Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Польшин, Обобщенные когерентные состояния для массивных бесспиновых полей в пространстве де Ситтера, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 2, 258–263

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:21:51

© 1999 г.

С. А. Польшин*

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ МАССИВНЫХ БЕСПИНОВЫХ ПОЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ СИТТЕРА

При помощи конформного действия группы де Ситтера $SO(4, 1)$ на трехмерном евклидовом пространстве построены две различные системы обобщенных когерентных состояний для группы де Ситтера, имеющие физический смысл частиц и античастиц в пространстве де Ситтера. Скалярное произведение двух когерентных состояний является двухточечной функцией в пространстве де Ситтера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные когерентные состояния (КС) для произвольной группы Ли, впервые введенные в работе [1], хорошо зарекомендовали себя при решении многих физических задач. Пусть некоторое представление группы Ли $\mathcal{G}$ действует на некотором линейном векторном пространстве H . Рассмотрим подгруппу $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ и выберем по одному представителю $g_\xi \in \mathcal{G}$ в каждом классе смежности $\xi \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Тогда система КС будет получаться при действии преобразований в H , соответствующих преобразованиям g_ξ для произвольных ξ , на некоторый H -инвариантный с точностью до фазы вектор $|\psi_0\rangle \in H$. Важнейшим свойством системы КС является ее инвариантность относительно некоторого представления группы $\mathcal{G}$, действующего в пространстве H . Общие свойства систем КС, их построение для конкретных пространств $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ и их различные применения широко исследовались (см. книгу [2] и обзор [3]). Одним из таких применений является $\mathcal{G}$ -инвариантное описание частиц в симметрических пространствах вида $\mathcal{G}/\mathcal{H}'$, где, вообще говоря, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$; наиболее физически важными искривленными симметрическими пространствами являются пространства де Ситтера (дС) 1-го рода $SO(4, 1)/SO(3, 1)$ и 2-го рода $SO(3, 2)/SO(3, 1)$ и их многомерные обобщения вида $SO(p+1, q)/SO(p, q)$. В [2] уже были построены КС для пространства $SO(n, 1)/SO(n)$. В работах [4, 5] рассматривались КС для пространств $SO(3, 2)/SO(3) \times SO(2)$ и $SO(3, 2)/SO(2) \times SO(2)$. Эти КС отвечают квантово-механическому описанию частицы в пространстве дС 2-го рода в рамках картины фазового пространства; аналогичное рассмотрение для двумерного случая проведено в [6].

* Харьковский государственный университет, Харьков, Украина. E-mail: polshin@kink.univer.kharkov.ua

Настоящая работа посвящена построению КС, для которых $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ является пространством дС и которые соответствуют массивным бесспиновым клейн-гордоновским частицам в пространстве дС (так что $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$). Это отождествление проводится при помощи сравнения с “плоскими волнами” для указанного класса частиц в пространстве дС [7]. План настоящей работы следующий. В разделе 2 рассматриваются некоторые свойства группы дС и ее необходимые в дальнейшем представления. В разделе 3 построены две системы КС, связанные с координатами Леметра и отвечающие частицам и античастицам. Показано, что двухточечные функции в пространстве дС, изучавшиеся в работах [7, 8], являются просто скалярным произведением двух КС.

Индексы $\mu, \nu, \dots$ всюду пробегает значения $0, \dots, 3$; индексы $i, k, \dots$ пробегает значения $1, 2, 3$. У 4-векторов индексы могут опускаться; тогда точка “.” обозначает скалярное произведение при помощи галилеева метрического тензора $\eta_{\mu\nu}$; 3-векторы в безиндексных обозначениях выделяются жирным шрифтом.

2. ГРУППА ДЕ СИТТЕРА И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Группой симметрии пространства дС является $\mathcal{G} = SO(4, 1)$ – группа преобразований фиктивного пятимерного вещественного пространства с координатами $x^0, \dots, x^3, x^5$, которые оставляют инвариантной квадратичную форму $(x^5)^2 - \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = R^2$, где введен галилеев метрический тензор $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ и R – радиус пространства дС. Далее мы будем считать, что $x^5 > 0$; тогда координаты x^μ покрывают половину пространства дС. Действие произвольного элемента группы дС $g \in \mathcal{G}$ на пространстве дС мы обозначим через $x \mapsto x_g$. Стационарной подгруппой произвольной точки пространства дС является $\mathcal{H} = SO(3, 1)$, поэтому пространство дС можно отождествить со множеством классов смежности $\mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Обозначим через $J_{5\mu}$ генераторы гиперболических вращений в плоскостях (5μ) и $P_\mu = R^{-1}J_{5\mu}$, тогда коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= R^{-2} J_{\mu\nu}, \\ [P_\mu, J_{\nu\rho}] &= \eta_{\mu\nu} P_\rho - \eta_{\mu\rho} P_\nu, \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}, \end{aligned}$$

причем $J_{\mu\nu}$ являются генераторами подгруппы $\mathcal{H}$. Построим операторы

$$\Pi_i^\pm = P_i \pm \frac{1}{R} J_{0i}. \quad (1)$$

Нетрудно показать, что

$$[\Pi_i^+, \Pi_k^+] = [\Pi_i^-, \Pi_k^-] = 0. \quad (2)$$

Операторы Π^+, Π^-, P^0 и J_{ik} можно взять в качестве нового набора генераторов группы дС; порождаемые ими подгруппы группы дС мы обозначим через $\mathcal{T}^+, \mathcal{T}^-, \mathcal{T}^0$ и $\mathcal{R} =$

$SO(3)$. Заметим, что в силу (2) группы $\mathcal{T}^\pm$ абелевы. Коммутационные соотношения, помимо (2), имеют вид

$$[\Pi_i^+, \Pi_k^-] = -\frac{2}{R}P^0\delta_{ik} + \frac{2}{R^2}J_{ik}, \quad [P^0, J_{ik}] = 0, \quad (3)$$

$$[\Pi_i^\pm, J_{kl}] = \Pi_k^\pm\delta_{il} - \Pi_l^\pm\delta_{ik}, \quad [P^0, \Pi^\pm] = \pm\frac{1}{R}\Pi^\pm. \quad (4)$$

2.1. Скалярное представление. Генераторы скалярного представления суть векторы Киллинга пространства дС:

$$P_\mu = \chi \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad J^{\mu\nu} = (x^\mu \eta^{\nu\sigma} - x^\nu \eta^{\mu\sigma}) \frac{\partial}{\partial x^\sigma}, \quad (5)$$

где $\chi = \sqrt{1 + (x \cdot x)/R^2}$. Поэтому в силу (2) генераторы (1) в скалярном представлении будут производными по некоторым новым координатам:

$$\Pi^\pm = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_\pm}. \quad (6)$$

Таким образом, в пространстве дС можно ввести две различные системы координат Леметра. Подставляя (5) и (6) в правую и левую части равенства (1), соответственно, получаем связь $\mathbf{y}_\pm$ с x^μ . Новую временную координату, не зависящую от $\mathbf{y}_\pm$, мы обозначим через $y_\pm^0 = \tau_\pm$; тогда преобразования от старых координат к новым имеют вид

$$\mathbf{y}_\pm = \mathbf{x} e^{\mp \tau_\pm/R}, \quad e^{\pm \tau_\pm/R} = \chi \pm \frac{x^0}{R}. \quad (7)$$

Оператор P_0 в новых координатах следующий:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial \tau_\pm} \mp \frac{1}{R} \mathbf{y}_\pm \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_\pm}.$$

Конечные преобразования из групп $\mathcal{T}^\pm$ и $\mathcal{T}^0$, которые мы обозначим через $\Theta_\pm$ и Θ_0 , действуют в скалярном представлении следующим образом:

$$g = \Theta_\pm(\mathbf{a}) \equiv \exp(\Pi^\pm \mathbf{a} R) : \quad \begin{cases} \mathbf{y}_\pm \mapsto \mathbf{y}'_\pm = \mathbf{y}_\pm + \mathbf{a} R, \\ \tau_\pm \mapsto \tau'_\pm = \tau_\pm, \end{cases} \quad (8)$$

$$g = \Theta_0(\varepsilon) \equiv \exp(P_0 \varepsilon R) : \quad \begin{cases} \mathbf{y}'_\pm = \mathbf{y}_\pm e^{\mp \varepsilon}, \\ \tau'_\pm = \tau_\pm + \varepsilon R. \end{cases} \quad (9)$$

Мы будем считать, что преобразования действуют справа налево.

2.2. Конформное представление. Группа дС изоморфна группе конформных преобразований вещественного трехмерного пространства, вектор которого мы обозначим через $\mathbf{w}$. Существуют две различные конформные реализации группы дС, одна из которых соответствует выбору верхнего, а другая – нижнего знака в формулах, приведенных в дальнейшем. Генераторы имеют вид

$$\begin{aligned} R\Pi^\mp &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, & R\Pi^\pm &= w^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} - 2\mathbf{w} \left(\mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \right), \\ RP_0 &= \pm \mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, & J_{ik} &= w_k \frac{\partial}{\partial w_i} - w_i \frac{\partial}{\partial w_k}. \end{aligned}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям (2), (3) и (4). Конечные преобразования представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} g &= \Theta_\mp(\mathbf{a}) : \mathbf{w}_g = \mathbf{w} - \mathbf{a}, \\ g &= \Theta_\pm(\mathbf{a}) : \mathbf{w}_g = \frac{\mathbf{w} + \mathbf{a}w^2}{1 + 2\mathbf{w}\mathbf{a} + w^2a^2}, \\ g &= \Theta_0(\varepsilon) : \mathbf{w}_g = \mathbf{w}e^{\pm\varepsilon}. \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что существование конформного представления группы дС является следствием общего утверждения [9], что конформная группа евклидова n -мерного пространства изоморфна $SO(n+1, 1)$.

2.3. Функциональное представление. Определим два различных представления группы дС, действующей на пространстве функций, зависящих от вектора $\mathbf{w}$:

$$T_\sigma^\pm(g)f(\mathbf{w}) = (\alpha_\mathbf{w}^\pm(g))^\sigma f(\mathbf{w}_{g^{-1}}),$$

где $\sigma \in \mathbb{C}$ и

$$\alpha_\mathbf{w}^\pm(g) = \left| \frac{\partial w_{g^{-1}}^i}{\partial w^k} \right|^{-\frac{1}{3}} = \begin{cases} 1, & g \in \mathcal{T}^\mp, \quad g \in \mathcal{R}, \\ e^{\pm\varepsilon}, & g = \Theta_0(\varepsilon), \\ 1 - 2\mathbf{a}\mathbf{w} + a^2w^2, & g = \Theta_\pm(\mathbf{a}), \end{cases}$$

действие группы дС на вектор $\mathbf{w}$ определено при помощи (10). Мы обозначим эти представления через $T_\sigma^\pm$. Легко видеть, что генераторы в этих представлениях имеют вид

$$R\Pi^\mp = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}}, \quad R\Pi^\pm = w^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} - 2\mathbf{w} \left(\mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \right) + 2\sigma\mathbf{w}, \tag{11}$$

$$RP_0 = \pm \left(\mathbf{w} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} - \sigma \right), \quad J_{ik} = w_k \frac{\partial}{\partial w_i} - w_i \frac{\partial}{\partial w_k}. \tag{12}$$

В пространстве представления $T_\sigma^\pm$ определим скалярное произведение следующим образом:

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} d^3\mathbf{w} f_1^*(\mathbf{w}) f_2(\mathbf{w}).$$

Нетрудно показать, что оно будет инвариантным в пространстве дС при

$$\sigma = \sigma_0 \equiv -\frac{3}{2} - i\mu R, \quad \mu \in \mathbf{R}.$$

Поэтому представление $T_{\sigma_0}^{\pm}$ – унитарное; оно, однако, не является неприводимым, т.к. мы не делаем предположения о квадратичной интегрируемости функций из его носителя, и потому оно содержит инвариантное подпространство квадратично интегрируемых функций.

3. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Вложением пространства дС в группу дС называется отображение $\mathcal{G}/\mathcal{H} \ni y_{\pm} \mapsto g_{y_{\pm}} \in \mathcal{G}$ такое, что для произвольного $g_1 \in \mathcal{G}$ справедливо равенство

$$g_1 g_{y_{\pm}} = g_{y'_{\pm}} h, \quad h \in \mathcal{H}, \quad y'_{\pm} = (y_{\pm})_{g_1}.$$

Покажем, что соотношение

$$g_{y_{\pm}} = \Theta_{\pm} \left(\frac{\mathbf{y}_{\pm}}{R} \right) \Theta_0 \left(\frac{\tau_{\pm}}{R} \right) \quad (13)$$

определяет вложение. Действительно, преобразование $g_{y_{\pm}}$, задаваемое равенством (13), переводит начало координат в точку с координатами $y_{\pm}$. Поэтому преобразования $g_1 g_{y_{\pm}}$ и $g_{y'_{\pm}}$ оба переводят начало координат в точку $y'_{\pm}$; следовательно, преобразование $(g_1 g_{y_{\pm}})^{-1} g_{y'_{\pm}}$ оставляет начало координат на месте и потому принадлежит $\mathcal{H}$. Вектор $|\psi_0\rangle$, лоренц-инвариантный относительно действия представления $T_{\sigma}^{\pm}$, – это вектор

$$|\psi_0\rangle = (1 - w^2)^{\sigma};$$

его лоренц-инвариантность можно показать, действуя на него генераторами (11) и (12) и выражая J_{0i} через $\mathbf{\Pi}^+$ и $\mathbf{\Pi}^-$ при помощи (1). Теперь можно построить систему КС для представлений $T_{\sigma}^{\pm}$:

$$|x, \pm; \sigma\rangle = T_{\sigma}^{\pm}(g_{y_{\pm}(x)})|\psi_0\rangle, \quad (14)$$

где координаты Леметра считаются зависящими от координат x^{μ} при помощи преобразований (7). Явным выражением для КС как функций от $\mathbf{w}$ будет

$$|x, \pm; \sigma\rangle \equiv \Phi_{\mathbf{w}}^{\pm}(x; \sigma) = (1 - w^2)^{\sigma} \varphi_{k_{\mathbf{w}}}^{\pm}(x; \sigma),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{\pm}(x; \sigma) &= \left(\chi \pm \frac{k \cdot x}{R} \right)^{\sigma}, \\ k_{\mathbf{w}}^{\mu} &= \left(\frac{1 + w^2}{1 - w^2}, \pm \frac{2\mathbf{w}}{1 - w^2} \right), \end{aligned}$$

так что $k_{\mathbf{w}} \cdot k_{\mathbf{w}} = 1$. Функции $\varphi_k^{\pm}(x; \sigma_0)$ при $k^0 > 0$ и $k \cdot k = 1$ являются “плоскими волнами” для частиц (знак $+$) и античастиц (знак $-$) массы μ [7]. Поэтому системы КС (14) при $\sigma = \sigma_0$ и $w^2 < 1$ соответствуют частицам (знак $+$) и античастицам (знак $-$); если же $w^2 > 1$, то это соответствие будет обратным.

Вычисляя якобиан перехода от $\mathbf{w}$ к $\mathbf{k}_{\mathbf{w}}$, получаем выражение для скалярного произведения двух КС в представлении $T_{\sigma_0}^{\pm}$:

$$\begin{aligned} \langle x, \pm; \sigma_0 | x, \pm; \sigma_0 \rangle &\equiv \int_{\mathbf{R}^3} d^3 \mathbf{w} \Phi_{\mathbf{w}}^{\pm}(\overset{1}{x}; \sigma_0) \Phi_{\mathbf{w}}^{\pm}(\overset{2}{x}; \sigma_0^*) = \\ &= \pm \frac{1}{8} \int_{k^0 > 0} \frac{d^3 \mathbf{k}}{k^0} (\varphi_k^+(\overset{1}{x}; \sigma_0) \varphi_k^+(\overset{2}{x}; \sigma_0^*) - \varphi_k^-(\overset{1}{x}; \sigma_0) \varphi_k^-(\overset{2}{x}; \sigma_0^*)). \end{aligned} \quad (15)$$

Действительно, область $\mathbf{R}^3 \setminus S_{w^2=1}^2$ при отображении $\mathbf{w} \mapsto k_{\mathbf{w}}$ непрерывно отображается на обе полы гиперболоида $k \cdot k = 1$. При $w^2 = 1$ подынтегральное выражение в первом интеграле в (15) не имеет особенностей при $\overset{1}{x} \cdot \overset{1}{x} > 0$ и $\overset{2}{x} \cdot \overset{2}{x} > 0$. Второй интеграл в (15) совпадает с двухточечными функциями в пространстве дС, рассматривавшимися в работах [7, 8]. Интегралы в (15), вообще говоря, расходятся; это связано с тем, что функция $|\psi_0\rangle$ не является квадратично интегрируемой на $\mathbf{R}^3$. Этим интегралам можно придать смысл путем перехода в комплексное пространство дС [7] или же к обобщенным функциям [8].

Заметим, что функции $\varphi_k^-(x; \sigma_0)$ при $k^0 > 0$ являются КС для пространства дС, построенными по аналогии с КС для пространства $SO(n, 1)/SO(n)$ [2]. Такой подход, однако, не дает возможности равноправно описывать частицы и античастицы.

Благодарности. Я благодарен Ю. П. Степановскому за ценные обсуждения, а также рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению содержания статьи.

Список литературы

- [1] *A. M. Perelomov.* Commun. Math. Phys. 1972. V. 26. P. 222.
- [2] *A. M. Переломов.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
- [3] *S. Twareque Ali, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, U. A. Mueller.* Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 1013.
- [4] *J. P. Gazeau.* Coherent States for Desitterian and Einsteinian Relativities. In: Selected Topics in Quantum Field Theory and Mathematical Physics. Eds. J. Niederle, J. Fischer. Singapore: World Sci., 1990. P. 182.
- [5] *A. El Gradechi, S. De Bièvre.* Ann. Phys. (USA). 1994. V. 235. P. 1; hep-th/9210133.
- [6] *S. De Bièvre, A. El Gradechi.* Ann. Inst. H. Poincaré. Ser. Phys. Théor. 1992. V. 57. P. 403.
- [7] *J. Bros, U. Moschella.* Rev. Math. Phys. 1996. V. 8. P. 327; gr-qc/9511019.
- [8] *М. Б. Менский.* Метод индуцированных представлений. Пространство-время и концепция частиц. М.: Наука, 1976.
- [9] *Б. А. Розенфельд.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 2.XI.1998 г.,
после доработки 20.IV.1999 г.