Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Семихатов, Б. Л. Фейгин, Резольвенты унитарных представлений $N = 2$ алгебры Вирасоро в терминах свободных полей. II. Резольвента-бабочка, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 2, 244–257

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf805>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:41:31

РЕЗОЛЬВЕНТЫ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $N = 2$ АЛГЕБРЫ ВИРАСОРО В ТЕРМИНАХ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ. II. РЕЗОЛЬВЕНТА-БАБОЧКА

Построена резольвента нового типа для унитарных представлений $N = 2$ суперконформной алгебры, реализованных в пространстве свободных полей с двумя фермионными экранирующими операторами.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье продолжается исследование [1] резольвент унитарных представлений $N = 2$ суперконформной алгебры, построенных в модулях свободных полей; мы отсылаем читателя к работе [1] за мотивировками и дополнительными ссылками на литературу. Резольвенты представлений $N = 2$ суперконформной алгебры, реализованных в пространствах свободных полей, позволяют выделять неприводимые представления как когомологии некоторого комплекса (на более физическом языке когомологии “БРСТ-оператора”). Различные реализации через свободные поля приводят при этом к различным резольвентам.

До сих пор известные из различных контекстов резольвенты неприводимых представлений через свободные поля имели “линейную” структуру, подобно резольвенте Фельдера [2] (так называемые двусторонние резольвенты [3–5]). Это относится и к резольвенте из [1], хотя она и не является фельдеровской. Наличие “бозонизации” [6–8] $N = 2$ алгебры, в которой возникают *два* фермионных экранирующих оператора, позволяет предполагать некоторую другую структуру резольвенты, в которой стрелки различного типа отвечали бы двум различным экранирующим операторам. Такая резольвента и строится в данной работе. Она имеет структуру, из-за которой мы называем ее “ба-

*Отделение теоретической физики им. И. Е. Тамма, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Россия

бочкой” (butterfly resolution):

Задача о кохомологиях для этой резольвенты также решается, и оказывается, что кохомологии сосредоточены в единственном модуле (левом “глазу”) и даются унитарным $N = 2$ представлением (теорема 3.1 ниже). Путем “сминания крыльев” резольвента-бабочка переходит в двустороннюю резольвенту из работы [1] (а после складывания “крыльев” – в “массивную” резольвенту из [9], как объясняется в дальнейшем).

С более общей точки зрения различные реализации в терминах свободных полей являются частными случаями трехбозонной реализации $N = 2$ (или $\widehat{sl}(2)$) алгебры. Анализ резольвенты для общей трехбозонной реализации, который мы не ставим здесь своей целью, должен включать случаи, когда имеются:

- 1) бозонный и фермионный экранирующие операторы, образующие нильпотентную подалгебру квантовой группы $sl(2|1)_q$, и еще один бозонный экранирующий оператор, коммутирующий с первыми двумя;
- 2) два фермионных экранирующих оператора и еще один бозонный, не являющийся вертексным оператором.

Что касается “ $sl(2|1)_q$ -пары” в случае 1, то мы надеемся рассмотреть ее в будущем, в то время как коммутирующие друг с другом бозонный и фермионный экранирующие операторы приводят в конце концов к резольвенте типа фельдеровской, поскольку фермионный экранирующий оператор выделяет $\beta\gamma$ -систему, после чего бозонный экранирующий оператор действует, как в работах [3, 4]. Случай 2 не изучен в должной общности, но рассматриваемая нами резольвента является важным частным случаем – случаем интегрируемых представлений, когда фермионные экранирующие операторы коммутируют друг с другом.

Мы широко пользуемся обозначениями и соглашениями работы [1], ссылаясь на формулы оттуда как (I- $s.n$) и на разделы как I- s , где $s \in \{1, 2, 3, 4, 5, \text{П}\}$ и $n \in \mathbb{N}$. Это позволяет нам сразу перейти в разделе 2 к интересующей нас реализации $N = 2$ алгебры через свободные поля (которую мы называем *симметричной*, поскольку фермионные операторы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{Q}$ выражаются через свободные поля почти симметричным образом). В разделе 3 описывается построение резольвенты, а в разделе 4 устанавливаются ее свойства (в частности, связь с резольвентой из [1]), позволяющие найти ее кохомоло-

гии. Мы напомним только коммутационные соотношения $N = 2$ алгебры:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] &= (m - n)\mathcal{L}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n] &= \frac{c}{3}m\delta_{m+n,0}, \\
[\mathcal{L}_m, \mathcal{G}_n] &= (m - n)\mathcal{G}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{G}_n] &= \mathcal{G}_{m+n}, \\
[\mathcal{L}_m, \mathcal{Q}_n] &= -n\mathcal{Q}_{m+n}, & [\mathcal{H}_m, \mathcal{Q}_n] &= -\mathcal{Q}_{m+n}, \\
[\mathcal{L}_m, \mathcal{H}_n] &= -n\mathcal{H}_{m+n} + \frac{c}{6}(m^2 + m)\delta_{m+n,0}, \\
\{\mathcal{G}_m, \mathcal{Q}_n\} &= \mathcal{L}_{m+n} - n\mathcal{H}_{m+n} + \frac{c}{6}(m^2 + m)\delta_{m+n,0}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

(где $m, n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{H}_n$ – бозоны, а $\mathcal{G}_n$ и $\mathcal{Q}_n$ – фермионы и $c = 3(1 - 2/p)$ – центральный заряд).

2. “СИММЕТРИЧНАЯ” РЕАЛИЗАЦИЯ

Рассмотрим реализацию $N = 2$ алгебры из работ [6–8], которая принимает следующий вид в обозначениях, соответствующих (1.2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(z) &= C(z)A(z) - \partial C(z), \\
\mathcal{Q}(z) &= B(z)\bar{A}(z) - \frac{1}{p}\partial B(z), \\
\mathcal{H}(z) &= \bar{A}(z) - \frac{1}{p}A(z) - B(z)C(z), \\
\mathcal{T}(z) &= \partial B(z)C(z) + \bar{A}(z)A(z) - \partial \bar{A}(z).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь операторные произведения свободных полей заданы соотношениями

$$\bar{A}(z)A(w) = \frac{1}{(z-w)^2}, \quad B(z)C(w) = \frac{1}{z-w} \tag{2.2}$$

и обозначено $\partial = \partial/\partial z$. Разложение по модам имеет вид

$$\begin{aligned}
A(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n z^{-n-1}, & \bar{A}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{A}_n z^{-n-1}, \\
B(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n z^{-n}, & C(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n z^{-n-1}.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 2.1. $N = 2$ спектральный поток индуцируется следующими преобразованиями свободных полей, входящих в (2.1):

$$\begin{aligned}
C_n &\mapsto C_{n+\theta}, & A_n &\mapsto A_n + \theta\delta_{n,0}, \\
B_n &\mapsto B_{n-\theta}, & \bar{A}_n &\mapsto \bar{A}_n - \frac{\theta}{p}\delta_{n,0}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается непосредственно; единственным заслуживающим упоминания обстоятельством является то, что при указанных преобразованиях составные BC -операторы приобретают дополнительные вклады, происходящие из нормального переупорядочения (которое опускается в обозначениях):

$$(BC)_n \mapsto (BC)_n - \theta \delta_{n,0}, \quad (\partial B C)_n \mapsto (\partial B C)_n - \theta(BC)_n + \frac{\theta^2 + \theta}{2} \delta_{n,0}. \quad (2.4)$$

Имеются два фермионных экранирующих оператора

$$S_B = \frac{1}{2\pi i} \oint B e^X, \quad S_C = \frac{1}{2\pi i} \oint C e^{p\bar{X}}, \quad (2.5)$$

где $\partial X = A$ и $\partial \bar{X} = \bar{A}$. Очевидно, что экранирующие операторы не меняются при преобразованиях (2.3).

Введем теперь модули над этими свободными полями. Пусть $\Lambda = \Lambda_0(0)$ обозначает BC -модуль, порожденный из $|0\rangle_{BC}$ (см. (I-3.9) и (I-3.11), где теперь $\lambda = 0$). Пусть состояние $|\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A}$ таково, что

$$\bar{A}_0 |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A} = \bar{a} |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A}, \quad A_0 |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A} = a |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A}, \quad (2.6)$$

$$\bar{A}_{\geq 1} |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A} = A_{\geq 1} |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A} = 0, \quad (2.7)$$

и пусть $\mathfrak{H}_{\bar{a},a}$ — фоковский модуль, порожденный из $|\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A}$. Определим пространство представления свободных полей

$$\mathbb{G}_{r,p} = \Lambda \otimes \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{H}_{n,mp+r-1}. \quad (2.8)$$

Именно в нем мы выделим унитарное представление $\mathfrak{K}_{r,p;0}$. Другие представления $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ будут получаться применением спектрального потока в соответствии с (2.3).

Обозначения для $N = 2$ модулей. Подобно принятым в п. I-3.3 соглашениям, $\tilde{\mathfrak{H}}_{h,\ell,p;\theta}(M, \bar{a}, a)$ обозначает модуль, порожденный из $|M\rangle_{BC} \otimes |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A} \in \mathbb{G}_{r,p}$ в случае, когда $|M\rangle_{BC} \otimes |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A} \doteq |h, \ell, p; \theta\rangle$ (знак $\doteq$ означает, что состояние $|M\rangle_{BC} \otimes |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A}$ удовлетворяет твистованным массивным условиям старшего веса (I-П.10)–(I-П.12)), а $\tilde{\mathfrak{H}}_{h,p;\theta}(M, \bar{a}, a)$ обозначает такой модуль в случае, когда $|M\rangle_{BC} \otimes |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A} \doteq |h, p; \theta\rangle_{\text{top}}$. Мы иногда будем опускать аргументы $(M, \bar{a}, a)$, вместо этого явно указывая, из каких векторов порождается данный модуль. Заметим, что нам встретятся $N = 2$ модули, которые не порождаются из одного вектора.

В пространстве $\mathbb{G}_{r,p}$ возьмем состояние $|0\rangle_{BC} \otimes |0, r-1\rangle_{\bar{A}A}$, которое удовлетворяет топологическим (нетвистованным) условиям старшего веса по отношению к $N = 2$ генераторам (2.1):

$$|0\rangle_{BC} \otimes |0, r-1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{1-r}{p}, p \right\rangle_{\text{top}}. \quad (2.9)$$

3. РЕЗОЛЬВЕНТА-БАБОЧКА

Пусть $\tilde{\mathfrak{Y}}_{\frac{1-r}{p},p}(0,0,r-1)$ есть $N=2$ модуль, порожденный из (2.9). Он является подмодулем в “центральной” члене $\odot$ (где и сконцентрированы когомологии) в *резольвенте-бабочке*¹⁾:

(3.1)

Модули на правом крыле имеют вид $\tilde{\mathfrak{Y}}_{\frac{r+1}{p}-n-m,0,p;np-r}(np-r,-m,r-np-1)$ и нумеруются натуральными числами m и n , где n нумерует столбцы ($n=1$ для самого левого столбца), а m – строки ($m=1$ для верхней строки). На левом крыле модули нумеруются неотрицательными целыми m и n , причем $m=0$ соответствует нижней строке, а $n=0$ – правому столбцу. Каждый (m,n) -модуль есть результат склейки модулей, порожденных из состояний $|-r-np\rangle_{BC} \otimes |m,np+r-1\rangle_{\bar{A}A}$ и $|mp+1\rangle_{BC} \otimes |m,np+r-1\rangle_{\bar{A}A}$. В частности, $\odot$ -модуль получен склейкой $N=2$ модулей, порожденных из векторов $|-r\rangle_{BC} \otimes |0,r-1\rangle_{\bar{A}A}$ и $|1\rangle_{BC} \otimes |0,r-1\rangle_{\bar{A}A}$, у которых имеется общий подмодуль, порожденный из вектора (2.9).

ТЕОРЕМА 3.1. *Диаграмма (3.1), состоящая из $N=2$ представлений на $\mathbb{G}_{r,p}$, является точной везде, кроме $\odot$ -модуля, который порожден из векторов $|-r\rangle_{BC} \otimes |0,r-1\rangle_{\bar{A}A}$ и $|1\rangle_{BC} \otimes |0,r-1\rangle_{\bar{A}A}$. Когомологии в этом члене даются унитарным $N=2$ представлением $\mathfrak{K}_{r,p}$.*

¹⁾ Или, быть может (после поворота на 135°), в “песочных часах”.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Мы произвольным образом выбрали целое число r из интервала $1 \leq r \leq p - 1$ и определили зависящее от r пространство $\mathbb{G}_{r,p}$. Рассматривая вместо этого пространство

$$\mathbb{G}_{*,p} = \Lambda \otimes \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{H}_{n,m}, \quad (3.2)$$

получаем когомологии $\bigoplus_{r=1}^{p-1} \mathfrak{K}_{r,p}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. $N = 2$ спектральный поток действует на состояниях из $\mathbb{G}_{*,p}$ как

$$|n\rangle_{BC} \otimes |\bar{a}, a\rangle_{\bar{A}A} \mapsto |n + \theta\rangle_{BC} \otimes \left| \bar{a} + \frac{\theta}{p}, a - \theta \right\rangle_{\bar{A}A}. \quad (3.3)$$

Это позволяет применить спектральный поток к данным из теоремы 3.1 (с подвергнутому соответствующему отображению пространством $\mathbb{G}_{r,p}$) с тем, чтобы получить все унитарные представления $\mathfrak{K}_{r,p;\theta}$ из раздела I-2. Поэтому мы без потери общности можем работать с выбранным значением твиста (и тем самым с указанным выше пространством $\mathbb{G}_{r,p}$), фиксированным нашим выбором состояния (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Конструкция резольвенты основана на заряженных особых векторах (I-П.14) и на топологических особых векторах (I-П.5) и (I-П.6) (соответствующих значению $s = 1$). В реализации свободных полей эти особые векторы могут обращаться в нуль. В этом случае оказывается возможным найти коособый вектор в той же градуировке. Если же особый вектор не равен нулю, то мы рассмотрим соответствующий подмодуль и найдем уже в нем подобные особые векторы. Для состояния (2.9) и для других возникающих в процессе построения состояний старшего веса мы находим условия аннигиляции, которым они удовлетворяют. Эти условия могут оказаться или твистованными топологическими условиями старшего веса (I-П.1), или же только твистованными массивными условиями старшего веса (I-П.11). Далее мы вычисляем (используя (I-П.2), (I-П.3) или (I-П.11)) собственные значения соответствующих картановских генераторов, ищем особые векторы и исследуем, какие из (под)модулей лежат в образе или в ядре экранирующих операторов. Действие экранирующих операторов на состояния из $\mathbb{G}_{r,p}$ определяется с помощью элементарных вычислений в конформной теории поля.

Середина диаграммы. Начнем с состояния (2.9) и соответствующего $N = 2$ модуля $\tilde{\mathfrak{H}}_{\frac{1-r}{p},p}(0, 0, r - 1)$. Вычисляя в этом модуле особый вектор $|E(r, 1, p)\rangle^+$ (см. (I-П.4), (I-П.5)), видим, что он равен нулю. Из-за этого состояние $|1 - r\rangle_{BC} \otimes |0, r - 1\rangle_{\bar{A}A}$ удовлетворяет твистованному *топологическому* условию старшего веса

$$|1 - r\rangle_{BC} \otimes |0, r - 1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{r+1}{p} - 1, p; -r \right\rangle_{\text{top}}. \quad (3.4)$$

Заметим теперь, что вектор (3.4) лежит в образе оператора S_B :

$$|1 - r\rangle_{BC} \otimes |0, r - 1\rangle_{\bar{A}A} = S_B | -r\rangle_{BC} \otimes | -1, r - 1\rangle_{\bar{A}A},$$

где мы имеем

$$|-r\rangle_{BC} \otimes |-1, r-1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{r+1}{p} - 1, 0, p; -r \right\rangle.$$

В модуле $\tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-1, 0, p; -r}$, порожденном из $|-r\rangle_{BC} \otimes |-1, r-1\rangle_{\bar{A}A}$, имеется заряженный особый вектор

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{-p} \dots \mathcal{G}_{-r-1} |-r\rangle_{BC} \otimes |-1, r-1\rangle_{\bar{A}A} &= |-p\rangle_{BC} \otimes |-1, r-1\rangle_{\bar{A}A} = \\ &= S_C |1-p\rangle_{BC} \otimes |-1, r-p-1\rangle_{\bar{A}A}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Возникающий таким образом вектор $|1-p\rangle_{BC} \otimes |-1, r-p-1\rangle_{\bar{A}A}$ порождает модуль $\tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-2, 0, p; p-r}(p-r, -1, r-p-1)$, который и дает ($m=1$, $n=1$) модуль из тех, что заполняют правое крыло. Заметим, что мы могли бы совершенно эквивалентным образом прийти к тому же модулю, сначала обратив внимание на тот факт, что $|0\rangle_{BC} \otimes |0, r-1\rangle_{\bar{A}A} = S_C |1\rangle_{BC} \otimes |0, r-p-1\rangle_{\bar{A}A}$, где, далее, $\mathcal{Q}_{r-p} \dots \mathcal{Q}_{-1} |1\rangle_{BC} \otimes |0, r-p-1\rangle_{\bar{A}A} = |p-r+1\rangle_{BC} \otimes |0, r-p-1\rangle_{\bar{A}A} = S_B |p-r\rangle_{BC} \otimes |-1, r-p-1\rangle_{\bar{A}A}$, причем $|p-r\rangle_{BC} \otimes |-1, r-p-1\rangle_{\bar{A}A}$ и $|1-p\rangle_{BC} \otimes |-1, r-p-1\rangle_{\bar{A}A}$ являются потомками друг друга. Центральная стрелка в (3.1) определяется, таким образом, как $S_B \circ S_C$ (что совпадает с $S_C \circ S_B$ с точностью до не существенного для нас знака).

Правое крыло бабочки. Припишем левому столбцу номер $n=1$, а верхней строке $-m=1$. Тогда модуль в столбце n и строке m , равный

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-n-m, 0, p; np-r}(np-r, -m, r-np-1) &= \\ &= \tilde{\mathfrak{U}}_{n+m-\frac{r+1}{p}, n+m-\frac{r+1}{p}, p; 1-mp}(1-mp, -m, r-np-1), \end{aligned} \quad (3.6)$$

порождается любым из векторов

$$|np-r\rangle_{BC} \otimes |-m, r-np-1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{r+1}{p} - m - n, 0, p; np-r \right\rangle$$

или

$$|1-mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r-np-1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| n+m-\frac{r+1}{p}, n+m-\frac{r+1}{p}, p; 1-mp \right\rangle.$$

Заметим что равенство в (3.6) имеет место вследствие соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{-np+r+1} \dots \mathcal{Q}_{mp-1} |1-mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r-np-1\rangle_{\bar{A}A} &= \\ &= |np-r\rangle_{BC} \otimes |-m, r-np-1\rangle_{\bar{A}A}, \\ |1-mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r-np-1\rangle_{\bar{A}A} &= \\ &= \mathcal{G}_{1-mp} \dots \mathcal{G}_{np-r-1} |np-r\rangle_{BC} \otimes |-m, r-np-1\rangle_{\bar{A}A} \end{aligned}$$

(которые выполняются с точностью до ненулевых множителей), и поэтому состояния $|1-mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r-np-1\rangle_{\bar{A}A}$ и $|np-r\rangle_{BC} \otimes |-m, r-np-1\rangle_{\bar{A}A}$ порождают один и тот же модуль.

Экстремальные диаграммы модулей, отображаемых посредством экранирующих операторов.

Далее, прямые вычисления показывают, что векторы

$$\mathcal{G}_{-mp} |1 - mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r - np - 1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| n + m + \frac{1-r}{p}, p; -mp \right\rangle_{\text{top}}$$

и

$$\mathcal{Q}_{r-np} |np - r\rangle_{BC} \otimes |-m, r - np - 1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{r+1}{p} - n - m - 1, p; np - r \right\rangle_{\text{top}}$$

являются заряженными особыми векторами в модуле (3.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{-mp} |1 - mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r - np - 1\rangle_{\bar{A}A} &\in \tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p} - m - n, 0, p; np - r} \ni \\ &\ni \mathcal{Q}_{r-np} |np - r\rangle_{BC} \otimes |-m, r - np - 1\rangle_{\bar{A}A} \\ \parallel &\parallel \\ | -mp \rangle_{BC} \otimes | -m, r - np - 1 \rangle_{\bar{A}A} &| 1 + np - r \rangle_{BC} \otimes | -m, r - np - 1 \rangle_{\bar{A}A} \\ \parallel &\parallel \\ S_C |1 - mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r - (n+1)p - 1\rangle_{\bar{A}A} &S_B |np - r\rangle_{BC} \otimes |-m - 1, r - np - 1\rangle_{\bar{A}A}. \end{aligned}$$

Находя для векторов $|1 - mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r - (n+1)p - 1\rangle_{\bar{A}A}$ и $|np - r\rangle_{BC} \otimes |-m - 1, r - np - 1\rangle_{\bar{A}A}$ условия аннигиляции и собственные значения, мы видим, что проделанные выше шаги применимы и к модулям, порожденным из этих векторов: каждый из них имеет два заряженных особых вектора, которые лежат в точности в образе одного из экранирующих операторов.

“Перекрестные” комбинации двух экранирующих операторов получаются повторением тех же вычислений еще дважды. Это показано на рисунке, а результатом является существование отображений

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow S_B & & \uparrow S_B & & \\
 \cdots & \xleftarrow{S_C} & \tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-n-m,0,p;np-r} & \xleftarrow{S_C} & \tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-n-m-1,0,p;(n+1)p-r} & \xleftarrow{S_C} & \cdots \\
 & & \uparrow S_B & & \uparrow S_B & & \\
 \cdots & \xleftarrow{S_C} & \tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-n-m-1,0,p;np-r} & \xleftarrow{S_C} & \tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-n-m-2,0,p;(n+1)p-r} & \xleftarrow{S_C} & \cdots, \\
 & & \uparrow S_B & & \uparrow S_B & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array} \quad (3.7)$$

которые и составляют узор, заполняющий правое крыло бабочки. На рисунке для краткости опущены знаки тензорного умножения и индексы, обозначающие различные кет-векторы. Жирные точки изображают состояния, которые *отображаются в* заряженные особые векторы под действием экранирующих операторов. Стрелки с надписями $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{G}$ задают заряженные особые векторы. Пунктирная линия, проведенная в одном из случаев, показывает экстремальную диаграмму фактор-модуля по соответствующему особому вектору. Соответствующий подмодуль лежит в ядре экранирующего оператора, так что пунктирная линия отображается в экстремальную диаграмму подмодуля.

Левое крыло бабочки. Пронумеруем модули на левом крыле неотрицательными целыми m и n так, что $m = 0$ соответствует нижней строке, а $n = 0$ – вертикальной границе. Модуль в положении (m, n) получен склейкой модулей, порожденных из

$$|-r - np\rangle_{BC} \otimes |m, np + r - 1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{r+1}{p} + m + n, 0, p; -r - np \right\rangle \quad (3.8)$$

и

$$\begin{aligned}
 & |mp + 1\rangle_{BC} \otimes |m, np + r - 1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \\
 & \doteq \left| -\frac{r+1}{p} - m - n, -\frac{r+1}{p} - m - n, p; mp + 1 \right\rangle.
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Склейка основана на том факте, что в модуле, порожденном из (3.8), имеется подмодуль, порожденный из особого вектора

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_{r+np}|-r - np\rangle_{BC} \otimes |m, np + r - 1\rangle_{\bar{A}A} &= |1 - r - np\rangle_{BC} \otimes |m, np + r - 1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \\
 &\doteq \left| \frac{r+1}{p} + m + n - 1, p; -r - np \right\rangle_{\text{top}},
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

и что $tot\ же$ подмодуль порождается также из особого вектора

$$\mathcal{G}_{mp}|mp+1\rangle_{BC} \otimes |m, np+r-1\rangle_{\bar{A}A} = |mp\rangle_{BC} \otimes |m, np+r-1\rangle_{\bar{A}A} \quad (3.11)$$

в модуле, порожденном из (3.9), поскольку состояния $|1-r-np\rangle_{BC} \otimes |m, np+r-1\rangle_{\bar{A}A}$ и $|mp\rangle_{BC} \otimes |m, np+r-1\rangle_{\bar{A}A}$ являются потомками друг друга.

Применяя экранирующие операторы, получаем

$$\begin{aligned} S_B |-r-np\rangle_{BC} \otimes |m, np+r-1\rangle_{\bar{A}A} &= |1-r-np\rangle_{BC} \otimes |m+1, np+r-1\rangle_{\bar{A}A} = \\ &= \mathcal{Q}_{r+np} |-r-np\rangle_{BC} \otimes |m+1, np+r-1\rangle_{\bar{A}A} \end{aligned} \quad (3.12)$$

и

$$\begin{aligned} S_C |mp+1\rangle_{BC} \otimes |m, np+r-1\rangle_{\bar{A}A} &= |mp\rangle_{BC} \otimes |m, (n+1)p+r+1\rangle_{\bar{A}A} = \\ &= \mathcal{G}_{mp}|1+mp\rangle_{BC} \otimes |m, (n+1)p+r+1\rangle_{\bar{A}A}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

откуда видно, что узор (3.8)–(3.11) воспроизводится в (3.12) и (3.13) с соответствующими заменами $m \mapsto m+1$ и $n \mapsto n+1$. В модуле, порожденном из (3.8) и (3.9), $\text{Ker } S_B$ порождается из (3.9), а $\text{Ker } S_C$ – из (3.8), причем $\text{Ker } S_B \cap \text{Ker } S_C$ – подмодуль, порожденный из (3.10). Таким образом заполняется все левое крыло (узор которого оказывается в очевидном смысле двойственным узору правого крыла).

Напомним теперь стандартный факт, состоящий в том, что всякая горизонтальная или вертикальная последовательность отображений, осуществляемых *одним* фермионным экранирующим оператором, представленным в виде *вершинного оператора*, точна (кроме, очевидно, границы крыла, если последовательность продолжается посредством $\cdots \rightarrow 0$ или $0 \rightarrow \cdots$). Таким образом, отображения точны везде, кроме угла. Центральное отображение дается произведением двух экранирующих операторов. Когомологии определяются исходя из того, что $\text{Im } S_B = \text{Im } S_C = \tilde{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}, p}(0, 0, r-1)$, а $\text{Im } S_B \circ S_C$ – максимальный подмодуль в $\tilde{\mathfrak{V}}_{\frac{1-r}{p}, p}(0, 0, r-1)$. Более экономный способ, приводящий к тому же результату, состоит в том, чтобы отобразить резольвенту-бабочку в двустороннюю резольвенту (I-3.18), как это описано в следующем разделе.

4. СМИНЕНИЕ БАБОЧКИ В ДВУСТОРОННЮЮ РЕЗОЛЬВЕНТУ

Как известно [10], ядро или коядро фермионного экранирующего оператора порождает $\beta\gamma$ -систему. Мы используем это применительно к резольвенте-бабочке, в результате чего возникнет в точности $\beta\gamma$ -система из раздела I-3 (а резольвента-бабочка превратится в “линейную” двустороннюю резольвенту (I-3.18)). В самом деле, определим фермионную систему первого порядка

$$\eta = C e^{p\bar{X}}, \quad \xi = B e^{-p\bar{X}}, \quad (4.1)$$

а также введем два скаляра ϕ и φ с сигнатурами -1 и $+1$:

$$\partial\phi = BC + \frac{1}{p}A - p\bar{A}, \quad \partial\varphi = BC + \frac{1}{p}A. \quad (4.2)$$

Второй скаляр представляет фермионную bc -систему из (I-4.16). Взяв теперь η , ξ и ϕ из (4.1), (4.2), мы введем бозонную систему первого порядка в соответствии с (I-4.20). Тогда $N = 2$ генераторы (2.1) переписутся через эти (b, c, β, γ) -поля как

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{p}\beta c, \quad \mathcal{G} = (p-1)b\partial\gamma - \gamma\partial b, \quad (4.3)$$

что отличается от соответствующих генераторов в (I-3.4) только заменами $\mathcal{Q} \mapsto p\mathcal{Q}$, $\mathcal{G} \mapsto \frac{1}{p}\mathcal{G}$, не меняющими коммутационных соотношений (а вся остальная $N = 2$ алгебра порождается операторами $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{G}$). Экранирующий оператор S_C становится теперь просто оператором η_0 , который “редуцирует” $\eta\xi\phi$ -модуль к $\beta\gamma$ -модулю путем устранения ξ_0 -моды. Второй фермионный экранирующий оператор при этом принимает вид

$$S_B = \frac{1}{2\pi i} \oint c\gamma^{p-1},$$

что совпадает с оператором $\mathbb{Q}_0$ из раздела I-3.

Резольвенту-бабочку можно отобразить на двустороннюю резольвенту (I-3.18) путем сминания ее крыльев таким образом, что остаются только S_B -отображения. Рассмотрим сначала правое крыло. В нем сохраним только вертикальную границу (см. (3.1)) и возьмем фактор по образу S_C в каждом модуле. В результате остается только $bc\beta\gamma$ -модуль (т.е. когомологии последовательности $0 \xleftarrow{S_C} \dots \xleftarrow{S_C} \dots$). Полагая в (3.6) $n = 1$, мы получаем отображения

$$\tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-m-1,0,p;p-r}(p-r, -m, r-p-1) \xrightarrow{S_B} \tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-m,0,p;p-r}(p-r, -m+1, r-p-1). \quad (4.4)$$

С другой стороны, образ оператора S_C является подмодулем в $\tilde{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}-m-1,0,p;p-r}(p-r, -m, r-p-1)$, порожденным из вектора

$$|-mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r-p-1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{1-r}{p} + m, p; -p \right\rangle_{\text{top}}. \quad (4.5)$$

При этом фактор-модуль порожден из вектора

$$|1-mp\rangle_{BC} \otimes |-m, r-p-1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{1-r}{p} + m, p; -mp \right\rangle_{\text{top}}, \quad (4.6)$$

где $\doteq$ выполнено в факторе, т.е. по модулю вектора (4.5). Таким образом, отображение (4.4) индуцирует последовательность

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{S_B} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{1-r}{p}+m+1,p;-(m+1)p}(1-(m+1)p, -m-1, r-p-1) \xrightarrow{S_B} \\ &\xrightarrow{S_B} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{1-r}{p}+m,p;-mp}(1-mp, -m, r-p-1) \xrightarrow{S_B} \dots \xrightarrow{S_B} \\ &\xrightarrow{S_B} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{1-r}{p}+1,p;0}(1-p, -1, r-p-1), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\widehat{\mathfrak{V}}$ – модули, в которых профакторизовано по особому вектору $\mathcal{G}_{-mp} |1 - mp\rangle_{BC} \otimes | -m, r - p - 1\rangle_{\bar{A}A}$ (см. левый верхний угол экстремальной диаграммы на рисунке).

На левом крыле возьмем модули на вертикальной границе ($n = 0$ в (3.8), (3.9)) и оставим в них только ядра оператора S_C (т.е. кохомологии последовательности $0 \xrightarrow{S_C} \dots \xrightarrow{S_C} \dots$). Ядро S_C порождается из вектора

$$| -r\rangle_{BC} \otimes |m, r - 1\rangle_{\bar{A}A} \doteq \left| \frac{r+1}{p} + m, 0, p; -r \right\rangle, \quad m \geq 0. \quad (4.8)$$

Обозначая этот модуль через $\widehat{\mathfrak{U}}_{m+\frac{r+1}{p}, 0, p; -r}(-r, m, r - 1)$, получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}, 0, p; -r}(-r, 0, r - 1) &\xrightarrow{S_B} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}+1, 0, p; -r}(-r, 1, r - 1) \xrightarrow{S_B} \\ &\xrightarrow{S_B} \widehat{\mathfrak{U}}_{\frac{r+1}{p}+2, 0, p; -r}(-r, 2, r - 1) \xrightarrow{S_B} \dots, \end{aligned} \quad (4.9)$$

что позволяет продолжить последовательность (4.7). Тем самым воспроизводится комплекс (I-3.18), подвергнутый спектральному потоку на $\theta = 1 - r$.

Возвращаясь к резольвенте-бабочке, мы видим, что ее кохомологии являются унитарным $N = 2$ представлением.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Заметим, что *бозонный* экранирующий оператор реализации (2.1)

$$S_W = \frac{1}{2\pi i} \oint (p\bar{A} - BC) e^{-\frac{1}{p}X - \bar{X}} \quad (4.10)$$

теперь принимает вид (I-4.21). Этот оператор *не* участвует в построении резольвент в данной статье.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. После отображения в представление Вакимото экранирующий оператор

$$S_C = \frac{1}{2\pi i} \oint \eta,$$

как и раньше, служит для корректного определения пространства представления бозонной системы первого порядка, на этот раз $\beta\gamma$ -системы из [1] (таким образом, этот оператор становится ненужным, коль скоро построение проводится в терминах самих полей β и γ , а не их бозонизации). С другой стороны, фермионный экранирующий оператор S_B принимает вид (I-4.23) (отметим здесь восстановление, наконец-то, “стандартной” вертексной формы этого оператора).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнивая двустороннюю “линейную” резольвенту для унитарных $N = 2$ представлений из статьи [1] и бабочку, мы видим, конечно, “сильную зависимость” вида резольвенты от выбранных свободных полей. В действительности форма резольвенты в значительной степени определяется квантовой группой, закодированной в структуре экранирующих операторов.

Что касается резольвенты-бабочки, ее форму можно полуэвристически объяснить как эффект “фельдеровского типа,” происходящий в “3, 5, 7, ...”-резольвенте неприводимых $N = 2$ представлений [9]. Эти резольвенты строятся из твистованных *массивных* модулей Верма (см. определение I-П.2) и выглядят как

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \bullet & & \\
 & & & \bullet & \bullet & & \\
 0 \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow \dots
 \end{array} \quad (5.1)$$

Складывая (несколько несимметричным образом) крылья бабочки в (1.1), получаем как раз структуру (5.1). Можно говорить поэтому, что $bc\beta\gamma$ -реализация $N = 2$ модулей “выворачивает наизнанку” некоторые из отображений в (5.1), что и дает (1.1). Резольвенту Фельдера тоже можно рассматривать подобным образом, когда “косичка” вида (I-П.9) становится бесконечной линией, а когомологии концентрируются в середине. Этому можно придать и точный смысл [4]. Интересным вопросом в связи с этим является построение “промежуточных” модулей, интерполирующих между “3, 5, 7, ...”-резольвентой и бабочкой.

Аналогичная резольвента-бабочка для унитарных представлений алгебры $\widehat{sl}(2)$ состоит из твистованных (подвергнутых спектральному потоку) модулей Вакимото. Картины [10] $\beta\gamma$ -системы из [1] оказываются различными для различных модулей, так что эту резольвенту можно рассматривать как пример резольвенты, относящейся к трехбозонной реализации, получаемой дополнительной бозонизацией входящих в представление Вакимото $\beta\gamma$ -полей.

Заметим, что унитарные $N = 2$ представления характеризуются соотношением

$$\partial^{p-2}\mathcal{G}(z) \dots \partial\mathcal{G}(z) \mathcal{G}(z) = 0. \quad (5.2)$$

Это дает альтернативный способ показать, что когомологии являются суммой унитарных представлений: достаточно проверить действие $N = 2$ алгебры и убедиться, что формула (5.2) удовлетворяется (в $bc\beta\gamma$ -реализации, например, это условие выполнено, поскольку поле $\gamma(z)$ удовлетворяет в когомологиях соотношению $\gamma^{p-1} = 0$). С точки зрения моделей Гинзбурга–Ландау соотношение (5.2) обнаруживает формальную связь с невозмущенными A_{p-1} -уравнениями движения $X^{p-1} = 0$ (см. (I-3.2)). Можно развить эту аналогию, вспомнив, что киральное кольцо в теории Гинзбурга–Ландау порождено элементами $1, X, \dots, X^{p-2}$; унитарное же представление $N = 2$ алгебры можно породить действием *только* мод $\mathcal{G}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, подчиненных связи, следующей из (5.2), без участия каких бы то ни было других $N = 2$ генераторов [11].

Благодарности. Эта работа частично поддержана грантом РФФИ № 98-01-01155 и грантом № 99-15-96037 Президента Российской Федерации.

Список литературы

- [1] *A. M. Семухатов*. ТМФ. 1999. Т. 121. № 1. С. 89.
- [2] *G. Felder*. Nucl. Phys. B. 1989. V. 317. P. 215; E: B. 1989. V. 324. P. 548.
- [3] *D. Bernard, G. Felder*. Commun. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 145.
- [4] *B. L. Feigin, E. V. Frenkel*. Representations of Affine Kac–Moody Algebras and Bosonization. In: Physics and Mathematics of Strings. Memorial Volume for Vadim Knizhnik. Eds. L. Brink, D. Friedan, A. M. Polyakov. Singapore: World Sci., 1993; *B. L. Feigin, E. V. Frenkel*. Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 161.
- [5] *P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch*. Commun. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 125.
- [6] *G. Mussardo, G. Sotkov, M. Stanishkov*. Int. J. Mod. Phys. A. 1989. V. 4. P. 1135.
- [7] *N. Ohta, H. Suzuki*. Nucl. Phys. B. 1990. V. 332. P. 146.
- [8] *K. Ito*. Phys. Lett. B. 1991. V. 259. P. 73; Nucl. Phys. B. 1992. V. 370. P. 123.
- [9] *B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, V. A. Sirota, I. Yu. Tipunin*. Nucl. Phys. B. 1999. V. 536. P. 617; hep-th/9805179.
- [10] *D. H. Friedan, E. J. Martinec, S. H. Shenker*. Nucl. Phys. B. 1986. V. 271. P. 93.
- [11] *B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin*. A Semi-Infinite Realization of Unitary Representations of the $N = 2$ Superconformal Algebra (в работе).

Поступила в редакцию 14.V.1999 г.