Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Г. Синай, Динамика массивной частицы, окруженной конечным числом легких частиц, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 1, 110–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 11:44:08

ДИНАМИКА МАССИВНОЙ ЧАСТИЦЫ, ОКРУЖЕННОЙ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЛЕГКИХ ЧАСТИЦ

Рассматривается динамическая система, состоящая из массивной частицы массы M и окружающих ее легких частиц, двигающихся на отрезке $[0, 1]$ независимо и с упругими отражениями. При значении общей энергии, не зависящей от M , найдена динамика массивной частицы в медленном времени $t/\sqrt{M}$.

В связи с задачей о динамике адиабатического поршня (см. [1]) Э. Либ предложил следующую модель. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ и допустим, что в точке $x = 1/2$ находится массивная частица массы M с начальной скоростью $V(0) = 0$. Разумеется, вместо $1/2$ можно было бы взять любую другую точку интервала $(0, 1)$. Допустим также, что слева от массивной частицы находится $r^{(-)}$ частиц с массами $m_i^{(-)}$, начальными координатами $y_i^{(-)}(0) < 1/2$ и начальными скоростями $v_i^{(-)}(0) > 0$, $1 \leq i \leq r^{(-)}$, а справа от нее — $r^{(+)}$ аналогичных частиц с массами $m_j^{(+)}$, начальными координатами $y_j^{(+)}(0) > 1/2$ и начальными скоростями $v_j^{(+)}(0) < 0$, $1 \leq j \leq r^{(+)}$. Каждая из легких частиц движется равномерно, независимо от других частиц и упруго отражается от массивной частицы и от соответствующей границы $x = 0$ или 1 . В дальнейшем считаем $(m_i^{(-)}, y_i^{(-)}, v_i^{(-)})$, $1 \leq i \leq r^{(-)}$, $(m_j^{(+)}, y_j^{(+)}, v_j^{(+)})$, $1 \leq j \leq r^{(+)}$, фиксированными, а $M \rightarrow \infty$. Обозначим через $V(t)$ скорость массивной частицы и напомним закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} M V^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r^{(-)}} m_i^{(-)} (v_i^{(-)}(t))^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r^{(+)}} m_j^{(+)} (v_j^{(+)}(t))^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r^{(-)}} m_i^{(-)} (v_i^{(-)}(0))^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r^{(+)}} m_j^{(+)} (v_j^{(+)}(0))^2. \end{aligned}$$

Из него следует, что $|V(t)| \leq \sqrt{2H/M}$, т.е. массивная частица может двигаться со скоростью порядка, не превышающего $O(1/\sqrt{M})$. Запишем ее координату в виде $X(t) = x(t/\sqrt{M})$. Естественно предположить, что функция $x(\tau)$ при медленном времени $\tau =$

*Отделение математики Принстонского университета, Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

$t/\sqrt{M}$ имеет предел при $M \rightarrow \infty$. Основная цель работы – найти предельную функцию $x(\tau)$. Заметим, что в течение любого малого, но фиксированного промежутка времени на оси τ происходит много столкновений каждой из легких частиц с массивной частицей. Поэтому задача нахождения $x(\tau)$ может рассматриваться как задача теории усреднения. Наш анализ основан на формулах упругого столкновения. Если v, m и V, M – скорости и массы сталкивающихся частиц до столкновения, то их скорости v', V' после столкновения имеют вид

$$v' = -\left(1 - \frac{2m}{M+m}\right)v + \frac{2m}{M+m}V, \quad V' = \left(1 - \frac{2M}{M+m}\right)V + \frac{2m}{M+m}v. \quad (1)$$

Возьмем два момента времени $t = \tau\sqrt{M}$ и $t_1 = t + \delta\sqrt{M} = (\tau + \delta)\sqrt{M}$. В этом промежутке времени массивная частица сдвигается на расстояние порядка δ , а число столкновений каждой из легких частиц с массивной частицей растет как $\sqrt{M}$. Предположим, что все столкновения массивной частицы занумерованы в том порядке, в котором они происходят, и пусть номера серии столкновений массивной частицы в отрезке $[t, t_1]$ меняются от $k_0 + 1$ до k_1 . Из (1) следует, что

$$V_{k+1} = \left(1 - \frac{2m_k}{M+m_k}\right)V_k + \frac{2m_k}{M+m_k}v_k. \quad (2)$$

Здесь m_k принимает одно из $m_i^{(-)}$ или $m_j^{(+)}$ значений. Положим

$$\varepsilon_i^{(-)} = \frac{2m_i^{(-)}}{M+m_i^{(-)}}, \quad \varepsilon_j^{(+)} = \frac{2m_j^{(+)}}{M+m_j^{(+)}}.$$

Из (2) вытекает

$$\begin{aligned} V_{k_1} - \prod_{\substack{1 \leq i \leq r^{(-)} \\ 1 \leq j \leq r^{(+)}}} (1 - \varepsilon_i^{(-)})^{n_i^{(-)}} (1 - \varepsilon_j^{(+)})^{n_j^{(+)}} V_{k_0} = \\ = \sum_{i=1}^{r^{(-)}} \varepsilon_i^{(-)} \sum_{k \in \mathcal{N}_i^{(-)}} v_k \prod_{\substack{1 \leq i' \leq r^{(-)} \\ 1 \leq j' \leq r^{(+)}}} (1 - \varepsilon_{i'}^{(-)})^{n_{i'}^{(-)}(k)} (1 - \varepsilon_{j'}^{(+)})^{n_{j'}^{(+)}(k)} + \\ + \sum_{j=1}^{r^{(+)}} \varepsilon_j^{(+)} \sum_{k \in \mathcal{N}_j^{(+)}} v_k \prod_{\substack{1 \leq i'' \leq r^{(-)} \\ 1 \leq j'' \leq r^{(+)}}} (1 - \varepsilon_{i''}^{(-)})^{n_{i''}^{(-)}(k)} (1 - \varepsilon_{j''}^{(+)})^{n_{j''}^{(+)}(k)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $n_i^{(-)}, n_j^{(+)}$ – общее число столкновений i -й, $1 \leq i \leq r^{(-)}$, или j -й, $1 \leq j \leq r^{(+)}$, частиц в рассматриваемом промежутке времени, а $n_i^{(-)}(k), n_j^{(+)}(k)$ – такое же число столкновений в серии с номерами от k до k_1 ; $\mathcal{N}_i^{(-)}, \mathcal{N}_j^{(+)}$ – множества номеров, отвечающих этим столкновениям. Подчеркнем, что в общей ситуации при столкновениях с левой частицей $v_k > 0$, а с правой частицей $v_k < 0$.

Наш дальнейший способ рассуждений таков. Если $x(t/\sqrt{M})$ имеет предел при $M \rightarrow \infty$, то

$$\frac{d}{dt}x\left(\frac{t}{\sqrt{M}}\right) = \frac{1}{\sqrt{M}}x'\left(\frac{t}{\sqrt{M}}\right).$$

Запишем скорость массивной частицы в виде

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{M}}W\left(\frac{t}{\sqrt{M}}\right).$$

Мы выведем сейчас дифференциальное уравнение для $W(\tau)$, производя вначале предельный переход $M \rightarrow \infty$, а затем $\delta \rightarrow 0$. Применим этот способ к (3). Тогда

$$\begin{aligned} W(\tau + \delta) - W(\tau) &= \sum_{i=1}^{r(-)} \frac{2m_i^{(-)}\sqrt{M}}{M + m_i^{(-)}} \sum_{k \in \mathcal{N}_i^{(-)}} v_k + \sum_{j=1}^{r(+)} \frac{2m_j^{(+)}\sqrt{M}}{M + m_j^{(+)}} \sum_{k \in \mathcal{N}_j^{(+)}} v_k + \\ &+ \left[\prod_{i=1}^{r(-)} (1 - \varepsilon_i^{(-)})^{n_i^{(-)}} (1 - \varepsilon_j^{(+)})^{n_j^{(+)}} - 1 \right] W(\tau) + \\ &+ \sqrt{M} \sum_{i=1}^{r(-)} \varepsilon_i \sum_{k \in \mathcal{N}_i^{(-)}} v_k \left[\prod_{i=1}^{r(-)} \prod_{j=1}^{r(+)} (1 - \varepsilon_i^{(-)})^{n_i^{(-)}(k)} (1 - \varepsilon_j^{(+)})^{n_j^{(+)}(k)} - 1 \right] + \\ &+ \sqrt{M} \sum_{j=1}^{r(+)} \varepsilon_j \sum_{k \in \mathcal{N}_j^{(+)}} v_k \left[\prod_{i=1}^{r(-)} \prod_{j=1}^{r(+)} (1 - \varepsilon_i^{(-)})^{n_i^{(-)}(k)} (1 - \varepsilon_j^{(+)})^{n_j^{(+)}(k)} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Каждое выражение в квадратных скобках имеет порядок $O(1/\sqrt{M})$; $\varepsilon_i^{(-)}$, $\varepsilon_j^{(+)}$ имеют порядок $O(1/M)$. Поэтому

$$\begin{aligned} W(\tau + \delta) - W(\tau) &= \sum_{i=1}^{r(-)} \frac{2m_i^{(-)}\sqrt{M}}{M + m_i^{(-)}} \sum_{k \in \mathcal{N}_i^{(-)}} v_k + \\ &+ \sum_{j=1}^{r(+)} \frac{2m_j^{(+)}\sqrt{M}}{M + m_j^{(+)}} \sum_{k \in \mathcal{N}_j^{(+)}} v_k + O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Из формул для скоростей легких частиц (см. далее) будет следовать, что за промежуток времени от $\tau\sqrt{M}$ до $(\tau + \delta)\sqrt{M}$ на оси t их скорости в моменты, предшествующие столкновениям с массивной частицей, мало меняются. Пользуясь этим, можем написать

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_i^{(-)}} v_k = v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})n_i^{(-)}(1 + o(1)), \quad \sum_{k \in \mathcal{N}_j^{(+)}} v_k = v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})n_j^{(+)}(1 + o(1)).$$

Здесь и далее $o(1)$ есть величина, стремящаяся к нулю при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по M . Промежуток времени между двумя последовательными столкновениями левой (правой) частицы с массивной частицей равен

$$\frac{2x(\tau)}{v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})}(1 + o(1)) \quad \left(\frac{-2(1 - x(\tau))}{v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})}(1 + o(1)) \right).$$

Здесь $v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})$, $v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})$ – скорости соответствующих частиц в моменты, предшествующие их первому столкновению в серии. Поэтому $v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M}) > 0$, $v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M}) < 0$. Таким образом,

$$n_i^{(-)} = \frac{\delta\sqrt{M}v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})}{2x(\tau)}(1 + o(1)), \quad n_j^{(+)} = -\frac{\delta\sqrt{M}v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})}{2(1-x(\tau))}(1 + o(1)). \quad (5)$$

Подставляя эти выражения в (4), устремляя $M \rightarrow \infty$, а затем $\delta \rightarrow 0$, получаем замечательно простое дифференциальное уравнение для предельной функции $x(\tau)$:

$$W'(\tau) = x''(\tau) = \sum_{i=1}^{r^{(-)}} \frac{m_i^{(-)}(V_i^{(-)}(\tau))^2}{x(\tau)} - \sum_{j=1}^{r^{(+)}} \frac{m_j^{(+)}(V_j^{(+)}(\tau))^2}{1-x(\tau)}, \quad (6)$$

где $V_i^{(-)}(\tau) = v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})$, $V_j^{(+)}(\tau) = v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})$.

Обратимся теперь к выводу уравнений для скоростей легких частиц. Мы рассмотрим только одну из левых частиц, скажем первую, остальные рассматриваются аналогично. Допустим, что $k \in \mathcal{N}_1^{(-)}$. Пусть скорость v_k есть величина порядка единицы. Тогда она положительна, т.е. $v_k > 0$. После столкновения с массивной частицей скорость становится отрицательной, и легкая частица долетает до стенки $x = 0$, отражается от нее, после чего ее скорость снова становится положительной. Введем порядковый индекс s для моментов $k \in \mathcal{N}_1^{(-)}$. Можем написать из (1)

$$v_{s+1}^{(-)} = (1 - \varepsilon_1^{(-)})v_s^{(-)} - \frac{2M}{M + m_1^{(-)}}V_s. \quad (7)$$

Подчеркнем, что здесь V_s – скорость массивной частицы в момент, предшествующий $(s+1)$ -му столкновению с левой частицей, индекс s меняется от 0 до $n_1^{(-)} - 1$. Из (7) получаем

$$v_{n_1^{(-)}}^{(-)} - (1 - \varepsilon_1^{(-)})^{n_1^{(-)}}v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M}) = -\frac{2M}{M + m_1^{(-)}} \sum_{s=0}^{n_1^{(-)}-1} V_s (1 - \varepsilon_1^{(-)})^{n_1^{(-)}-s-1}. \quad (8)$$

Коэффициенты $(1 - \varepsilon_1^{(-)})^{n_1^{(-)}-s-1}$ отличаются от единицы на величину порядка, не превосходящего $O(1/\sqrt{M})$, каждая скорость $V_s = O(1/\sqrt{M})$ и число слагаемых $n_1^{(-)} = \delta O(\sqrt{M})$. Поэтому правая часть (8) имеет порядок, не превосходящий $O(\delta)$. Перепишем (8), выделив главные члены:

$$v_1^{(-)}((\tau + \delta)\sqrt{M}) - v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M}) = -2 \sum_{s=0}^{n_1^{(-)}-1} V_s + O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right). \quad (9)$$

Напишем теперь

$$V_s = \sum_{t=1}^s (V_t - V_{t-1}) + V_0$$

и подставим это разложение в (9):

$$v_1^{(-)}((\tau + \delta)\sqrt{M}) - v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M}) = -2n_1^{(-)}V_0 + \sum_{s=0}^{n_1^{(-)}} \sum_{t=1}^s (V_t - V_{t-1}). \quad (10)$$

Значение $n_1^{(-)}$ было вычислено раньше:

$$n_1^{(-)} = \frac{\delta\sqrt{M}v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M})}{2x(\tau)}(1 + o(1)).$$

Покажем, что двойная сумма в (10) имеет порядок δ^2 и поэтому при предельном переходе $\delta \rightarrow 0$ ею можно пренебречь. Из (2) следует, что

$$\begin{aligned} V_s - V_{s-1} &= \sum_{i=2}^{r^{(-)}} \varepsilon_i^{(-)} v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})(1 + o(1)) + \sum_{j=1}^{r^{(+)}} \varepsilon_j^{(+)} v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})(1 + o(1)) + \\ &+ \sum_{i=2}^{r^{(-)}} \varepsilon_i^{(-)} n_i^{(-)}(s) v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})(1 + o(1)) + \\ &+ \sum_{j=1}^{r^{(+)}} \varepsilon_j^{(+)} n_j^{(+)}(s) v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Здесь $n_i^{(-)}(s)$, $i \geq 2$, $n_j^{(+)}(s)$, $j \geq 1$, — общее число столкновений массивной частицы с соответствующей легкой частицей между $(s-1)$ -м и s -м столкновениями с первой левой частицей и суммы $\sum'$ берутся по тем легким частицам, которые в рассматриваемом промежутке времени сталкивались с массивной частицей. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \sum_{s=1}^{n_1^{(-)}} \sum_{t=1}^s (V_t - V_{t-1}) \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^{r^{(-)}} \varepsilon_i^{(-)} v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M}) \frac{(n_1^{(-)})^2}{2} (1 + o(1)) \right| + \\ &+ \left| \sum_{i=2}^{r^{(-)}} \varepsilon_i^{(-)} v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M}) \sum_{s=1}^{n_1^{(-)}} \bar{n}_i^{(-)}(s) (1 + o(1)) \right| + \\ &+ \left| \sum_{j=1}^{r^{(+)}} \varepsilon_j^{(+)} v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M}) \sum_{s=1}^{n_1^{(-)}} \bar{n}_j^{(+)}(s) \right|, \end{aligned}$$

где $\bar{n}_i^{(-)}(s)$, $\bar{n}_j^{(+)}(s)$ — числа столкновений массивной частицы с соответствующими частицами в промежутке до s -го столкновения первой левой частицы. Такие же рассуждения, что и выше, показывают, что

$$\begin{aligned} \bar{n}_i^{(-)}(s) &\leq \frac{v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})s}{v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M})} (1 + o(1)), \\ \bar{n}_j^{(+)}(s) &\leq -\frac{x(\tau)v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})s}{v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M})(1 - x(\tau))} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n_1^{(-)}} \bar{n}_i^{(-)}(s) &= \frac{x(\tau)v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})}{2v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M})} (n_1^{(-)})^2 (1 + o(1)), \\ \sum_{s=1}^{n_1^{(-)}} \bar{n}_j^{(+)}(s) &= \frac{x(\tau)|v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})|}{v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M})(1 - x(\tau))} (n_1^{(-)})^2 (1 + o(1)).\end{aligned}$$

Мы видим, что последние выражения имеют порядок $O(\delta^2)$ и поэтому вклада в дифференциальное уравнение не вносят. Таким образом, из (5) вытекает

$$v_1^{(-)}((\tau + \delta)\sqrt{M}) - v_1^{(-)}(\tau\sqrt{M}) = -\frac{v^{(-)}(\tau\sqrt{M})\delta}{x(\tau)} x'(\tau) + O(\delta^2). \quad (11)$$

Вернемся к прежнему обозначению: $V_i^{(-)}(\tau) = v_i^{(-)}(\tau\sqrt{M})$, $1 \leq i \leq r^{(-)}$, $V_j^{(+)}(\tau) = v_j^{(+)}(\tau\sqrt{M})$, $1 \leq j \leq r^{(+)}$. Из (11) получим

$$\frac{dV_1^{(-)}(\tau)}{d\tau} = -V_1^{(-)}(\tau) \frac{x'(\tau)}{x(\tau)}. \quad (12)$$

Аналогичные уравнения можно написать и для остальных левых частиц. Для правых частиц они имеют вид

$$\frac{dV_j^{(+)}(\tau)}{d\tau} = V_j^{(+)}(\tau) \frac{x'(\tau)}{1 - x(\tau)}. \quad (13)$$

Из (12), (13) следует

$$V_i^{(-)}(\tau) = \frac{C_i^{(-)}}{x(\tau)}, \quad V_j^{(+)}(\tau) = \frac{C_j^{(+)}}{1 - x(\tau)},$$

где константы $C_i^{(-)}$, $1 \leq i \leq r^{(-)}$, $C_j^{(+)}$, $1 \leq j \leq r^{(+)}$, находятся из начальных условий. Подставляя эти выражения в (6), получаем окончательное уравнение для $x(\tau)$:

$$x''(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{r^{(-)}} m_i^{(-)} (C_i^{(-)})^2}{x^3(\tau)} - \frac{\sum_{j=1}^{r^{(+)}} m_j^{(+)} (C_j^{(+)})^2}{(1 - x(\tau))^3}. \quad (14)$$

Заметим, что (14) есть уравнение движения одномерной частицы в поле с потенциалом

$$U(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2} \sum_{i=1}^{r^{(-)}} m_i^{(-)} (C_i^{(-)})^2 + \frac{1}{(1 - x)^2} \sum_{j=1}^{r^{(+)}} m_j^{(+)} (C_j^{(+)})^2 \right].$$

Поэтому для решений (14) выполняется “закон сохранения энергии”

$$\frac{1}{2} (x')^2 + U(x) = A_0,$$

где постоянная A_0 находится также из начальных условий:

$$A_0 = 2 \left[\sum_{i=1}^{r^{(-)}} m_i^{(-)} (C_i^{(-)})^2 + \sum_{j=1}^{r^{(+)}} m_j^{(+)} (C_j^{(+)})^2 \right].$$

Вид функции U приведен на рисунке. Константа $A_0 = U(x(0)) = U(1/2)$. Движение массивной частицы происходит внутри отрезка, определяемого неравенством $U(x) \leq A_0$, и имеет осциллирующий характер. Одним из концов этого отрезка служит точка $x = 1/2$.

Благодарности. Я признателен А.И. Нейштадту за полезные обсуждения этой работы и за указание на связь с теорией адиабатических инвариантов, Б.Л. Воронovu за многочисленные замечания, относящиеся к тексту, а также Э. Либу, Дж. Либовицу и Я. Пясецкому за многочисленные полезные обсуждения проблемы адиабатического поршня. Я благодарен также РФФИ (грант № 99-01-00314) и NSF (грант № DMS-9706794) за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] E. Lieb. Physica A. 1999. V. 263. P. 491–499.

Поступила в редакцию 30.VI.1999 г.