех же для унитарных $N = 2$ представлений будет построена в [26].

Благодарности. Я благодарен Б. Л. Фейгину и И. Ю. Типунину за полезные обсуждения. Эта работа поддержана частично грантом РФФИ № 98-01-01155 и грантом № 99-15-96037 Президента Российской Федерации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$N = 2$ модули Верма

Определим сначала класс $N = 2$ модулей Верма, которые мы называем *топологическими* (по другой терминологии киральными [20]) модулями Верма. Для заданного $\theta \in \mathbb{Z}$ определим *твистованный топологический вектор старшего веса* $|h, t, \theta\rangle_{\text{top}}$ следующими условиями (которые будем называть твистованными топологическими условиями старшего веса):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{-\theta+m} |h, t, \theta\rangle_{\text{top}} &= \mathcal{G}_{\theta+m} |h, t, \theta\rangle_{\text{top}} = \mathcal{L}_{m+1} |h, t, \theta\rangle_{\text{top}} = \\ &= \mathcal{H}_{m+1} |h, t, \theta\rangle_{\text{top}} = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

а также следующими собственными значениями картановских генераторов:

$$\left(\mathcal{H}_0 + \frac{c}{3}\theta\right)|h, t; \theta\rangle_{\text{top}} = h|h, t; \theta\rangle_{\text{top}}, \quad (\text{П.2})$$

$$\left(\mathcal{L}_0 + \theta\mathcal{H}_0 + \frac{c}{6}(\theta^2 + \theta)\right)|h, t; \theta\rangle_{\text{top}} = 0 \quad (\text{П.3})$$

(уравнение (П.3) здесь в действительности следует из условий аннигиляции). Параметр t определяет центральный заряд $c = 3(1 - 2/t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П.1. *Твистованный топологический модуль Верма* $\mathfrak{V}_{h,t;\theta}$ является модулем, свободно порожденным из топологического старшего вектора $|h, t; \theta\rangle_{\text{top}}$ операторами $\mathcal{Q}_{\leq -1-\theta}$, $\mathcal{G}_{\leq -1+\theta}$, $\mathcal{L}_{\leq -1}$ и $\mathcal{H}_{\leq -1}$.

Мы используем обозначение $|h, t\rangle_{\text{top}} \equiv |h, t; 0\rangle_{\text{top}}$ в “нетвистованном” случае ($\theta = 0$) и соответственно пишем $\mathfrak{V}_{h,t} \equiv \mathfrak{V}_{h,t;0}$ для нетвистованного модуля.

Подмодули в топологическом модуле Верма являются твистованными топологическими модулями Верма (или суммой двух таких модулей). Особый вектор существует в $\mathfrak{V}_{h,t;\theta}$ тогда и только тогда, когда $h = h^+(r, s, t)$ или $h = h^-(r, s, t)$, где

$$h^+(r, s, t) = \frac{1-r}{t} + s - 1, \quad h^-(r, s, t) = \frac{1+r}{t} - s, \quad r, s \in \mathbb{N}. \quad (\text{П.4})$$

Эти особые векторы обозначаются как $|E(r, s, t)\rangle^{\pm, \theta}$ (где твист θ опускается в том случае, когда он равен нулю). Порожденный из $|E(r, s, t)\rangle^{\pm, \theta}$ подмодуль в $\mathfrak{V}_{h,t;\theta}$ является твистованным топологическим модулем Верма $\mathfrak{V}_{h \pm r \frac{2}{t}, t; \theta \mp r}$. При $s = 1$ особые векторы принимают особенно простой вид

$$|E(r, 1, t)\rangle^{+, \theta} = \mathcal{G}_{\theta-r} \dots \mathcal{G}_{\theta-1} |h^+(r, 1, t), t; \theta\rangle_{\text{top}}, \quad (\text{П.5})$$

$$|E(r, 1, t)\rangle^{-, \theta} = \mathcal{Q}_{-\theta-r} \dots \mathcal{Q}_{-\theta-1} |h^-(r, 1, t), t; \theta\rangle_{\text{top}}, \quad (\text{П.6})$$

тогда как при $s \geq 2$ особые векторы в топологическом модуле Верма даются конструкцией [27, 15], использующей продолженные операторы $q(a, b)$ и $g(a, b)$, которые превращаются в произведения $\mathcal{Q}_a \mathcal{Q}_{a+1} \dots \mathcal{Q}_b$ и $\mathcal{G}_a \mathcal{G}_{a+1} \dots \mathcal{G}_b$ при $b - a + 1 \in \mathbb{N}$. В терминах этих продолженных операторов особые векторы имеют вид

$$|E(r, s, t)\rangle^+ = g(-r, (s-1)t-1) \mathcal{E}^{-(s-1)t-r}(r, s-1, t) \times \\ \times g((s-1)t-r, -1) |h^+(r, s, t), t\rangle_{\text{top}}, \quad (\text{П.7})$$

$$|E(r, s, t)\rangle^- = q(-r, (s-1)t-1) \mathcal{E}^{+, r-(s-1)t}(r, s-1, t) \times \\ \times q((s-1)t-r, -1) |h^-(r, s, t), t\rangle_{\text{top}}, \quad (\text{П.8})$$

где $\mathcal{E}^{\pm}$ — соответствующий оператор особого вектора и $\mathcal{E}^{\pm, \theta}$ — их спектральное преобразование на θ . Имеется набор алгебраических правил [15], позволяющих вычислять эти выражения в виде мономов по $N = 2$ генераторам $\mathcal{Q}_n$, $\mathcal{G}_n$, $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{L}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, коль скоро особые векторы при $s \mapsto s-1$ уже вычислены в таком виде. Поскольку $s = 1$, векторы даются формулами (П.5) и (П.6), получается рекурсивная процедура для вычисления всех особых векторов в (твистованных) топологических модулях Верма [27].

При $t = p \in \mathbb{N} + 2$ и $1 \leq r \leq p - 1$ топологический модуль Верма $\mathfrak{V}_{\frac{1-r}{p}, p; r-1}$ имеет следующую диаграмму вложений [7], составленную из твистованных топологических модулей Верма (для которых указаны значения $(h; \theta)$)⁹⁾:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \begin{smallmatrix} (\frac{r+1}{p}-2; p-1) \\ \bullet \end{smallmatrix} & \xrightarrow{(\frac{1-r}{p}-2; p+r-1)} & \begin{smallmatrix} (\frac{r+1}{p}-2m; mp-1) \\ \bullet \end{smallmatrix} & \xrightarrow{(\frac{1-r}{p}-2m; mp+r-1)} & \dots & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 \begin{smallmatrix} (\frac{1-r}{p}; r-1) \\ \bullet \end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix} (\frac{r+1}{p}; -1) \\ \bullet \end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix} (\frac{r+1}{p}+2(m-1); \\ (1-m)p-1) \end{smallmatrix} & & \dots \\
 & \searrow & \nwarrow & \searrow & \nwarrow & \searrow & \\
 & \begin{smallmatrix} (\frac{1-r}{p}+2; r-1-p) \\ \bullet \end{smallmatrix} & \xrightarrow{\quad} & \begin{smallmatrix} (\frac{1-r}{p}+2m; r-1-mp) \\ \bullet \end{smallmatrix} & \xrightarrow{\quad} & \dots & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
 & \dots & & \dots & & \dots &
 \end{array} \quad (\text{П.9})$$

Стрелки проведены в направлении к *подмодулям*. Для модулей Верма подобная диаграмма показывает иерархию особых векторов и тем самым примыкание неприводимых подфакторов. Для модулей типа модулей Вакимото такие диаграммы естественно воспринимать как примыкание подфакторов: каждая точка представляет собой *неприводимый* подфактор, а стрелка $\begin{smallmatrix} A \\ \bullet \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} B \\ \bullet \end{smallmatrix}$ означает, что существует модуль, в котором B является подмодулем, а A оказывается фактор-модулем (говорят также, что A приклеено к B); таким образом, стрелки представляют все подфакторы, состоящие из двух неприводимых.

Другой класс верма-подобных $N = 2$ модулей определяется следующим образом [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ П.2. Твистованный массивный модуль Верма $\mathfrak{U}_{h, \ell, t; \theta}$ свободно порожден из твистованного *массивного старшего вектора* $|h, \ell, t; \theta\rangle$ генераторами

$$\mathcal{L}_{-m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_{-m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{Q}_{-\theta-m}, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad \mathcal{G}_{\theta-m}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (\text{П.10})$$

Твистованный массивный старший вектор $|h, \ell, t; \theta\rangle$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_{m+1-\theta}|h, \ell, t; \theta\rangle &= \mathcal{G}_{m+\theta}|h, \ell, t; \theta\rangle = \\
 &= \mathcal{L}_{m+1}|h, \ell, t; \theta\rangle = \mathcal{H}_{m+1}|h, \ell, t; \theta\rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}_0,
 \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

и

$$\begin{aligned}
 \left(\mathcal{H}_0 + \frac{c}{3}\theta \right) |h, \ell, t; \theta\rangle &= h |h, \ell, t; \theta\rangle, \\
 \left(\mathcal{L}_0 + \theta \mathcal{H}_0 + \frac{c}{6}(\theta^2 + \theta) \right) |h, \ell, t; \theta\rangle &= \ell |h, \ell, t; \theta\rangle.
 \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Мы пишем также $|h, \ell, t\rangle = |h, \ell, t; 0\rangle$ и $\mathfrak{U}_{h, \ell, t} = \mathfrak{U}_{h, \ell, t; 0}$.

Заряженный особый вектор появляется в $\mathfrak{U}_{h, \ell, t; \theta}$, когда [8]

$$\ell = \ell_{\text{ch}}(n, h, t) \equiv -n \left(h - \frac{n+1}{t} \right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{П.13})$$

⁹⁾ В качестве “начального” выбран модуль, твистованный на $r - 1$, поскольку такие модули используются в разделе 3; общий твист легко применяется ко всей диаграмме [7].

и имеет вид [27, 15]

$$|E(n, h, t)\rangle_{\text{ch}}^{\theta} = \begin{cases} \mathcal{Q}_{-\theta-n} \dots \mathcal{Q}_{-\theta} |h, l_{\text{ch}}(n, h, t), t; \theta\rangle, & n \geq 0, \\ \mathcal{G}_{\theta+n} \dots \mathcal{G}_{\theta-1} |h, l_{\text{ch}}(n, h, t), t; \theta\rangle, & n \leq -1. \end{cases} \quad (\text{П.14})$$

Это состояние на экстремальной диаграмме удовлетворяет *твистованным* топологическим условиям старшего веса с твистом $\theta + n$, и порожденный из $|E(n, h, t)\rangle_{\text{ch}}^{\theta}$ подмодуль является твистованным топологическим модулем Верма $\mathfrak{V}_{h-\frac{2n}{t}-1, t; n+\theta}$, если $n \geq 0$, и модулем $\mathfrak{V}_{h-\frac{2n}{t}, t; n+\theta}$, если $n \leq -1$. Полезно изобразить заряженные особые векторы соответственно при $n \geq 0$ и $n \leq -1$ следующим образом:

(П.15)

Здесь нельзя обратить стрелки, действуя противоположной модой другого фермиона из $N = 2$ алгебры, это означает, что полученные состояния удовлетворяют твистованным *топологическим* условиям старшего веса и порождают *подмодуль*. Заметим, наконец, что, когда заряженный особый вектор порождает максимальный подмодуль, фактор массивного модуля Верма по этому подмодулю оказывается твистованным топологическим модулем Верма.

Список литературы

- [1] *B. L. Feigin, D. B. Fuchs.* Representations of the Virasoro Algebra. In: Representations of Lie Groups and Related Topics. Eds. A. A. Vershik and D. A. Zhelobenko. N. Y.: Gordon and Breach, 1990.
- [2] *G. Felder.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 317. P. 215; V. 324. P. 548.
- [3] *I. Bernshtein, I. Gelfand, S. Gelfand.* Funk. An. Prilozh. 1976. V. 10. P. 1.
- [4] *D. Bernard, G. Felder.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 145.
- [5] *B. L. Feigin, E. V. Frenkel.* Representations of Affine Kac-Moody Algebras and Bosonization. In: Physics and Mathematics of Strings. Memorial Volume for Vadim Knizhnik. Eds. L. Brink, D. Friedan, A. M. Polyakov. World Sci.; Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 161.
- [6] *P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 125.
- [7] *B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, V. A. Sirota, I. Yu. Tipunin.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 536. P. 617; hep-th/9805179.
- [8] *W. Boucher, D. Friedan, A. Kent.* Phys. Lett. B. 1986. V. 172. P. 316.
- [9] *P. Fré, L. Girardello, A. Lerda, P. Soriani.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 387. P. 333.
- [10] *E. Witten.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 4783.
- [11] *T. Kawai, Y. Yamada, S.-K. Yang.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 414. P. 191.
- [12] *D. Nemeschansky, N. P. Warner.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 442. P. 623.
- [13] *D. H. Friedan, E. J. Martinec, S. H. Shenker.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 271. P. 93.
- [14] *B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin.* Equivalence between Chain Categories of Representations of Affine $sl(2)$ and $N = 2$ Superconformal Algebras. hep-th/9701043; J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 3865.

- [15] *A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 195. P. 129.
- [16] *A. S. Losev (Losev).* Descendants Constructed from Matter Field and K. Saito Higher Residue Pairing in Landau–Ginzburg Theories Coupled to Topological Gravity. hep-th/9211090.
- [17] *T. Eguchi, H. Kanno, Y. Yamada, S.-K. Yang.* Phys. Lett. B. 1993. V. 305. P. 235.
- [18] *W. Lerche, N. P. Warner.* Phys. Lett. B. 1995. V. 343. P. 87.
- [19] *A. Schwimmer, N. Seiberg.* Phys. Lett. B. 1987. V. 184. P. 191.
- [20] *W. Lerche, C. Vafa, N. P. Warner.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 324. P. 427.
- [21] *E. Verlinde, H. Verlinde.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 348. P. 457; *R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde.* Notes on Topological String Theory and 2d Quantum Gravity. PUPT-1217. Princeton: Princeton Univ., 1990.
- [22] *K. Landsteiner, W. Lerche, A. Sevrin.* Phys. Lett. B. 1995. V. 352. P. 286.
- [23] *W. Lerche.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 434. P. 445; Chiral Rings and Integrable Systems for Models of Topological Gravity. hep-th/9401121.
- [24] *M. Bershadsky, W. Lerche, D. Nemeschansky, N. P. Warner.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 401. P. 304.
- [25] *R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59.
- [26] *А. М. Семикхатов, Б. Л. Феџун.* ТМФ. 1999. Т. 121. № 2 (в печати).
- [27] *A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin.* All Singular Vectors of the $N = 2$ Superconformal Algebra via the Algebraic Continuation Approach. hep-th/9604176.

Поступила в редакцию 14.V.1999 г.