Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, Третий вариант метода одевания, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 1, 165–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 05:13:33

© 1999 г.

А. Б. Шабат*

ТРЕТИЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ОДЕВАНИЯ

Два предыдущих варианта метода одевания теории солитонов были разработаны вместе с В. Е. Захаровым. В наших работах, опубликованных в семидесятые годы, не рассматривались дискретные уравнения на решетке, уравнения типа Пенлеве и конечнотонные потенциалы, и теперь я хочу восполнить этот пробел. Хотя рассматриваемая элементарная схема дискретизации линейной спектральной задачи представляется достаточно общей, изложение ограничено в основном рамками спектральной задачи Захарова–Шабата.

Посвящается 60-летию В. Е. Захарова

1. ВВЕДЕНИЕ

Подход данной работы существенно отличается от того, который был развит в наших совместных с Захаровым работах [1]. Он основан на преобразованиях Дарбу (ПД) или, что то же самое, изоспектральных симметриях и развивает методы более поздних работ [2, 3], в которых рассматривалась одевающая цепочка

$$f_{n,x} + f_{n+1,x} = f_n^2 - f_{n+1}^2 + \alpha_n, \quad q_n = f_{n,x} + f_n^2 + \mu_n, \quad \alpha_n = \mu_n - \mu_{n+1}, \quad (1)$$

для линейного уравнения Шредингера

$$\psi_{xx} = (q - \lambda)\psi. \quad (2)$$

Элементарные ПД в этом случае

$$\hat{\psi} = f\psi - \psi_x, \quad (\lambda - \mu)\psi = f\hat{\psi} + \hat{\psi}_x \quad (3)$$

преобразуют решения (2) в решения уравнения того же вида, но с другим потенциалом $\hat{q}$. В данной работе рассматривается действие преобразований, аналогичных преобразованиям (3) в случае линейного уравнения второго порядка с квадратичной зависимостью от λ потенциала $U(\lambda)$:

$$\Psi_{xx} = U(\lambda)\Psi. \quad (4)$$

Нас интересуют, как и в статье [3], потенциалы, инвариантные относительно композиций элементарных ПД (ПД-инвариантность). Эта ПД-инвариантность, вообще говоря, отвечает интегрируемости типа Пенлеве, а соответствующая спектральная задача

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: shabat@itp.ac.ru

обладает примечательными спектральными свойствами. Например, периодическое замыкание $n \in \mathbb{Z}_3$ одевающей цепочки (1) приводит к очень удобному описанию четвертого трансцендента Пенлеве, а спектр (2) в этом случае есть объединение спектров трех гармонических осцилляторов [3, 4]. Интересно также, что инвариантность относительно (3) при $n \in \mathbb{Z}_1$ в соответствии с уравнением (1) приводит к тому, что $f = \pm x$, а элементарные ПД суть операторы рождения (уничтожения) для квантового гармонического осциллятора. Кроме того, периодическое замыкание $n \in \mathbb{Z}_5$ приводит к интересному обобщению известных уравнений Пенлеве.

В случае уравнения (4) потенциалы, инвариантные относительно элементарных ПД, приводят к линейному уравнению Шредингера в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$\Delta\psi = (Q - E)\psi \quad (5)$$

с кулоновским потенциалом $Q = \varepsilon/r$. В следующем, втором порядке (ПД-инвариантность типа $\mathbb{Z}_2$) мы находим (в ситуации общего положения) третий трансцендент Пенлеве РЗ с полным набором параметров и эллиптические решения цепочки Вольтерра для редукции, аналогичной условию $\sum \alpha_i = 0$ в случае одевающей цепочки (1). Наконец, N -солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) показывают ПД-инвариантность $\mathbb{Z}_{N+1}$ простейшего вида.

Основное различие между уравнениями (2) и (4) заключается в нетривиальных коммутационных соотношениях между различными ПД в случае (4). Это приводит к уравнениям на решетке (см. формулу (32) в п. 2.2 ниже) с двумя дискретными переменными. Эти уравнения и задают дискретизацию спектральной задачи (4).

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем записывать дифференциальное уравнение (4) в линейном по спектральному параметру λ виде

$$\psi_{xx} + (z - \lambda)\psi_x + p\psi = 0. \quad (6)$$

Соответствующее калибровочное преобразование, приводящее (6) к каноническому виду (4), задается формулами

$$\psi = e^y \Psi, \quad y_x + Z = 0, \quad Z = \frac{1}{2}(z - \lambda), \quad U(\lambda) = Z^2 + Z_x - p. \quad (7)$$

Очевидно, что сдвиг спектрального параметра λ в (6) эквивалентен сдвигу коэффициента z . В случае $z = \text{const}$ мы приходим снова к уравнению Шредингера (2). Случай $p = 0$ соответствует “основным состояниям”, когда уравнение (6) интегрируется в квадратурах.

Следует, наконец, отметить, что уравнение (6) эквивалентно с точностью до калибровочного преобразования спектральной задаче Захарова–Шабата

$$\psi_x^1 - i\xi\psi^1 = u\psi^2, \quad \psi_x^2 + i\xi\psi^2 = v\psi^1, \quad 2i\xi = \lambda. \quad (8)$$

Действительно, записав уравнение второго порядка в виде системы

$$\psi_x + (z - \lambda)\psi + \tilde{\psi} = 0, \quad \tilde{\psi}_x = (p - z_x)\psi,$$

нетрудно привести ее к виду (8), заменив $\tilde{\psi} = \exp(i\xi x)\psi^2$. Выбор калибровки, однако, влияет на свойства ПД-инвариантности, и мы будем придерживаться не столь популярной, но очень удобной калибровки (6).

2.1. Элементарные изоспектральные симметрии. Следующая лемма определяет два элементарных ПД спектральной задачи (6). В ней используется соответствующее данному случаю уравнение Риккати:

$$\psi'' + (z - \lambda)\psi' + p\psi = 0, \quad y = -\frac{\psi'}{\psi} \Rightarrow y' = y^2 + (\lambda - z)y + p.$$

ЛЕММА. В случае уравнения (6) существуют два различных ПД $\psi \mapsto f\psi_x + g\psi$ с коэффициентами f и g , не зависящими от λ :

$$T: \psi \mapsto \tilde{\psi} = \frac{\psi_x}{p}, \quad \tilde{z} - z = (\log p)_x, \quad \tilde{p} - p = \tilde{z}_x, \quad (9)$$

$$S: \psi \mapsto \hat{\psi} = \psi + \frac{\psi_x}{a}, \quad \hat{z} - z = (\log a)_x, \quad \hat{p} - p = b_x. \quad (10)$$

Здесь функции $b = p/a$ и $a = [\log \psi(\mu)]_x$ являются решением уравнения Риккати

$$a_x = a^2 + (\mu - z)a + p, \quad a + (\log \psi(\mu))_x = 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$\hat{\psi} = f\psi_x + g\psi, \quad \hat{\psi}_x = F\psi_x + G\psi, \quad (12)$$

где

$$F = f_x + g + f(\lambda - z), \quad G = g_x - pf.$$

Введем в рассмотрение вронскиан двух произвольных линейно независимых решений φ и ψ уравнения (6)

$$w = \psi_x \varphi - \psi \varphi_x, \quad w_x = (\lambda - z)w, \quad \hat{w} = hw,$$

где $\hat{w}$ – вронскиан $\hat{\psi}, \hat{\varphi}$. Таким образом,

$$h = Fg - Gf = A\lambda + B, \quad A = fg, \quad B = f_x g - g_x f + g^2 + pf^2 - zfg$$

и

$$\hat{z} - z + (\log h)_x = 0 \Rightarrow fg = 0 \quad \text{или} \quad B = \mu A, \quad \mu = \text{const}. \quad (13)$$

Отсюда следует, что случай $f = 0$ дает $g = \text{const}$, а случай $g = 0$ соответствует преобразованию (9) с $\tilde{w} = w/p$.

В случае $fg \neq 0$ условие $B = \mu A$ приводит нас к уравнению Риккати (11) для $a = g/f$. Наконец, собирая члены с $\lambda\psi$ в преобразованном уравнении для $\hat{\psi}$, получаем, что $(af)_x = 0$.

Используя уравнения (12) из доказательства леммы, мы можем выразить ψ через $\hat{\psi}$. Это дает новые ПД

$$\tilde{\psi}_x + (\tilde{z} - \lambda)\tilde{\psi} + \psi = 0, \quad \hat{\psi}_x + (\mu - \lambda + b)\hat{\psi} = (\mu - \lambda)\psi, \quad (14)$$

которые мы обозначим через T^{-1} и S^{-1} , соответственно. Операторные соотношения

$$T^{-1}T = TT^{-1} = S^{-1}S = SS^{-1} = E, \quad (15)$$

как будет далее показано, совпадают с уравнениями на решетке (см. ниже формулу (32)). Сначала мы ограничимся рассмотрением преобразований T , T^{-1} , которые определяются непосредственно через коэффициенты уравнений (6).

Легко проверить, что

$$T^{-1}T = TT^{-1} = E \Leftrightarrow (pT + T^{-1} + z - \lambda)\psi = 0. \quad (16)$$

Выбрав решение ψ спектральной задачи (6), мы можем построить, используя операторы T , T^{-1} , последовательность $\psi(m) = T^m\psi$, $m \in \mathbb{Z}$. В этих обозначениях формулы, связанные с преобразованием (9), запишутся следующим образом:

$$p(m)\psi(m+1) = \psi_x(m), \quad p(m)\psi(m+1) + (z(m) - \lambda)\psi(m) + \psi(m-1) = 0, \quad (17)$$

$$z_x(m) = p(m) - p(m-1), \quad (\log p(m))_x = z(m+1) - z(m). \quad (18)$$

Другими словами, мы иным путем получаем вспомогательную линейную задачу (17) для одной из обычных форм (18) цепочки Тоды. Используя операторы T , T^{-1} , найдем формулы преобразования для $b = p/a$ и $a = (\log \psi)_x$, где $\psi = \psi(\mu)$ является решением (6) при $\lambda = \mu$. В силу леммы и уравнения (17) имеем

$$a(m) = -p(m) \frac{\psi(m+1)}{\psi(m)}, \quad b(m) = \frac{p(m)}{a(m)} = -\frac{\psi(m)}{\psi(m+1)}. \quad (19)$$

Таким образом, уравнения цепочки Тоды (18) можно теперь переписать в переменных a , b в виде уравнений Вольтерра

$$(\log a)_x(m) = b(m) - b(m-1), \quad (\log b)_x(m) = a(m+1) - a(m). \quad (20)$$

Перепишем также для дальнейших ссылок формулы (10):

$$z(m) = a(m) + b(m-1) + \mu, \quad \hat{z}(m) = a(m) + b(m) + \mu, \quad (21)$$

$$p(m) = a(m)b(m), \quad \hat{p}(m) = a(m+1)b(m). \quad (22)$$

Дифференциальная (6) и разностная (16) спектральные задачи в определенном смысле эквивалентны. Например, можно доказать, что преобразование $\hat{\psi} = (f + gT)\psi$ (с коэффициентами, не зависящими от λ) в случае (16) должно определяться формулой

$$\hat{\psi} = (E + bT)\psi, \quad \hat{z} = z + (E - T^{-1})b, \quad \hat{p} = bT(a). \quad (23)$$

В соответствии с уравнениями (21), (22)) это преобразование совпадает с преобразованием S для (6). Однако принято рассматривать разностное уравнение (16) как дискретный вариант линейного уравнения Шредингера (имеется в виду предельный переход (16) в (2)). Тем не менее связь (16) с (6) является более непосредственной, а дискретизация (2) приводит к другому разностному уравнению, которое будет указано ниже.

При формулировке общей схемы “дискретизации” спектральных задач, аналогичных (4), мы будем опираться на следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение*

$$\widehat{S}: \quad \widehat{\psi} = A\psi_x + B\psi, \quad \widehat{U} = U + \frac{A_{xx}}{A} + 2\frac{B_x}{B}$$

переводит уравнение (4) в другое уравнение той же формы $\widehat{\psi}_{xx} = \widehat{U}\widehat{\psi}$ в том и только в том случае, если при подходящей постоянной μ выполняется уравнение

$$U + \left(\frac{B}{A}\right)_x - \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{\mu}{A^2}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя и пользуясь уравнением (4), находим

$$\widehat{\psi}_x = A\psi_{xx} + (A_x + B)\psi_x + B_x\psi = (A_x + B)\psi_x + (B_x + AU)\psi.$$

Подставив $\widehat{\psi}$, $\widehat{\psi}_x$, выраженные через ψ , ψ_x , в преобразованное уравнение и собрав отдельно члены с ψ , ψ_x , получим требуемую формулу для $\widehat{U}$ и дифференциальное уравнение второго порядка для A, B . В результате интегрирования последнее уравнение дает (24).

Из приведенного доказательства следует, что следующая система уравнений первого порядка:

$$\widehat{\psi} = A\psi_x + B\psi, \quad \mu\psi = A\widehat{\psi}_x - (A_x + B)\widehat{\psi}, \quad (25)$$

обеспечивает вместе с (24) выполнение обоих уравнений: исходного и преобразованного. Точнее, исходное уравнение $\psi_{xx} = U\psi$ получается в результате подстановки формулы для $\widehat{\psi}$ во второе из уравнений (25) и наоборот. Обозначив $\psi_n = \widehat{S}^n\psi$, получаем разностное уравнение второго порядка

$$a_n\psi_{n+1} + b_n\psi_n + c_n\psi_{n-1} = 0 \quad (26)$$

как следствие (25). Чтобы это установить, надо переписать второе из уравнений (25) в виде

$$\mu_{n-1}\psi_{n-1} = \widehat{A}_n\psi_{n,x} + \widehat{B}_n\psi_n$$

и исключить $\psi_{n,x}$, воспользовавшись первым из уравнений (25). Другими словами, как и в случае (16), разностное уравнение (26) эквивалентно операторному соотношению $\widehat{S}\widehat{S}^{-1} = E$, где $\widehat{S}^{-1}$ определяется второй из формул (25).

Применение указанной выше схемы к ПД (3) для уравнения (2) приводит, как легко проверить, к разностному уравнению

$$g_n\psi_{n+1} = \psi_{n+2} + (\lambda - \mu_n)\psi_n, \quad g_n = f_n + f_{n+1}. \quad (27)$$

Полученная дискретизация линейного уравнения Шредингера является, естественно, редукцией $z = \text{const}$ разностного уравнения (16), и это объясняет совпадение (с точностью до редукции) первых интегралов одевающей цепочки (1) и цепочки Тоды (18) (см. [3] и раздел 3 ниже).

2.2. Уравнения на решетке. Рассмотрим теперь преобразования (6), порожденные композициями элементарных ПД. Отметим прежде всего, что, выбрав решение a уравнения Риккати (11), можно построить аналогично (10) другое ПД:

$$S^* : \quad \psi \mapsto \psi^* = \psi_x + (a + \mu - \lambda)\psi, \quad \psi_x^* + T^{-1}(b)\psi^* = (\mu - \lambda)T^{-1}(b)\psi. \quad (28)$$

Можно проверить, что

$$T^{-1}S + S^* = ST^{-1} + S^* = 0, \quad (29)$$

если выполнены уравнения (20). Другими словами, при выполнении указанных в предыдущем разделе условий элементарные ПД перестановочны и $S^j T^k = T^k S^j$ для любых целых j, k .

Если в дополнение к $\varphi(\mu)$ задано семейство решений $\varphi(\mu_i)$ задачи (6) с $\lambda = \mu_i$, то в результате выполнения преобразования (10) с $a = -(\log \varphi(\mu))_x$ имеем

$$\hat{A}A + a\hat{A} + (\mu - \lambda + b)A + ab = 0, \quad A = (\log \psi(\lambda))_x, \quad \hat{A} = (\log \hat{\psi}(\lambda))_x, \quad (30)$$

где $\hat{\psi}$ определено согласно (10). Формула (30) задает дробно-рациональное отображение логарифмических производных $A \leftrightarrow \hat{A}$, и, таким образом, можно выбрать $a_1 = -\hat{A}(\mu_1)$, построить $S_1 S$ и продолжить процесс рекуррентно.

Имея дело с суперпозицией коммутирующих отображений T^m и S^n , мы можем использовать обозначения

$$T(\psi_n^m) = \psi_n^{m+1}, \quad S(\psi_n^m) = \psi_{n+1}^m. \quad (31)$$

В этих обозначениях формулы (21) и (22) принимают следующий вид:

$$z_{n+1}^m = a_n^m + b_n^m + \mu_n = a_{n+1}^m + b_{n+1}^{m-1} + \mu_{n+1}, \quad p_n^m = a_n^m b_n^m = a_{n-1}^{m+1} b_{n-1}^m. \quad (32)$$

Эти дискретные уравнения на решетке вместе с (20) и (16) дают полное описание рассматриваемой теории ПД для (6).

Соотношения (32) позволяют записывать уравнения, управляющие x -динамикой переменных a, b , в различной форме. Нетрудно проверить, в частности, эквивалентность следующих непохожих друг на друга уравнений:

$$(\log a_n^m)_x = a_n^m + b_n^m - a_{n-1}^m - b_{n-1}^m + \alpha_n, \quad b_{n,x}^m = a_{n+1}^m b_{n+1}^m - a_n^m b_n^m, \quad (33a)$$

$$a_{n,x}^m = a_n^m b_n^m - a_{n+1}^{m-1} b_{n+1}^{m-1}, \quad (\log b_n^m)_x = a_{n-1}^{m+1} + b_{n-1}^{m+1} - a_n^m - b_n^m - \alpha_n, \quad (33b)$$

$$(\log a_n^m)_x = b_n^m - b_n^{m-1}, \quad (\log b_n^m)_x = a_n^{m+1} - a_n^m. \quad (34)$$

Уравнения (34) являются одной из форм цепочки Тоды (ср. (20)), тогда как в уравнениях (33a) действие $T: m \mapsto m+1$ в правой части заменено на S и S^* , соответственно, при помощи (32). Таким образом,

$$\alpha_n = \mu_n - \mu_{n-1},$$

причем μ_n не изменяется под действием $T^{\pm 1}$ и переходит в $\mu_{n\pm 1}$ под действием $S^{\pm 1}$. Вспомогательная линейная задача (ср. (17)) для S -цепочки (33)

$$a_n^m \psi_{n+1}^m + (\lambda - \mu_n) \psi_{n-1}^m + (b_{n-1}^m - a_n^m + \mu_n - \lambda) \psi_n^m = 0, \quad \psi_{n,x}^m = a_n^m (\psi_{n+1}^m - \psi_n^m), \quad (35)$$

является, как нетрудно проверить, дискретизацией исходной спектральной задачи (6), отвечающей условию $SS^{-1} = E$. Именно эта S -цепочка (33) является точным аналогом одевающей цепочки (1), исследованной в работе [3].

Уравнения на решетке (32) можно рассматривать как дискретные формулы преобразования

$$(S - E)z = (E - T^{-1})b, \quad (S - E) \log p = (T - E) \log a$$

коэффициентов z_n^m, p_n^m спектральной задачи (6) в основные динамические переменные a_n^m, b_n^m . Последние являются переменными типа Риккати и удовлетворяют в силу (19), (31) условиям

$$a_n^m = -\frac{\varphi_{n,x}^{m+1}}{\varphi_n^m} = -\frac{p_n^m \varphi_n^{m+1}}{\varphi_n^m}, \quad b_n^m = -\frac{\varphi_n^m}{\varphi_n^{m+1}},$$

где $\varphi_n^m = \varphi_n^m(\mu_n)$ — частные решения (6) при $\lambda = \mu_n$. Наряду с a и b важную роль играют переменные, связывающие (6) со спектральной задачей (8) Захарова–Шабата. Эти переменные $w(\lambda)$ определяются через вронскиан двух линейно независимых решений φ и ψ уравнения (6):

$$w = \psi_x \varphi - \psi \varphi_x = T^{-1}(\varphi)\psi - T^{-1}(\psi)\varphi = a(S(\psi)\varphi - \psi S(\varphi)). \quad (36)$$

Динамика $w(\lambda) = w_n^m(\lambda) \equiv w_n^m$ определяется (см. доказательство леммы) следующими уравнениями:

$$w_{n,x}^m + (z_n^m - \lambda)w_n^m = 0, \quad p_n^m w_n^{m+1} = w_n^m, \quad a_n^m w_{n+1}^m = (\lambda - \mu_n)w_n^m. \quad (37)$$

Проиллюстрируем роль переменных $w(\lambda)$ следующим примером. Переформулирова известные результаты о связи НУШ со спектральной задачей (8), мы находим

$$\psi_\tau = V\psi_x + W\psi \Rightarrow w_\tau = Qw, \quad Q = V_x + (\lambda - z)V + 2W. \quad (38)$$

Равенство смешанных производных $w_{\tau x} = w_{x\tau}$ дает

$$z_\tau + Q_x = 0,$$

откуда следует, что Q_x не зависит от λ . Таким образом, мы приходим к следующему уравнению для высших симметрий (6):

$$2p_\tau + Q_{xx} + (z - \lambda)Q_x = V_{xxx}(\lambda) - 4U(\lambda)V_x(\lambda) - 2V(\lambda)U_x(\lambda), \quad (39)$$

где $4U(\lambda) = (z - \lambda)^2 + 2z_x - 4p$ (ср. (7)) и W заменено на Q_x при помощи формулы (38). В полиномиальном по λ случае $V = \lambda^l + z\lambda^{l-1} + \dots$ мы находим при $l = 1$

$$i\psi_t = (z + \lambda)\psi_x - p\psi \Rightarrow iz_t = (2p + z^2 - z_x)_x, \quad ip_t = (2zp + p_x)_x, \quad (40)$$

что дает

$$iw_t + w_{xx} + 2pw = 2\lambda w_x, \quad w_x = (\lambda - z)w$$

или

$$\begin{aligned} iu_t - 2\lambda u_x &= u_{xx} - 2u^2v, & u &= -\frac{1}{w_n^{m+1}}, \\ iv_t - 2\lambda v_x &= -v_{xx} + 2v^2u, & v &= w_n^m. \end{aligned} \quad (41)$$

Полученная “комплексная” форма НУШ вместе с (37) позволяет определить действие преобразований T и S на решения (41). Заметим, что стандартная для (6) редукция $p = 0$ переводит (40) в уравнение Бюргерса с комплексным временем.

Интересно (см. [5, 6]), что можно исходить непосредственно из нелинейных систем, аналогичных (41), и, минуя вспомогательную линейную задачу, находить соответствующие уравнения на решетке, обобщающие (32), для всех известных интегрируемых обобщений (41). Роль T и S играют при этом элементарные преобразования типа Миуры для полиномиальных гамильтонианов вида (50). Другими словами, дискретная форма (32) вспомогательной линейной задачи, в отличие от (6), определяется непосредственно симметричными свойствами НУШ.

3. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Рассмотрим сначала инвариантность $S^2 = T$, позволяющую наглядно представить связь динамических уравнений для a, b с известной моделью Вольтерра. Рассматриваемое условие инвариантности приводит к следующей редукции типа “плоской волны”:

$$a_n^m = c_j, \quad b_n^m = c_{j+1}, \quad j = n + 2m, \quad \mu_n \equiv 0. \quad (42)$$

Уравнения на решетке (32) выполняются тождественно и дают только формулы для z , p в терминах c :

$$z_n^m = z_j = c_j + c_{j-1}, \quad p_n^m = p_j = c_j c_{j+1}.$$

Легко видеть далее, что различные дискретизации (6) сводятся в случае (42) к уравнениям

$$c_j \psi_{j+1} + \psi_{j-1} = \zeta \psi_j, \quad \psi_{j,x} = p_j \psi_{j+2}, \quad \psi_n^m = \zeta^n \psi_j, \quad j = n + 2m, \quad (43)$$

где $\zeta^2 = \lambda$. Соответствующая (43) цепочка уравнений

$$c_{j,x} = c_j(c_{j+1} - c_{j-1}) = p_j - p_{j-1} \quad (44)$$

задает модель Вольтерра.

3.1. Инвариантность $T^N = E$. Условие $T^N = E$ приводит к периодической цепочке Тоды (18) с $m \in \mathbb{Z}_N$. Мы хотим показать на ее примере преимущества выбранной нами калибровки. А именно, солитонная редукция $p(0) = p(N) = 0$ для (6) является частным случаем $\mathbb{Z}_N$ и не приводит к каким-либо отклонениям от периодичности. Зависимость от второй дискретной переменной n в этом разделе не рассматривается, и мы возвращаемся временно к упрощенным обозначениям п. 2.1.

Отметим сначала, что в случае $p(N) = 0$ (не обязательно периодическом) уравнения (17) имеют решение $\varphi(m) = \varphi(m, \lambda)$ такое, что

$$\varphi(N) = 1, \quad \varphi(m-1) = (\lambda - z(m))\varphi(m) - p(m)\varphi(m+1), \quad m \leq N. \quad (45)$$

Это полиномиальное по спектральному параметру λ решение согласовано с уравнением (40) для t -эволюции, т.к.

$$\varphi_x(N) = 0 \Rightarrow i\varphi_t(N) = (z(N) + \lambda)\varphi_x(N) - p(N)\varphi(N) = 0.$$

При $p(0) = p(N) = 0$ в случае периодического замыкания имеем

$$\varphi(jN, \lambda) = \Phi^{-j}(\lambda)\varphi(0, \lambda), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $\Phi(\lambda) = \varphi(0, \lambda)$ — полином по λ степени N с постоянными по x, t коэффициентами, заданный посредством рекуррентии (45). Другими словами, рассматриваемое частное решение (45) квазипериодично в случае периодического замыкания.

Рассмотрим в качестве примера двухсолитонное решение ($T^3 = E$) уравнений (40). При $N = 3$ из формулы (45) следует

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - z(1))(\lambda - z(2))(\lambda - z(3)) - (\lambda - z(3))p(1) - (\lambda - z(1))p(2). \quad (46)$$

Коэффициенты полинома $\Phi(\lambda)$ дают три первых интеграла, которые позволяют выразить p через z :

$$p(1) = \frac{\Phi(a)}{b-a}, \quad p(2) = \frac{\Phi(b)}{a-b}, \quad a = z(1), \quad b = z(3),$$

где $\Phi(\lambda) = \lambda^3 - \beta\lambda^2 + \gamma\lambda - \alpha$ есть полином (46). Полагая для простоты $z(1) + z(2) + z(3) = 0$, мы находим из (40) пару совместных динамических систем

$$a_x = p(1), \quad b_x = -p(2); \quad ia_t = -p(1)b, \quad ib_t = p(2)a, \quad (47)$$

которую нетрудно свести к квадратурам, используя известную общую схему интегрирования Лиувилля. Теорема Лиувилля дает интегрирующий множитель и позволяет записать (47) в виде пары замкнутых дифференциальных форм

$$dx = \frac{b db}{\Phi(b)} - \frac{a da}{\Phi(a)}, \quad dt = \frac{db}{\Phi(b)} - \frac{da}{\Phi(a)}.$$

Обсудим кратко дальнейшие применения изложенной выше на примере $N = 3$ схемы интегрирования уравнений (40). Производящая функция (46) для первых интегралов легко обобщается на произвольное периодическое замыкание цепочки Тоды (18) с $m \in \mathbb{Z}_N$:

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^N (I - p(i)\partial_i \partial_{i+1}) \left(\prod_{j=1}^N (\lambda - z(j)) \right). \quad (48)$$

Здесь $\partial_i = \partial/\partial z(i)$. Однако в общем случае применение схемы Лиувилля усложняется вследствие нелинейности дополнительного первого интеграла

$$\prod_{i=1}^N p(i) = \text{const},$$

который обращается в нуль при солитонной редукции. Отметим, что адекватное описание общих многофазных решений цепочки Тоды связано с ПД-инвариантностью $S^N = E$, а не $T^N = E$ (см. следующий пункт).

В заключение этого пункта отметим, что теорема Лиувилля и условие инвариантности, аналогичное $T^3 = E$, позволяют найти двухсолитонные решения для достаточно общего класса гамильтоновых систем

$$iq_t = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad ip_t = -\frac{\delta H}{\delta q}, \quad (49)$$

отвечающих полиномиальным плотностям H вида

$$H = p_x q_x + q_x^2 (\varepsilon p^2 + \alpha p + \beta) + p^2 (\gamma q_x + \delta), \quad (50)$$

где $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные параметры. Соответствующая пара динамических систем (аналогичных (47)), которые задают раздельную динамику по x, t переменных $p, z = q_x$, указана в работе [6]. Задача о редукции комплексных систем вида (49), (41) к самосопряженному виду ($i u_t = u_{xx} \pm |u|^2 u$ для (41)) рассматривалась, например, в работах [7, 8].

3.2. Инвариантность главного типа. Условие $S^N = E$ инвариантности главного типа сводит бесконечномерную динамическую систему (33) к конечномерной с $n \in \mathbb{Z}_N$. Действие преобразований T, T^{-1} на динамические переменные a, b определяется в силу (32) формулами

$$b_{n+1}^{m-1} - b_n^m = a_n^m - a_{n+1}^m - \alpha_{n+1}, \quad \frac{a_{n-1}^{m+1}}{a_n^m} = \frac{b_n^m}{b_{n-1}^m}. \quad (51)$$

Очевидно, что эти преобразования сохраняют периодичность по n при любом m .

Выбрав S -цепочку (33) за основу, естественно считать управляющие параметры α_n заданными произвольно. Вообще говоря, это расширяет область приложений, но решения (33) могут оказаться несовместимыми, как показывают примеры, с высшими симметриями. В простейшем случае $n \in \mathbb{Z}_1$ и $\alpha_1 \neq 0$ уравнения (33), (32) дают

$$a_n^m = e^{\sigma(x-x_0)}, \quad b_n^m = \sigma(m+m'), \quad \mu_n = \sigma n + \mu_0.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение (6) можно переписать следующим образом:

$$r\psi_{rr} + (\alpha r + \beta)\psi_r + \gamma\psi = 0, \quad r = e^{\sigma x}, \quad (52)$$

где

$$\alpha = \frac{e^{-\sigma x_0}}{\sigma}, \quad \beta = m + n - \frac{\lambda}{\sigma}, \quad \gamma = \alpha(m + m').$$

Преобразования S и T для уравнения (52) являются преобразованиями вида

$$\hat{\psi} = r\psi_r + (\alpha_1 r + \beta_1)\psi,$$

сохраняющими структуру уравнения (52), но изменяющими коэффициенты α, β, γ . В случае преобразования (28) мы находим

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta - \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \hat{\alpha} = \alpha, \quad \hat{\beta} = \beta, \quad \hat{\gamma} = \gamma - \alpha,$$

где $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ обозначают коэффициенты преобразованного уравнения (52). Таким образом, при $\gamma = n\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, уравнение (52) сводится к случаю $\gamma = 0$ итерациями преобразования (28).

Можно проверить (ср. [9, 10]), что в случае $n \in \mathbb{Z}_1$ уравнения (33), (32) воспроизводят в полном объеме теорию операторов рождения и уничтожения для спектральной задачи, возникающей в результате разделения переменных в линейном уравнении Шредингера (5) с кулоновским потенциалом $Q = \varepsilon/r$. Основное состояние соответствует случаю $\gamma = 0$ в (52).

Случай $S^2 = E$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Замыкание $\mathbb{Z}_2$ дает три первых интеграла:

$$a_1^m a_2^m = \alpha, \quad b_1^m + b_2^m = \beta, \quad b_1^m a_1^m + b_2^m a_2^m - b_1^m b_2^m + \alpha_1 b_1^m = \varepsilon, \quad (53)$$

цепочки уравнений (33):

$$\begin{aligned} (\log a_1^m)_x &= a_1^m + b_1^m - a_2^m - b_2^m + \alpha_1, & a_1^m a_2^m &= \alpha, \\ b_{1,x}^m &= a_2^m b_2^m - a_1^m b_1^m, & b_1^m + b_2^m &= \beta. \end{aligned}$$

Эти уравнения сводятся к уравнению для эллиптических функций

$$a_x^2 = R(a), \quad R(a) = (a^2 + \gamma_j a - \alpha)^2 + 4\varepsilon a^2 - 4\alpha\beta a, \quad a = a_j^m, \quad \gamma_j = \alpha_j - \beta, \quad (54)$$

где $j = 1, 2$.

Рассмотрим теперь m -динамику построенного эллиптического решения. В силу (51) преобразование T в случае $S^2 = E$ определяется формулами

$$b_j^{m+1} = b_{j+1}^m + a_{j+1}^{m+1} - a_j^{m+1} - \alpha_j, \quad a_j^{m+1} = \frac{a_{j+1}^m b_{j+1}^m}{b_j^m}, \quad j \in \mathbb{Z}_2. \quad (55)$$

Эти формулы вместе с формулами (54) приводят к однофазным решениям цепочки Вольтерра (20). Действительно, нетрудно проверить, что первые интегралы (53) инвариантны относительно сдвига T и задают тем самым кубическую кривую

$$ab(a + b + \gamma_j) = \varepsilon a + \alpha b - \alpha\beta, \quad a = a_j^m, \quad b = b_j^m,$$

на которой действие T сводится к сдвигу (ср. [11]). С другой стороны, можно сравнить (54) с определением однофазных решений (20) как стационарных решений высших потоков

$$\frac{\partial H_j}{\partial a_j^m} = \frac{\partial H_j}{\partial b_j^m} = 0, \quad (56)$$

соответствующих гамильтониану

$$H_j = \frac{1}{2} \sum_m (a_j^m + b_j^m)^2 + 2b_j^m a_j^{m+1} + \gamma_j \sum_m a_j^m + b_j^m - \alpha \sum_m \log a_j^m - \varepsilon \sum_m \log b_j^m, \quad j \in \mathbb{Z}_2.$$

Уравнения (56) совпадают с (53) с точностью до преобразований (55). Заметим, наконец, что при $\varepsilon = \alpha$ кубическая кривая симметрична:

$$ab(a + b + \gamma_j) = \alpha(a + b - \beta).$$

При этом формулы (55) для сдвига T можно переписать в виде

$$c_j(n+1) + c_j(n) + c_j(n-1) + \gamma_j = \frac{\alpha}{c_j(n)},$$

где $c_j(2m) = a_j^m$, $c_j(2m+1) = b_j^m$, а уравнения (20) сводятся к стандартной форме модели Вольтерра (44).

Легко видеть, что только в исключительных случаях S^2 -инвариантные решения периодичны по второй дискретной переменной m . Поэтому T -ориентированное описание (56) эллиптических решений (20) является бесконечномерным в отличие от (54). Условие S^2 -инвариантности порождает согласно разделу 1 адекватную дискретизацию (35) исходной спектральной задачи (6). Сложная структура спектра стандартной дискретизации (16) для эллиптических решений (20) исследована в работе [12].

Случай $S^2 = E$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$. Здесь аналогом уравнений (54) является уравнение для третьего трансцендента Пенлеве

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{r} + y^3 - \frac{1}{y} + \frac{1}{r}((\alpha_1 - 2\beta)y^2 + \alpha_1 + 2(\beta - 1)) \quad (57)$$

с полным набором параметров (см. ниже). Очевидно, что ПД (9) и (51) задают дискретные симметрии (57). Более важно, что $\mathbb{Z}_N$ -замыкания (33) при $N > 2$ порождают обобщения трансцендентов Пенлеве с хорошо определенной группой дискретных симметрий. Проблема описания спектра соответствующих уравнений (6) представляется очень интересной, однако эта задача оказалась более сложной в сравнении с рассмотренной в работе [3], и вопрос остается пока открытым.

Приведем в заключение явный вид указанных обобщений (57). Периодическое $\mathbb{Z}_N$ -замыкание уравнений (33), (32) приводит при $\alpha_1 + \dots + \alpha_N = N$ к уравнениям

$$a_{n+N}^m = a_n^m, \quad b_{n+N}^m = b_n^m, \quad \mu_n = \mu_0 + n.$$

Рассматриваемые уравнения обладают двумя первыми интегралами:

$$a_1^m \dots a_N^m = r^N, \quad r_x = r, \quad b_1^m + \dots + b_N^m = \beta(m)N, \quad \beta_x = 0,$$

где $\beta(m) = m + \beta_0$ в силу (51). Обозначив $a_n^m(x) = ry_n(r)$, $b_n^m(x) = g_n(r)$, получаем

$$\frac{d}{dr}y_n = y_n^2 - y_n y_{n-1} + \frac{y_n}{r}(g_n - g_{n-1} + \alpha_n - 1), \quad \frac{dg_n}{dr} = y_n g_n - y_{n-1} g_{n-1}, \quad (58)$$

где

$$y_1 \dots y_N = 1, \quad g_1 + \dots + g_N = N\beta.$$

Легко видеть, что при $N = 2$ уравнения (58) дают (57) для $y = y_1$. Замена независимой переменной, как и в случае $N = 1$, соответствует переходу к “полярным координатам” в уравнении (6):

$$r\psi_{rr} + (z + 1 - \lambda)\psi_r + \frac{P}{r}\psi = 0. \quad (59)$$

Благодарности. Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 98-01-01161) и Научной школы РФ (грант № 96-15-96093).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, А. В. Шабат. Функци. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 43; 1979. Т. 13. № 3. С. 13.
- [2] A. B. Shabat. Inverse Problems. 1992. V. 6. P. 303.
- [3] А. П. Веселов, А. В. Шабат. Функци. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1.
- [4] V. E. Adler. Physica D. 1994. V. 73. P. 335.
- [5] В. Э. Адлер, А. В. Шабат. ТМФ. 1997. Т. 111. С. 329; 1997. Т. 112. С. 179.
- [6] В. Г. Маричин, А. В. Шабат. ТМФ. 1999. Т. 118. № 2. С. 217.
- [7] А. В. Шабат, Р. И. Ямилов. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 183.
- [8] A. N. Leznov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov. Phys. Lett. A. 1993. V. 174. P. 397.
- [9] E. Schrödinger. Proc. R. Irish Acad. A. 1940. V. 46. P. 9.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
- [11] А. П. Веселов. Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 3. С. 118.
- [12] В. Л. Верещагин. Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 2. С. 145.

Поступила в редакцию 28.IV.1999 г.