Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Галажинский, А. Н. Мягкий, $N = 4$ суперконформная алгебра в искривленном пространстве и псевдогиперкэлерова геометрия, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 1, 104–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:40:36

© 2004 г.

А. В. Галажинский*, А. Н. Мягкий*

$N = 4$ СУПЕРКОНФОРМНАЯ АЛГЕБРА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ПСЕВДОГИПЕРКЭЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЯ

В предположении минимального взаимодействия построено представление $N = 4$ малой суперконформной алгебры в искривленном пространстве. Установлено, что в рамках указанного предположения структурные соотношения алгебры выполнены на фоне метрики псевдогиперкэлера многообразия.

Ключевые слова: суперконформная алгебра, псевдогиперкэлера геометрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Конформная симметрия является неотъемлемой составляющей ряда важнейших моделей теоретической и математической физики. Достаточно упомянуть, что $d = 2$ конформная инвариантность является ключевым звеном современной теории струн [1]. Конформная теория поля предлагает один из интересных подходов при описании критических явлений в статистической механике [2]. В рамках квантовой теории поля в четырехмерном пространстве-времени конформная инвариантность приводит к впечатляющему сокращению ультрафиолетовых расходимостей [3], [4]. Недавно было обнаружено [5], что определенные конформные теории поля в d -мерном пространстве-времени могут быть описаны в терминах теории струн в пространстве, являющемся произведением $(d+1)$ -мерного антидеситтерова пространства и компактного многообразия (AdS/CFT-соответствие). Даже столь экзотическое явление, как движение заряженной массивной частицы вблизи горизонта черной дыры, описывается в терминах конформной механики [6].

Одной из впечатляющих особенностей N -расширенной суперконформной симметрии в двумерном пространстве является взаимосвязь между числом фермионных генераторов в алгебре и нетривиальными геометриями. Любопытно отметить, что данная зависимость проявляется при $N > 1$ и, если ограничиться рассмотрением только унитарных представлений [7], имеется дополнительное ограничение сверху $N \leq 4$. В частности, в

*Томский политехнический университет, Томск, Россия. E-mail: galajin@mph.phtd.tpu.edu.ru, anm@phys.tsu.ru

работе [8] было показано, что при переходе к искривленному фону теория классической $N = 2$ струны (см., например, [9]) сохраняет суперконформную инвариантность только на фоне кэлеровой метрики. Аналогичная взаимосвязь между моделью $N = 4$ струны [10]–[14] и псевдогиперкэлеровой геометрией была установлена недавно в работе [15].

Таким образом, взаимодействие в теории N -расширенных струн оказывается возможным только в пространствах, имеющих весьма специальную геометрическую структуру. Отметим, что упомянутые результаты находятся в согласии с вычислениями, проведенными в рамках сигма-модельного подхода [16].

Стандартный способ, позволяющий установить взаимосвязь между суперконформными преобразованиями и (комплексной) геометрией, состоит в проверке локальных симметрий в функционале действия струны во внешних фоновых полях. При этом предполагается, что взаимодействие вводится минимальным образом. Для несуперсимметричных теорий достаточно заменить частную производную по переменным, параметризующим мировой лист, на ковариантную (содержащую символ Кристоффеля), а для суперсимметричного случая необходимо учесть дополнительную вершину четвертого порядка по фермионам, включающую тензор Римана [16]. Отметим, что явные вычисления оказываются весьма громоздкими и требуют использования тождеств Фирца для двумерных спиноров.

Вместе с тем интересно непосредственно проанализировать структуру представления $N = 2$ и $N = 4$ суперконформных алгебр в искривленном пространстве без апелляции к функционалу действия той или иной струнной теории.

В данной работе в предположении минимального взаимодействия построено представление $N = 4$ малой суперконформной алгебры в искривленном пространстве и установлено, что в рамках данного предположения структурные соотношения алгебры выполнены на фоне метрики (псевдо)гиперкэлерова многообразия.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 приведено представление $N = 4$ суперконформной алгебры в плоском пространстве. В разделе 3 установлены коммутационные соотношения фундаментальных полей в искривленном пространстве. Раздел 4 посвящен построению представления $N = 4$ суперконформной алгебры в искривленном пространстве и установлению ограничений на фоновые поля, характеризующие геометрию объемлющего пространства. В разделе 5 обсуждаются полученные результаты и возможные обобщения. В приложении А приведены структурные соотношения $N = 4$ суперконформной алгебры в плоском пространстве. Необходимые сведения о структуре тензора кривизны на кэлеровом многообразии для полноты изложения приведены в приложении Б.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $N = 4$ СУПЕРКОНФОРМНОЙ АЛГЕБРЫ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Стандартное представление $N = 4$ (малой) суперконформной алгебры реализуется в пространстве комплексных полей материи, заданных на двумерной поверхности цилинд-

рической топологии¹⁾. Бозонный сектор исчерпывается парой $z^n(\tau, \sigma)$, $z^{\bar{n}}(\tau, \sigma)$. Фермионный сектор включает в себя поля $\psi_{(+)}^n$, $\psi_{(+)}^{\bar{n}}$ и $\psi_{(-)}^n$, $\psi_{(-)}^{\bar{n}}$, описывающие правые и левые фермионные моды, соответственно. В критической размерности индекс объемлющего пространства n принимает значения 0, 1. При комплексном сопряжении имеем $(z^n)^* = z^{\bar{n}}$, $(\psi_{(\pm)}^n)^* = \psi_{(\pm)}^{\bar{n}}$.

Отметим, что при переходе к вещественным координатам в зависимости от выбора сигнатуры исходной метрики $ds^2 = \eta_{n\bar{n}} dz^n \otimes dz^{\bar{n}}$ приходим либо к четырехмерному евклидову пространству, либо к псевдоевклидову пространству сигнатуры $(-, -, +, +)$. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением последнего случая, в частности метрику в объемлющем плоском пространстве выберем в виде $\eta_{n\bar{n}} = \text{diag}(-, +)$.

Один из удобных способов реализации представления $N = 4$ суперконформной алгебры состоит в переходе к фазовому пространству, которое в дополнение к бозонным полям, указанным выше, содержит канонически-сопряженные импульсы $p_n(\tau, \sigma)$, $p_{\bar{n}}(\tau, \sigma)$:

$$\{z^n(\sigma), p_m(\sigma')\} = \delta^n_m \delta(\sigma - \sigma'), \quad \{z^{\bar{n}}(\sigma), p_{\bar{m}}(\sigma')\} = \delta^{\bar{n}}_{\bar{m}} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (1)$$

Фермионные поля выбраны самосопряженными²⁾:

$$\{\psi_{(+)}^n(\sigma), \psi_{(+)}^{\bar{m}}(\sigma')\} = i\eta^{\bar{m}n} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \{\psi_{(-)}^n(\sigma), \psi_{(-)}^{\bar{m}}(\sigma')\} = i\eta^{\bar{m}n} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2)$$

Реализация генераторов в секторе правых мод задается формулами [11], [12] (принято стандартное обозначение $\partial_1 = \partial/\partial\sigma$)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(p_k \eta^{\bar{n}k} + \partial_1 z^{\bar{n}})(p_{\bar{n}} + \partial_1 z^k \eta_{k\bar{n}}) - \frac{i}{2}(\psi_{(+)}^n \partial_1 \psi_{(+)}^{\bar{n}} + \psi_{(+)}^{\bar{n}} \partial_1 \psi_{(+)}^n) \eta_{n\bar{n}}, \\ G &= (p_{\bar{k}} \eta^{\bar{k}n} + \partial_1 z^n) \psi_{(+)}^{\bar{n}} \eta_{n\bar{n}}, \quad \bar{G} = (p_k \eta^{\bar{n}k} + \partial_1 z^{\bar{n}}) \psi_{(+)}^n \eta_{n\bar{n}}, \\ H &= (p_{\bar{k}} \eta^{\bar{k}n} + \partial_1 z^n) \psi_{(+)}^m \epsilon_{nm}, \quad \bar{H} = (p_k \eta^{\bar{n}k} + \partial_1 z^{\bar{n}}) \psi_{(+)}^{\bar{m}} \epsilon_{\bar{n}\bar{m}}, \\ J &= \psi_{(+)}^{\bar{n}} \psi_{(+)}^n \eta_{n\bar{n}} = 0, \quad J^{(1)} = \psi_{(+)}^n \psi_{(+)}^m \epsilon_{nm}, \quad J^{(2)} = \psi_{(+)}^{\bar{n}} \psi_{(+)}^{\bar{m}} \epsilon_{\bar{n}\bar{m}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ϵ_{nm} — антисимметричный тензор Леви-Чивита ($\epsilon_{nm} = -\epsilon_{mn}$, $\epsilon_{01} = -1$, $(\epsilon_{nm})^* = \epsilon_{\bar{n}\bar{m}}$). Структурные соотношения $N = 4$ алгебры в плоском пространстве приведены в приложении А.

Отметим, что генераторы T , G , $\bar{G}$, J образуют замкнутую $N = 2$ подалгебру. В рамках теории струн, где выписанные выше выражения фигурируют в качестве связей первого рода, соотношения для H , $\bar{H}$, $J^{(1,2)}$ оказываются функционально зависимыми [12]. Основное преимущество такого расширения $N = 2$ суперконформной алгебры состоит в том, что группа внешних автоморфизмов $U(1, 1)$ при этом расширяется до полной группы Лоренца $SO(2, 2)$. Иными словами, в теории классической $N = 2$ струны восстанавливается лоренц-инвариантность.

¹⁾В данной работе мы анализируем случай, соответствующий теории замкнутой струны.

²⁾В рамках $N = 4$ струнной теории данные соотношения возникают после построения скобки Дирака по фермионным связям второго рода и удаления из рассмотрения импульсов, канонически-сопряженных фермионным переменным (см. также раздел 3).

Отметим также, что имеется аналогичное представление, действующее в секторе левых мод, которое получается из приведенного в (3) заменой знака плюс на знак минус в круглых скобках, содержащих бозонные переменные. Кроме того, необходимо сделать замену $\psi_{(+)} \rightarrow \psi_{(-)}$ и сменить знак перед фермионным вкладом в конформный генератор T . Отметим, что в плоском пространстве генераторы представления, действующие в секторе правых и левых мод, взаимно коммутируют.

3. СКОБКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Приступая к анализу $N = 4$ алгебры в искривленном пространстве, помимо явной реализации суперконформных генераторов, необходимо установить структуру скобок фундаментальных переменных. Как нетрудно обнаружить, наивная замена плоской метрики $\eta_{n\bar{m}}$ на кривую $g_{n\bar{m}}(z, \bar{z})$ в уравнениях (2) не совместна с тождеством Якоби. Наиболее простой способ подобрать необходимую модификацию предлагается формализмом теории струн. Достаточно сделать упомянутый переход к метрике искривленного пространства в системе связей второго рода

$$p_n^{(\pm)} + \frac{i}{2} \psi_{(\pm)}^{\bar{n}} \eta_{n\bar{n}} = 0, \quad p_{\bar{n}}^{(\pm)} + \frac{i}{2} \psi_{(\pm)}^n \eta_{n\bar{n}} = 0, \quad (4)$$

где $p_n^{(\pm)}, p_{\bar{n}}^{(\pm)}$ – импульсы, канонически-сопряженные к переменным $\psi_{(\pm)}^n, \psi_{(\pm)}^{\bar{n}}$, соответственно, и построить по последним стандартную скобку Дирака³⁾

$$\begin{aligned} \{A, B\}_D = & \{A, B\} + i \left\{ A, p_n^{(+)} + \frac{i}{2} \psi_{(+)}^{\bar{k}} g_{n\bar{k}} \right\} g^{\bar{n}n} \left\{ p_{\bar{n}}^{(+)} + \frac{i}{2} \psi_{(+)}^k g_{k\bar{n}}, B \right\} + \\ & + i \left\{ A, p_{\bar{n}}^{(+)} + \frac{i}{2} \psi_{(+)}^k g_{k\bar{n}} \right\} g^{\bar{n}n} \left\{ p_n^{(+)} + \frac{i}{2} \psi_{(+)}^{\bar{k}} g_{n\bar{k}}, B \right\} + \\ & + i \left\{ A, p_n^{(-)} + \frac{i}{2} \psi_{(-)}^{\bar{k}} g_{n\bar{k}} \right\} g^{\bar{n}n} \left\{ p_{\bar{n}}^{(-)} + \frac{i}{2} \psi_{(-)}^k g_{k\bar{n}}, B \right\} + \\ & + i \left\{ A, p_{\bar{n}}^{(-)} + \frac{i}{2} \psi_{(-)}^k g_{k\bar{n}} \right\} g^{\bar{n}n} \left\{ p_n^{(-)} + \frac{i}{2} \psi_{(-)}^{\bar{k}} g_{n\bar{k}}, B \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

При таком способе действий связи (4) далее трактуются как сильные равенства, позволяющие исключить импульсы $p_n^{(\pm)}, p_{\bar{n}}^{(\pm)}$ из рассмотрения. Для скобок, включающих оставшиеся переменные $\psi_{(\pm)}^n, \psi_{(\pm)}^{\bar{n}}$, автоматически выполнено тождество Якоби, а плоский предел указанных соотношений в точности совпадает с формулами (2).

Для дальнейшего рассмотрения полезно выписать возникающие соотношения в явном виде. В дополнение к скобкам (1), (2), в которых плоская метрика заменена на мет-

³⁾ В данной формуле подразумевается интегрирование по переменной σ , от которой зависят функции связей, и используется стандартная скобка Пуассона для фермионов $\{\psi_{(\pm)}^n(\sigma), p_m^{(\pm)}(\sigma')\} = \delta_m^n \delta(\sigma - \sigma')$.

рику искривленного пространства, единственными ненулевыми соотношениями оказываются следующие:

$$\begin{aligned}\{p_N(\sigma), p_M(\sigma')\} &= \frac{i}{2}(\psi_{(+)}^k \psi_{(+)}^{\bar{k}} + \psi_{(-)}^k \psi_{(-)}^{\bar{k}}) g^{\bar{s}s} \partial_{[N} g_{k\bar{s}} \partial_{M]} g_{s\bar{k}} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{p_N(\sigma), \psi_{(\pm)}^m(\sigma')\} &= \frac{1}{2} \psi_{(\pm)}^k \partial_N g_{k\bar{s}} g^{\bar{s}m} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{p_N(\sigma), \psi_{(\pm)}^{\bar{m}}(\sigma')\} &= \frac{1}{2} \psi_{(\pm)}^{\bar{k}} \partial_N g_{s\bar{k}} g^{\bar{m}s} \delta(\sigma - \sigma'),\end{aligned}\quad (6)$$

где введен коллективный индекс $N = (n, \bar{n})$ и принято обозначение $A_{[n} B_{m]} = (A_n B_m - A_m B_n)/2$. Отметим, что поскольку $N = 4$ суперконформная алгебра в плоском пространстве реализована в терминах комплексных полей, то при переходе к искривленному пространству представляется естественным сохранить указанную комплексную структуру. Таким образом, фоновая метрика выбрана эрмитовой, в частности $g_{nm} = g_{\bar{n}\bar{m}} = 0$ и $(g_{n\bar{m}})^* = g_{m\bar{n}}$.

4. $N = 4$ СУПЕРКОНФОРМНАЯ АЛГЕБРА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Установив, каким образом скобки фундаментальных полей модифицируются в искривленном пространстве, перейдем к обсуждению структуры суперконформных генераторов.

При включении взаимодействия с произвольным искривленным фоном производные фермионных полей по переменным (τ, σ) , параметризующим мировой лист, не являются ковариантными объектами. Как хорошо известно, данная трудность может быть разрешена посредством введения в рассмотрение символов Кристоффеля Γ^n_{kp} , $\Gamma^{\bar{n}}_{\bar{k}\bar{p}}$ (наши обозначения приведены в приложении Б) и ковариантных производных

$$\nabla_\alpha \psi_{(\pm)}^n = \partial_\alpha \psi_{(\pm)}^n + \partial_\alpha z^p \Gamma^n_{ps} \psi_{(\pm)}^s, \quad \nabla_\alpha \psi_{(\pm)}^{\bar{n}} = \partial_\alpha \psi_{(\pm)}^{\bar{n}} + \partial_\alpha z^{\bar{p}} \Gamma^{\bar{n}}_{\bar{p}\bar{s}} \psi_{(\pm)}^{\bar{s}}. \quad (7)$$

Это, в частности, отвечает минимальному взаимодействию и приводит к следующему переопределению бозонного импульса в явных выражениях для суперконформных генераторов:

$$\begin{aligned}p_n &\rightarrow \Pi_n = p_n + \frac{i}{2} \psi_{(+)}^{\bar{m}} \psi_{(+)}^s \Gamma^k_{ns} g_{k\bar{m}} + \frac{i}{2} \psi_{(-)}^{\bar{m}} \psi_{(-)}^s \Gamma^k_{ns} g_{k\bar{m}}, \\ p_{\bar{n}} &\rightarrow \Pi_{\bar{n}} = p_{\bar{n}} - \frac{i}{2} \psi_{(+)}^{\bar{m}} \psi_{(+)}^s \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{n}\bar{m}} g_{s\bar{k}} - \frac{i}{2} \psi_{(-)}^{\bar{m}} \psi_{(-)}^s \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{n}\bar{m}} g_{s\bar{k}}.\end{aligned}\quad (8)$$

Полезно отметить, что данная модификация частично упрощает формулы (6). Ненулевыми оказываются только три соотношения:

$$\begin{aligned}\{\Pi_n(\sigma), \Pi_{\bar{n}}(\sigma')\} &= \frac{i}{2}(\psi_{(+)}^{\bar{m}} \psi_{(+)}^p + \psi_{(-)}^{\bar{m}} \psi_{(-)}^p) [R^{\bar{k}}_{\bar{m}n\bar{n}} g_{p\bar{k}} + R^k_{p\bar{n}n} g_{k\bar{m}}] \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{\Pi_n(\sigma), \psi_{(\pm)}^m(\sigma')\} &= \psi_{(\pm)}^k \partial_n g_{k\bar{s}} g^{\bar{s}m} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \{\Pi_{\bar{n}}(\sigma), \psi_{(\pm)}^{\bar{m}}(\sigma')\} &= \psi_{(\pm)}^{\bar{k}} \partial_{\bar{n}} g_{s\bar{k}} g^{\bar{m}s} \delta(\sigma - \sigma'),\end{aligned}\quad (9)$$

где $R^{\bar{k}}_{\bar{m}n\bar{n}}$ – тензор кривизны (см. приложение Б).

Сначала обсудим представление $N = 2$ подалгебры. С учетом сделанных выше замечаний структура трех из четырех генераторов $T, G, \bar{G}, J$ фиксируется однозначно:

$$\begin{aligned} G &= (\Pi_{\bar{n}} + \partial_1 z^n g_{n\bar{n}}) \psi_{(+)}^{\bar{n}} = 0, & \bar{G} &= (\Pi_n + \partial_1 z^{\bar{n}} g_{n\bar{n}}) \psi_{(+)}^n = 0, \\ J &= \psi_{(+)}^{\bar{n}} \psi_{(+)}^n g_{n\bar{n}} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

а явный вид конформного генератора T представляется разумным установить при проверке структурных соотношений $N = 2$ алгебры (см. скобку $\{G(\sigma), \bar{G}(\sigma')\}$, приведенную в приложении А). Прямые вычисления показывают, что на фоне произвольной эрмитовой метрики $g_{n\bar{n}}$ генераторы (10) не удовлетворяют структурным соотношениям $N = 2$ суперконформной алгебры, в частности

$$\{G(\sigma), G(\sigma')\} = 2\psi_{(+)}^{\bar{n}} \psi_{(+)}^{\bar{k}} \partial_{\bar{n}} g_{s\bar{k}} g^{\bar{m}s} \Pi_{\bar{m}} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (11)$$

Легко проверить, что правая часть в данном соотношении не может быть сделана равной нулю посредством включения дополнительных кубических вкладов в фермионный генератор G , и, таким образом, приходим к заключению, что в рамках классического рассмотрения $N = 2$ суперконформная алгебра имеет место только на фоне метрики кэлерова многообразия

$$\partial_{\bar{n}} g_{s\bar{k}} - \partial_{\bar{k}} g_{s\bar{n}} = 0. \quad (12)$$

Действительно, явными вычислениями убеждаемся, что с учетом ограничения (12) (см. также приложение Б) скобки $N = 2$ генераторов в точности совпадают со структурными соотношениями, приведенными в приложении А, при этом генератор конформных преобразований реализован следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\Pi_{\bar{n}} + \partial_1 z^p g_{p\bar{n}})(\Pi_n + \partial_1 z^{\bar{p}} g_{n\bar{p}}) g^{\bar{n}n} - \frac{i}{2}(\psi_{(+)}^n \partial_1 \psi_{(+)}^{\bar{n}} + \psi_{(+)}^{\bar{n}} \partial_1 \psi_{(+)}^n) g_{n\bar{n}} - \\ &- \frac{i}{2} \psi_{(+)}^{\bar{n}} \psi_{(+)}^n \partial_1 z^p \Gamma^k_{np} g_{k\bar{n}} + \frac{i}{2} \psi_{(+)}^{\bar{n}} \psi_{(+)}^n \partial_1 z^{\bar{p}} \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{n}\bar{p}} g_{n\bar{k}} - \\ &- \frac{1}{2} R_{p\bar{m}n\bar{n}} \psi_{(+)}^{\bar{n}} \psi_{(+)}^n \psi_{(-)}^{\bar{m}} \psi_{(-)}^p. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что данный результат находится в полном согласии с известным фактом о том, что при переходе к искривленному фону лагранжиан классической $N = 2$ струны может быть непротиворечивым образом сформулирован только на фоне кэлеровой метрики [8], [15].

Перейдем к обсуждению оставшихся генераторов в $N = 4$ суперконформной алгебре. Поскольку метрика $g_{n\bar{n}}$ несет индексы, преобразующиеся по сопряженным представлениям группы общекординатных преобразований, наивная замена $\epsilon_{nm} \rightarrow \epsilon_{nm} / \sqrt{-\det g}$ не приводит к тензорному выражению. Таким образом, мы приходим к необходимости ввести в рассмотрение дополнительную фоновую 2-форму $B_{nm}(z, \bar{z}) = (B_{\bar{n}\bar{m}}(z, \bar{z}))^*$,

для которой ϵ_{nm} является плоским пределом. С учетом сделанного замечания представление для оставшихся генераторов легко установить:

$$\begin{aligned} H &= (\Pi_{\bar{k}} g^{\bar{k}n} + \partial_1 z^n) \psi_{(+)}^m B_{nm}, & \bar{H} &= (\Pi_k g^{\bar{n}k} + \partial_1 z^{\bar{n}}) \psi_{(+)}^{\bar{m}} B_{\bar{n}\bar{m}}, \\ J^{(1)} &= \psi_{(+)}^n \psi_{(+)}^m B_{nm}, & J^{(2)} &= \psi_{(+)}^{\bar{n}} \psi_{(+)}^{\bar{m}} B_{\bar{n}\bar{m}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Принимая во внимание анализ $N = 2$ подалгебры, проделанный выше, представляется естественным ожидать, что структурные соотношения $N = 4$ суперконформной алгебры накладывают существенные ограничения на фоновую 2-форму. Действительно, явные вычисления показывают, что последняя должна быть голоморфной и ковариантно-постоянной:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{k}} B_{nm} &= 0, & \nabla_k B_{nm} &= 0, \\ \partial_k B_{\bar{n}\bar{m}} &= 0, & \nabla_{\bar{k}} B_{\bar{n}\bar{m}} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Кроме того, при проверке структурных соотношений необходимо использовать условия интегрируемости уравнений (15)

$$R^k{}_{n\bar{m}s} B_{kp} - R^k{}_{n\bar{m}p} B_{ks} = 0, \quad R^{\bar{k}}{}_{\bar{n}m\bar{s}} B_{\bar{k}\bar{p}} - R^{\bar{k}}{}_{\bar{n}m\bar{p}} B_{\bar{k}\bar{s}} = 0 \quad (16)$$

и алгебраическое соотношение

$$B_{\bar{n}\bar{m}} B_{sp} g^{\bar{m}s} = g_{p\bar{n}}. \quad (17)$$

Последнее, однако, не является дополнительным ограничением, поскольку для неприводимого многообразия ([17], с. 326) правая часть уравнения (17) автоматически равна метрике с точностью до вещественного постоянного коэффициента (напомним, что g и B являются ковариантно-постоянными тензорами). С точностью до знака последний может быть удален переопределением поля B .

Отметим, что знак плюс, выбранный в правой части выражения (17), правильным образом согласован с плоским пределом. Нетрудно убедиться, что выбор знака минус отвечает метрике евклидовой сигнатуры.

Как хорошо известно (см., например, с. 207 в монографии [18]), возможность ввести на многообразии ковариантно-постоянное тензорное поле в дополнение к метрическому тензору накладывает существенные ограничения на геометрию пространства. В частности, соотношения (15) означают, что группа голономий пространства, которая для рассматриваемой задачи в общей постановке является подгруппой группы $U(1, 1)$, редуцируется до подгруппы группы $SU(1, 1)$. Более наглядный способ сформулировать данный результат состоит в демонстрации того факта, что на рассматриваемом многообразии, помимо естественной комплексной структуры

$$J = \begin{pmatrix} i\delta_m{}^n & 0 \\ 0 & -i\delta_{\bar{m}}{}^{\bar{n}} \end{pmatrix}, \quad J^2 = -1, \quad (18)$$

можно реализовать две дополнительные ковариантно-постоянные вещественные структуры⁴⁾

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 0 & B_{nm}g^{\bar{k}m} \\ B_{\bar{n}\bar{m}}g^{\bar{m}k} & 0 \end{pmatrix}, \\ T &= \begin{pmatrix} 0 & iB_{nm}g^{\bar{k}m} \\ -iB_{\bar{n}\bar{m}}g^{\bar{m}k} & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = 1, \quad T^2 = 1, \end{aligned} \quad (19)$$

образующие вместе с J псевдокватернионную алгебру (см., например, [19], [20])

$$ST = -TS = -J, \quad TJ = -JT = S, \quad JS = -SJ = T. \quad (20)$$

Таким образом, приходим к заключению, что представление $N = 4$ суперконформной алгебры указанного типа может быть реализовано только на псевдогиперкэлеровом многообразии. Полезно напомнить, что псевдогиперкэлерово пространство автоматически является риччи-плоским. Действительно, сворачивая первое из условий интегрируемости (16) с тензором $g^{\bar{l}p}B_{\bar{l}\bar{r}}g^{\bar{r}s}$, приходим к желаемому соотношению

$$R^k{}_{k\bar{n}m} = 0. \quad (21)$$

Поступая аналогичным образом, можно убедиться, что выбор евклидовой сигнатуры для исходной метрики и согласованный с этим выбором знак минус в правой части уравнения (17) приводят к стандартной кватернионной алгебре и соответственно гиперкэлеровой геометрии.

Как уже упоминалось ранее, в контексте теории замкнутых струн, помимо представления $N = 4$ суперконформной алгебры в терминах правых мод, возникает представление, реализованное на левых модах. В плоском пространстве скобки Пуассона генераторов, реализованных на правых и левых модах, обращаются в нуль. При переходе к искривленному фону правые и левые моды нетривиальным образом перемешиваются вследствие эффектов взаимодействия. Таким образом, необходимо проверить, имеет ли место коммутация левых и правых генераторов в искривленном пространстве. Явные вычисления показывают, что левый и правый секторы действительно коммутируют без наложения дополнительных ограничений на фоновые поля. При этом достаточно убедиться в коммутации представлений генераторов $G, \bar{G}, J, J^{(1,2)}$, реализованных на правых и левых модах, а равенство нулю остальных скобок следует из структурных соотношений $N = 4$ алгебры и тождества Якоби.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведем итоги. В данной работе в предположении минимального взаимодействия было построено представление $N = 4$ малой суперконформной алгебры в искривленном пространстве. Мы установили коммутационные соотношения фундаментальных полей

⁴⁾Мы используем терминологию, принятую в работах [19], [20].

на искривленном фоне, совместные с тождеством Якоби. Далее была предложена реализация генераторов алгебры. Специфической особенностью последней является появление произвольной фоновой 2-формы в явных выражениях для генераторов в дополнение к фоновой метрике.

Основной результат данной работы состоит в том, что было показано, что в предположении минимального взаимодействия структурные соотношения $N = 4$ суперконформной алгебры выполнены, если фоновая метрика является кэлеровой, а фоновая 2-форма голоморфна и ковариантно-постоянна, иными словами, если объемлющее многообразие является (псевдо)гиперкэлеровым. Таким образом, в явном виде прослежена интересная взаимосвязь между суперконформными алгебрами в искривленном пространстве и нетривиальными геометриями.

Отметим, что сам по себе выбор минимального взаимодействия неявным образом ограничивает структуру фонового многообразия. В более общей постановке можно рассмотреть вопрос о возможности добавления к минимальной реализации, построенной в данной работе, вкладов высших порядков по тензору кривизны без размыкания $N = 4$ суперконформной алгебры. Данная задача выходит за рамки нашего рассмотрения.

В настоящей работе мы ограничились исследованием чисто классического случая. Было бы интересно обобщить данный анализ в квантовую область. Как хорошо известно, в рамках квантового рассмотрения в коммутационных соотношениях (плоской) суперконформной алгебры появляются аномалии. Анализ деформации аномальных членов в $N = 4$ квантовой суперконформной алгебре при переходе к искривленному пространству представляет собой возможное интересное продолжение данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Приведем структурные соотношения $N = 4$ суперконформной алгебры в плоском пространстве:

$$\begin{aligned}
\{T(\sigma), T(\sigma')\} &= 2T(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma T(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{T(\sigma), G(\sigma')\} &= \frac{3}{2}G(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2}\partial_\sigma G(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{T(\sigma), \overline{G}(\sigma')\} &= \frac{3}{2}\overline{G}(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2}\partial_\sigma \overline{G}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{T(\sigma), J(\sigma')\} &= J(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{T(\sigma), H(\sigma')\} &= \frac{3}{2}H(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2}\partial_\sigma H(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{T(\sigma), \overline{H}(\sigma')\} &= \frac{3}{2}\overline{H}(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \frac{1}{2}\partial_\sigma \overline{H}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{T(\sigma), J^{(1,2)}(\sigma')\} &= J^{(1,2)}(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{G(\sigma), \overline{G}(\sigma')\} &= 2iT(\sigma)\delta(\sigma - \sigma') + 2J(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma J(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{\overline{G}(\sigma), J(\sigma')\} &= i\overline{G}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{\overline{G}(\sigma), H(\sigma')\} &= 2J^{(1)}(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma J^{(1)}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{\overline{G}(\sigma), J^{(2)}(\sigma')\} &= 2i\overline{H}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{G(\sigma), J(\sigma')\} &= -iG(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{G(\sigma), \overline{H}(\sigma')\} &= 2J^{(2)}(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma J^{(2)}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{G(\sigma), J^{(1)}(\sigma')\} &= 2iH(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{J(\sigma), \overline{H}(\sigma')\} &= i\overline{H}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{J(\sigma), H(\sigma')\} &= -iH(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{J(\sigma), J^{(1)}(\sigma')\} &= -2iJ^{(1)}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{J(\sigma), J^{(2)}(\sigma')\} &= 2iJ^{(2)}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{\overline{H}(\sigma), J^{(1)}(\sigma')\} &= 2i\overline{G}(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{H(\sigma), \overline{H}(\sigma')\} &= -2iT(\sigma)\delta(\sigma - \sigma') + 2J(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma J(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{H(\sigma), J^{(2)}(\sigma')\} &= 2iG(\sigma)\delta(\sigma - \sigma'), \\
\{J^{(1)}(\sigma), J^{(2)}(\sigma')\} &= -4iJ(\sigma)\delta(\sigma - \sigma').
\end{aligned}$$

Скобки Пуассона, не выписанные явно, обращаются в нуль.

При вычислении алгебры оказываются полезными следующие свойства δ -функции:

$$\begin{aligned}
\partial_{\sigma'}\delta(\sigma - \sigma') &= -\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma'), \\
F(\sigma')\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') &= F(\sigma)\partial_\sigma\delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma F(\sigma)\delta(\sigma - \sigma').
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Для полноты изложения приведем свойства тензора кривизны на кэлеровом многообразии.

На комплексном многообразии с эрмитовой метрикой $g_{n\overline{m}}$ (обратную матрицу обозначим через $g^{\overline{m}n}$) рассмотрим ковариантные производные, согласованные с комплексной структурой:

$$\begin{aligned}
\nabla_n v_m &= \partial_n v_m - \Gamma^k_{nm} v_k, & \nabla_{\bar{n}} v_m &= \partial_{\bar{n}} v_m, \\
\nabla_{\bar{n}} v_{\overline{m}} &= \partial_{\bar{n}} v_{\overline{m}} - \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{n}\overline{m}} v_{\bar{k}}, & \nabla_n v_{\overline{m}} &= \partial_n v_{\overline{m}}.
\end{aligned}$$

Предполагая, что метрика является ковариантно-постоянной, т.е.

$$\nabla_n g_{m\bar{k}} = \partial_n g_{m\bar{k}} - \Gamma^p_{nm} g_{p\bar{k}} = 0, \quad \nabla_{\bar{n}} g_{m\bar{k}} = \partial_{\bar{n}} g_{m\bar{k}} - \Gamma^{\bar{p}}_{\bar{n}\bar{k}} g_{m\bar{p}} = 0,$$

без труда находим явный вид компонент связности Леви-Чивита

$$\Gamma^k_{nm} = g^{\bar{p}k} \partial_n g_{m\bar{p}}, \quad \Gamma^{\bar{p}}_{\bar{n}\bar{k}} = g^{\bar{p}m} \partial_{\bar{n}} g_{m\bar{k}}.$$

Простейший способ определить тензор кривизны и тензор кручения на многообразии состоит в рассмотрении коммутатора двух ковариантных производных

$$[\nabla_A, \nabla_B]v^p = R^p_{kAB}v^k - T^D_{AB}\nabla_D v^p,$$

где $A = (a, \bar{a})$ – коллективное обозначение для a и $\bar{a}$. Сумма по D в последнем слагаемом включает d и $\bar{d}$. Несложный анализ данного соотношения показывает, что единственными нетривиальными компонентами тензора кручения являются следующие:

$$\begin{aligned} T_{nm}^k &= \Gamma_{nm}^k - \Gamma_{mn}^k = g^{\bar{k}k} (\partial_n g_{m\bar{k}} - \partial_m g_{n\bar{k}}), \\ T_{\bar{n}\bar{m}}^{\bar{k}} &= \Gamma_{\bar{n}\bar{m}}^{\bar{k}} - \Gamma_{\bar{m}\bar{n}}^{\bar{k}} = g^{\bar{k}k} (\partial_{\bar{n}} g_{k\bar{m}} - \partial_{\bar{m}} g_{k\bar{n}}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом для тензора кривизны находим

$$R_{n\bar{p}m}^k = -R_{nm\bar{p}}^k = \partial_{\bar{p}} \Gamma_{mn}^k, \quad R_{\bar{n}p\bar{m}}^{\bar{k}} = -R_{\bar{n}\bar{m}p}^{\bar{k}} = \partial_p \Gamma_{\bar{m}\bar{n}}^{\bar{k}}.$$

Вводя стандартное обозначение

$$R_{\bar{k}n\bar{p}m} = g_{a\bar{k}} R^a_{n\bar{p}m}$$

и используя явный вид связности, имеем

$$R_{\bar{n}m\bar{p}k} = -R_{m\bar{n}\bar{p}k}.$$

Допуская далее, что рассматриваемое многообразие является кэлеровым, т.е.

$$T_{nm}^k = 0 \longrightarrow \Gamma_{nm}^k = \Gamma_{mn}^k \longrightarrow \partial_n g_{m\bar{k}} - \partial_m g_{n\bar{k}} = 0,$$

находим дополнительную симметрию для тензора Римана

$$R_{nm\bar{p}}^k = R_{mn\bar{p}}^k.$$

Объединяя последнее соотношение и свойства, справедливые для произвольного эрмита многообразия, приходим к цепочке равенств

$$R_{\bar{n}m\bar{p}k} = R_{\bar{p}m\bar{n}k} = R_{\bar{n}k\bar{p}m} = R_{\bar{p}k\bar{n}m},$$

которые известны как циклическое свойство тензора Римана на кэлеровом многообразии.

Кроме того, для кэлерова пространства нетрудно убедиться в выполнении тождеств Бианки

$$\nabla_k R_{\bar{n}m\bar{p}l} - \nabla_m R_{\bar{n}k\bar{p}l} = 0, \quad \nabla_{\bar{k}} R_{\bar{n}m\bar{p}l} - \nabla_{\bar{n}} R_{\bar{k}m\bar{p}l} = 0,$$

которые используются при проверке структурных соотношений $N = 4$ суперконформной алгебры в искривленном пространстве.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-02-16193) и Президентского гранта поддержки ведущих научных школ № НШ 1252.2003.2.

Список литературы

- [1] *J. Polchinski*. String Theory. V. 1, 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [2] *J. Cardy*. Conformal invariance and statistical mechanics. In: Champs, Cordes et Phenomenes Critiques. 49th Session of the Summer School in Theoretical Physics (Les Houches, June 28–August 5, 1988). Eds. E. Brezin, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 169.
- [3] *M. Grisaru, W. Siegel, M. Rocek*. Nucl. Phys. B. 1979. V. 159. P. 429.
- [4] *N. Seiberg*. Phys. Lett. B. 1993. V. 318. P. 469.
- [5] *J. Maldacena*. Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 231.
- [6] *P. Claus, M. Derix, R. Kallosh, J. Kumar, P. Townsend, A. Van Proeyen*. Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 4553.
- [7] *P. Ramond, J. Schwarz*. Phys. Lett. B. 1976. V. 64. P. 75.
- [8] *E. Bergshoeff, E. Sezgin, H. Nishino*. Phys. Lett. B. 1986. V. 166. P. 141.
- [9] *H. Ooguri, C. Vafa*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 361. P. 469.
- [10] *W. Siegel*. Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 1493.
- [11] *N. Berkovits, C. Vafa*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 433. P. 123.
- [12] *S. Bellucci, A. Galajinsky*. Nucl. Phys. B. 2001. V. 606. P. 119.
- [13] *S. Bellucci, A. Galajinsky*. Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 044013.
- [14] *S. Bellucci, A. Galajinsky*. Nucl. Phys. B. 2002. V. 630. P. 151.
- [15] *A. Deriglazov, S. Bellucci, A. Galajinsky*. Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 104026.
- [16] *L. Alvarez-Gaumé, P. Ginsparg*. Commun. Math. Phys. 1985. V. 102. P. 311.
- [17] *K. Yano*. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces. Oxford: Pergamon, 1965.
- [18] *A. Lichnerowicz*. Global Theory of Connections and Holonomy Groups. Amsterdam: Noordhoff, 1976.
- [19] *J. Barrett, G. Gibbons, M. Perry, C. Pope, P. Ruback*. Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 1457.
- [20] *M. Abou-Zeid, C. Hull*. Nucl. Phys. B. 1999. V. 561. P. 293.

Поступила в редакцию 10.XI.2002 г.,
после доработки 11.II.2003 г.