Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Мардоян, А. П. Нерсисян, М. Г. Петросян, Эффект Штарка в системе заряд-дион, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 1, 78–85

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf80>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:28:39

© 2004 г. Л. Г. Мардоян^{*,†}, А. П. Нерсисян^{*,‡}, М. Г. Петросян^{*,‡}

ЭФФЕКТ ШТАРКА В СИСТЕМЕ ЗАРЯД-ДИОН

Рассмотрен линейный эффект Штарка в задаче МИК-Кеплер, описывающей движение заряда в поле дираковского диона. Показано, что постоянное однородное электрическое поле полностью снимает вырождение энергетических уровней по азимутальному квантовому числу.

Ключевые слова: эффект Штарка, дираковский дион, МИК-Кеплер.

В феврале 2003 года не стало профессора Валерия Тер-Антоняна: интеллигента, блестящего педагога и научного работника, тонкого знатока квантовой механики. В последние годы жизни он увлекся изучением задачи Кулона в присутствии топологически нетривиальных объектов. Двоим из нас посчастливилось сотрудничать с ним в этой области. Этой скромной работой мы хотели бы отдать дань его памяти

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемая система МИК-Кеплер была построена Цванцигером [1] и переоткрыта МакИнтошем и Кизнеросом [2]. Эта система описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu}(i\nabla + s\mathbf{A})^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}, \quad (1.1)$$

где $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{r}/r^3$. Ее отличительной особенностью является наличие скрытой симметрии задачи Кулона. Именно, гамильтониан (1.1) имеет интегралы движения

$$\mathbf{I} = \frac{\hbar}{2\mu}[(i\nabla + s\mathbf{A}) \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times (i\nabla + s\mathbf{A})] + \gamma \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{J} = -\hbar(i\nabla + s\mathbf{A}) \times \mathbf{r} + \frac{\hbar s \mathbf{r}}{r}. \quad (1.2)$$

^{*}Международный центр перспективных исследований, Ереванский государственный университет, Ереван, Армения. E-mail: mardoyan@icas.yu.am

[†]Арцахский государственный университет, Степанакерт, Армения

[‡]Ереванский физический институт, Ереван, Армения

Оператор $\mathbf{J}$ определяет вращательный момент системы, а оператор $\mathbf{I}$ является аналогом вектора Рунге–Ленца.

Подобно задаче Кулона, интегралы движения вместе с гамильтонианом образуют квадратичную алгебру. При фиксированных отрицательных значениях энергии интегралы движения образуют алгебру $so(4)$, а при положительных значениях энергии – $so(3,1)$. В силу скрытой симметрии задача МИК–Кеплер факторизуется не только в сферических, но и в параболических координатах. Таким образом, система МИК–Кеплер является естественным обобщением задачи Кулона в присутствии монополя Дирака. В обоих случаях монопольное число s удовлетворяет дираковскому правилу квантования зарядов $s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots$.

Задачу МИК–Кеплер можно построить редукцией четырехмерного изотропного осциллятора с помощью так называемого преобразования Кустанхеймо–Штифеля на классическом и квантовом уровнях [3]. Аналогично редукцией двумерного и восьмимерного изотропных осцилляторов можно получить двумерный [4] и пятимерный [5] аналог системы МИК–Кеплер. В двумерном случае роль магнитного монополя играет бесконечно тонкий соленоид, порождающий в системе спин $1/2$, а в пятимерном – $SU(2)$ -монополю Янга [6], наделяющий систему $SU(2)$ изоспином. Все указанные системы имеют кулоновские симметрии соответствующей размерности и решены в сферических и параболических координатах как в дискретной, так и в непрерывной части спектра [7]. Имеются обобщения системы МИК–Кеплер на трехмерную сферу [8] и гиперболоид [9].

При целочисленных значениях s задача МИК–Кеплер описывает относительное движение двух дираковских дионов (заряженных магнитных монополей). Для этого надо положить

$$s = \frac{eG - Qg}{\hbar c}, \quad \gamma = eQ + gG, \quad (1.3)$$

где (e, g) и (Q, G) есть электрические и магнитные заряды соответственно первого и второго дионов. Параметр μ играет роль приведенной массы, а вектор $\mathbf{r}$ определяет положение второго диона относительно первого [1]. При полуцелых s предполагается также наличие магнитного поля соленоида, наделяющего систему спином $1/2$ (ср. с [4]). Отметим, что система МИК–Кеплер описывает также относительное движение как дираковских дионов, так и двух удаленных монополей/дионов Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ)¹⁾.

¹⁾ Система, описывающая относительное движение удаленных БПЗ-дионов [10], задается гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{\text{BPS}} = \frac{1}{4\mu} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-3/2} (i\nabla + s\mathbf{A}) \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{1/2} (i\nabla + s\mathbf{A}) + \frac{eg}{r},$$

где e обозначают относительный электрический заряд БПЗ-монополей. Легко видеть, что уравнение Шредингера этого гамильтониана немедленно сводится к уравнению Шредингера задачи МИК–Кеплер. Наличие в упомянутой системе кулоновской симметрии является хорошо известным фактом; ее эквивалентность задаче МИК–Кеплер была замечена, видимо, лишь в работе [11]

Волновая функция основного состояния задачи МИК-Кеплер имеет вид

$$\psi_m(\mathbf{r}; |s|) = \text{const } r^{|s|} e^{-r/a(|s|+1)} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{|s+m|} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{|s-m|} e^{im\varphi}, \quad (1.4)$$

где $m = -|s|, -|s| + 1, \dots, |s| - 1, |s|$. Как видим, оно вырождено по квантовому числу m и не является сферически-симметричным. Система даже в основном состоянии имеет отличный от нуля дипольный момент, и в присутствии внешнего электрического поля возможен линейный эффект Штарка. Радиальная функция основного уровня имеет при $r = 0$ узел. Поэтому имеет смысл провести более аккуратное исследование поведения связанной системы МИК-Кеплер во внешнем однородном электрическом поле с целью исследования эффекта Штарка и нахождения дипольного момента системы. Изучение этих вопросов и является целью представляемой работы.

Для простоты мы рассмотрим частный случай движения заряда в поле дираковского диона – систему, наиболее близкую атому водорода. Иными словами, мы полагаем

$$G = 0, \quad (1.5)$$

так что добавка к гамильтониану МИК-Кеплера (1.1), отвечающая за взаимодействие системы заряд–дион с внешним постоянным электрическим полем, имеет тот же вид, что и в случае атома водорода:

$$\mathcal{H}_S = e\epsilon\mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы приводим волновые функции связанной системы МИК-Кеплер в сферических и параболических координатах. В разделе 3 исследуется поведение связанной системы заряд–дион во внешнем постоянном однородном электрическом поле. Подтверждается предположение о наличии в системе линейного эффекта Штарка, вычисляется ее дипольный момент. Показывается, что внешнее электрическое поле полностью снимает вырождение по азимутальному квантовому числу. В заключении обсуждаются полученные результаты и их возможные обобщения.

2. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТР

Рассмотрим спектральную задачу, описывающую систему МИК-Кеплер с энергией $E^{(0)}$, вращательным моментом j и x_3 -компонентой вращательного момента m :

$$\mathcal{H}_0 \psi = E^{(0)} \psi, \quad \mathbf{J}^2 \psi = \hbar^2 j(j+1) \psi, \quad J_3 \psi = \hbar m \psi, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{H}_0$ и $\mathbf{J}$ определяются выражениями (1.1) и (1.2) с векторным потенциалом монополя Дирака с осью сингулярности, направленной вдоль положительной полуоси:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{r(r-x_3)}(x_2, -x_1, 0).$$

Решение этой системы имеет вид

$$\psi_{njm}(\mathbf{r}; s) = \left(\frac{2j+1}{8\pi^2} \right)^{1/2} R_{nj} \left(\frac{r}{a} \right) d_{ms}^j(\theta) e^{im\varphi}, \quad (2.2)$$

где d_{ms}^j есть d -функция Вигнера [12], а $R_{nj}(r/a)$ определяется выражением

$$R_{nj}(r) = \frac{2^{j+1}}{n^{j+2}(2j+1)!} \sqrt{\frac{(n+j)!}{(n-j-1)!}} r^j e^{-r/n} F \left(j-n+1; 2j+2; \frac{2r}{n} \right). \quad (2.3)$$

Здесь $a = \hbar^2 / \mu e^2$ – боровский радиус, а $F(a; c; x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Спектр системы определяется условиями

$$E_n^{(0)} = -\frac{\mu\gamma^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = |s| + 1, |s| + 2, \dots, \quad (2.4)$$

$$j = |s|, |s| + 1, \dots, n-1; \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

Квантовые числа j, m характеризуют полный момент системы и его проекцию на ось x_3 . При целом s система имеет целый спин, а при полуцелом – полуцелый. При $s = 0$ она переходит в водородоподобную.

При тождественном преобразовании $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ волновая функция системы однозначна при целом s и меняет знак при полуцелом s . Во втором случае неоднозначность волновой функции можно истолковать как присутствие магнитного поля бесконечно тонкого соленоида (направленного вдоль оси x_3), порождающего в системе спин $1/2$ (ср. с [4]). В основном состоянии ($n = 1$) имеем $j = |s|$, так что волновая функция принимает вид (1.4).

Теперь рассмотрим систему МИК-Кеплер в параболическом базисе. В параболических координатах $\xi, \eta \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, которые определяются формулами

$$x_1 + ix_2 = \sqrt{\xi\eta} e^{i\varphi}, \quad x_3 = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad (2.5)$$

дифференциальные элементы длины и объема имеют вид

$$dl^2 = \frac{\xi + \eta}{4} \left(\frac{d\xi^2}{\xi} + \frac{d\eta^2}{\eta} \right) + \xi\eta d\varphi^2, \quad dV = \frac{1}{4}(\xi + \eta) d\xi d\eta d\varphi, \quad (2.6)$$

а оператор Лапласа выглядит следующим образом:

$$\Delta = \frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.7)$$

После подстановки

$$\psi(\xi, \eta, \varphi) = \Phi_1(\xi) \Phi_2(\eta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.8)$$

переменные в уравнении Шредингера разделяются, и мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Phi_1}{d\xi} \right) + \left[\frac{\mu E^{(0)}}{2\hbar^2} \xi - \frac{(m-s)^2}{4\xi} + \frac{\mu}{2\hbar} \beta + \frac{1}{2a} \right] \Phi_1 = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Phi_2}{d\eta} \right) + \left[\frac{\mu E^{(0)}}{2\hbar^2} \eta - \frac{(m+s)^2}{4\eta} - \frac{\mu}{2\hbar} \beta + \frac{1}{2a} \right] \Phi_2 = 0, \quad (2.10)$$

где β – постоянная разделения, являющаяся собственным значением x_3 -компоненты вектора Рунге–Ленца **I**.

При $s = 0$ эти уравнения совпадают с уравнениями для атома водорода в параболических координатах [13]. Отсюда имеем

$$\psi_{n_1 n_2 m s}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{1}{n^2 a^{3/2}} \Phi_{n_1, m-s}(\xi) \Phi_{n_2, m+s}(\eta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{\pi}}, \quad (2.11)$$

где

$$\Phi_{pq}(x) = \frac{1}{|q|!} \sqrt{\frac{(p+|q|)!}{p!}} e^{-x/(2an)} \left(\frac{x}{an} \right)^{|q|/2} F\left(-p; |q|+1; \frac{x}{an}\right).$$

Здесь n_1 и n_2 – неотрицательные целые числа:

$$n_1 = -\frac{|m-s|+1}{2} + \frac{\mu}{2\kappa\hbar} \beta + \frac{1}{2a\kappa}, \quad n_2 = -\frac{|m+s|+1}{2} - \frac{\mu}{2\kappa\hbar} \beta + \frac{1}{2a\kappa},$$

где $\kappa = \sqrt{-2\mu E}/\hbar$. Из последних соотношений с учетом (2.4) получим, что параболические квантовые числа n_1 и n_2 связаны с главным квантовым числом n следующим образом:

$$n = n_1 + n_2 + \frac{|m-s| + |m+s|}{2} + 1. \quad (2.12)$$

Таким образом, мы решили спектральную задачу

$$\mathcal{H}_0 \psi = E^{(0)} \psi, \quad I_3 \psi = \hbar^2 \beta \psi, \quad J_3 \psi = \hbar m \psi, \quad (2.13)$$

где $\mathcal{H}_0$, I_3 , J_3 определяются выражениями (1.1) и (1.2).

3. ЭФФЕКТ ШТАРКА

Гамильтониан системы МИК-Кеплер во внешнем постоянном однородном поле имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2\mu} (i\nabla + s\mathbf{A})^2 + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r} + |e|\varepsilon z. \quad (3.1)$$

Мы считаем, что электрическое поле ε направлено в положительном, а действующая на электрон сила – в отрицательном направлении оси x_3 . Поскольку гамильтониан (3.1) обладает аксиальной симметрией, уравнение Шредингера системы заряд–дион во внешнем постоянном однородном электрическом поле удобно рассмотреть в параболических координатах. Таким образом, для вычисления матричных элементов переходов между

взаимно вырожденными состояниями удобно выбрать в качестве невозмущенных волновых функций параболические волновые функции (2.11) системы МИК-Кеплер.

Нас интересуют матричные элементы переходов $n_1 n_2 m \rightarrow n'_1 n'_2 m'$ при фиксированном значении главного квантового числа n . Так как оператор возмущения есть $\hat{V} = |e|\varepsilon z = |e|\varepsilon(\xi - \eta)/2$, то согласно теории возмущений поправка первого приближения к собственному значению энергии E_n (2.4) есть

$$E_n^{(1)} = \int \psi_{n_1 n_2 m}^*(\xi, \eta, \varphi) \hat{V} \psi_{n_1 n_2 m}(\xi, \eta, \varphi) d\varphi. \quad (3.2)$$

С учетом (2.11) имеем

$$E_n^{(1)} = \frac{|e|\varepsilon}{4a^3 n^4} (\mathcal{I}_{n_1, m-s} \mathcal{I}_{n_2, m+s} - \mathcal{I}_{n_1, m-s} \mathcal{I}_{n_2, m+s}), \quad (3.3)$$

где

$$I_{pq} = \int_0^\infty [\Phi_{pq}(x)]^2 dx, \quad \mathcal{I}_{pq} = \int_0^\infty x^2 [\Phi_{pq}(x)]^2 dx. \quad (3.4)$$

Далее мы воспользуемся формулами (см., например, [13])

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} z^\nu F(\alpha; \gamma; kz) dz = \Gamma(\nu + 1) \lambda^{-\nu-1} F\left(\alpha, \nu + 1; \gamma; \frac{k}{\lambda}\right) \quad (3.5)$$

и

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \quad (3.6)$$

где $F(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция. Отметим, что согласно [14] гипергеометрическая функция $F(a, b; c; 1)$ сходится при условии $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$. В нашем случае это условие соблюдается.

В результате мы получим для интегралов I_{pq} и $\mathcal{I}_{pq}$ следующие выражения:

$$I_{pq} = an, \quad \mathcal{I}_{pq} = 2(an)^3 \left[3p(p + |q| + 1) + \frac{|q|}{2}(|q| + 3) + 1 \right]. \quad (3.7)$$

Теперь, пользуясь вычисленными интегралами, можно найти поправку первого приближения к собственному значению энергии (2.4):

$$E_n^{(1)} = \frac{3\hbar^2 |e|\varepsilon}{2\mu\gamma} \left[n \left(n_1 - n_2 + \frac{|m - s| - |m + s|}{2} \right) + \frac{ms}{3} \right]. \quad (3.8)$$

Как и в случае атома водорода, линейный по n член пропорционален x_3 -компоненте вектора Рунге–Ленца. Однако имеется дополнительная линейная по m поправка, снимающая вырождение по x_3 -компоненте вращательного момента.

Итак, в системе заряд–дираковский дион имеется линейный эффект Штарка, полностью снимающий вырождение по азимутальному квантовому числу m .

При фиксированном s согласно формуле (2.12) две крайние компоненты расщепившегося уровня соответствуют следующим значениям параболических квантовых чисел:

$n_1 = n - |s| - 1$, $n_2 = 0$ и $n_1 = 0$, $n_2 = n - |s| - 1$. Согласно (3.8) расстояние между этими крайними уровнями есть

$$\Delta E_n = \frac{3\hbar^2 |e| \varepsilon}{\mu \gamma} n(n - |s| - 1),$$

т.е., как и в случае атома водорода, общее расщепление уровня при эффекте Штарка примерно пропорционально n^2 .

Наличие линейного эффекта Штарка означает, что в невозмущенном состоянии связанная система заряд-дион обладает дипольным моментом со средним значением

$$\bar{d}_z = -\frac{3\hbar^2 |e|}{2\mu \gamma} \left[n \left(n_1 - n_2 + \frac{|m - s| - |m + s|}{2} \right) + \frac{ms}{3} \right]. \quad (3.9)$$

Из выражения для среднего дипольного момента естественно следует определение оператора

$$\mathbf{d} = -\frac{3\hbar^2 |e|}{2\mu \gamma} \left[n^2 \mathbf{I} + \frac{s\mathbf{J}}{3} \right] = |e| \left[\frac{3\gamma}{4E^{(0)}} \mathbf{I} - \frac{\hbar^2 s}{2\mu \gamma} \mathbf{J} \right]. \quad (3.10)$$

Отметим, что все полученные нами формулы при $s = 0$ переходят в соответствующие формулы для атома водорода.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели эффект Штарка в задаче МИК-Кеплер, описывающей взаимодействие заряда с дираковским дионом. Мы нашли, что, несмотря на глубокое сходство системы заряд-дион с атомом водорода, отношение первой к эффекту Штарка качественно иное. Именно, в задаче МИК-Кеплер имеет место линейный эффект Штарка, полностью снимающий вырождение по азимутальному квантовому числу m .

Заметим, что эффект Штарка для системы заряд-дион не может быть непосредственно перенесен на систему двух дираковских дионов. Во втором случае мы должны учитывать взаимодействие внешнего поля с магнитным зарядом, т.е. в случае системы двух дираковских дионов к гамильтониану (3.1) нужно добавить возмущение внешним магнитным полем. Иными словами, эффект Штарка системы двух дираковских дионов должен быть суперпозицией эффектов Штарка и Зеемана задачи МИК-Кеплер.

Конечно же, наличие как линейного эффекта Штарка, так и ненулевого дипольного момента системы является следствием присутствия магнитного монополя. Очевидно, что качественно схожим поведением должна обладать и обсуждавшаяся во введении система двух БПЗ-дионов. При этом, преобразовывая уравнение Шредингера, отвечающее гамильтониану (3.1), в уравнение Шредингера системы двух БПЗ-дионов, мы получим систему, возмущенную нелинейным электрическим полем. Кроме того, формальное соответствие задач МИК-Кеплер и двух БПЗ-дионов предполагает зависимость константы взаимодействия второй системы как от константы взаимодействия, так и от энергии первой.

Наконец, было бы интересно провести аналогичный анализ эффекта Штарка в системе МИК-Кеплера на сфере и гиперboloиде с целью выяснения его зависимости от

кривизны пространства. Еще более поучительным может быть исследование эффекта Штарка на пятимерном обобщении задачи МИК-Кеплер (так называемой задаче Янга–Кулона или $SU(2)$ -Кеплер) [5] в силу наличия изоспиновых степеней свободы.

Благодарности. Авторы благодарны В. М. Тер-Антоняну за полезные обсуждения и замечания. Работа выполнена при поддержке грантов ANSEF № PS81 и INTAS № 00-00262 (А. Н.).

Список литературы

- [1] *D. Zwanziger.* Phys. Rev. 1968. V. 176. P. 1480.
- [2] *H. McIntosh, A. Cisneros.* J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 896.
- [3] *T. Iwai, Y. Uwano.* J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 4083; *A. Nersessian, V. Ter-Antonyan.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 2431; 1995. V. 10. P. 2633.
- [4] *A. Nersessian, V. Ter-Antonyan, M. M. Tsulaia.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1605; *A. Нерсесян, В. М. Тер-Антонян.* ЯФ. 1998. Т. 61. С. 1868.
- [5] *T. Iwai.* J. Geom. Phys. 1990. V. 7. P. 507; *Л. Г. Мардоян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян.* ЯФ. 1998. Т. 61. С. 1859; *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan.* Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 1303.
- [6] *C. N. Yang.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 320.
- [7] *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan.* Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 237; *Л. Г. Мардоян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян.* ТМФ. 2000. Т. 123. С. 44; *Л. Г. Мардоян.* ЯФ. 2002. Т. 65. С. 1006.
- [8] *V. V. Gritsev, Yu. A. Kurochkin, V. S. Otchik.* J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 4903.
- [9] *A. Nersessian, G. Pogosyan.* Phys. Rev. A. 2001. V. 63. P. 020103(R).
- [10] *G. W. Gibbons, N. S. Manton.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 274. P. 183.
- [11] *S. Bellucci, A. Nersessian.* Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 065013.
- [12] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. А. Херсонский.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
- [13] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [14] *Г. Бейтман, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 17.VI.2003 г.