Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Фейгин, О сингулярностях операторов, удовлетворяющих сплетающему соотношению, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 2, 264–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 09:43:49

© 1999 г.

М. В. Фейгин*

О СИНГУЛЯРНОСТЯХ ОПЕРАТОРОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СПЛЕТАЮЩЕМУ СООТНОШЕНИЮ

На римановом многообразии рассматривается сплетающее соотношение между оператором Лапласа–Бельтрами с добавленным потенциалом и оператором Лапласа–Бельтрами. Показано, что особенности потенциала коразмерности один образуют вполне геодезические гиперповерхности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сплетающим соотношением между линейными дифференциальными операторами L и L_0 называется соотношение $L \circ D = D \circ L_0$, где D – некоторый оператор, называемый сплетающим. Наличие такого соотношения позволяет легко находить решения $\tilde{\varphi}(x)$ уравнения $L\tilde{\varphi} = \lambda\tilde{\varphi}$, как только становятся известными решения уравнения $L_0\varphi = \lambda\varphi$. Действительно, для функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей последнему уравнению, функция $\tilde{\varphi}(x) = D\varphi(x)$ будет собственной для оператора L :

$$L\tilde{\varphi} = LD\varphi = DL_0\varphi = \lambda D\varphi = \lambda\tilde{\varphi}.$$

В одномерном случае наличие сплетающего соотношения эквивалентно тому, что L получается из L_0 конечным числом преобразований Дарбу (см., например, [1]), тем самым общее условие $L \circ D = D \circ L_0$ является обобщением преобразования Дарбу. В многомерном случае задача описания всевозможных операторов L , связанных сплетающим соотношением с каким-нибудь интегрируемым оператором L_0 , представляется весьма сложной. Сравнительно ясной выглядит ситуация, когда $L_0 = \Delta$ – оператор Лапласа, а L – оператор Шредингера с рациональным потенциалом. Так, в работах Береста и Веселова [2, 3] было показано, что особенности потенциала после продолжения в $\mathbb{C}^n$ образуют объединение гиперплоскостей. А в работе Чалых [4] (см. также [5]) была дана характеристика конфигураций гиперплоскостей сингулярностей.

*Московский государственный университет, Независимый московский университет, Москва, Россия. E-mail: mfeigin@dnmtm.ru

В настоящей работе будут рассмотрены дифференциальные операторы на римановом многообразии (M^n, g^{ij}) , при этом L_0 будет оператором второго порядка с аналитическими коэффициентами и со старшим символом $g^{ij}\partial_i\partial_j$, а оператор $L = L_0 + u(x)$, где функция $u(x)$ мероморфна. Предметом нашего исследования будет геометрия сингулярностей функции $u(x)$. В работе Береста и Веселова [2], посвященной плоскому случаю ($g^{ij} = \delta^{ij}$), было высказано предположение, что в ситуации произвольного риманова многообразия особенности будут образовывать вполне геодезические подмногообразия. Напомним, что подмногообразие $\mathcal{N} \subset M$ называется *вполне геодезическим*, если локально геодезическая, соединяющая любые две точки из $\mathcal{N}$, целиком лежит в подмногообразии $\mathcal{N}$ (см., например, [6]). В данной работе это предположение доказывается при условии, что множество особенностей является подмногообразием коразмерности один. Отметим, что приводимое доказательство довольно близко повторяет доказательство для плоского случая [3]. В заключительной части работы рассматриваются некоторые примеры, связанные с потенциалами Калоджеро–Мозера.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Рассмотрим вещественное аналитическое риманово многообразие M^n размерности n с невырожденной аналитической метрикой g^{ij} и операторы L_0, L в области $U \subset M^n$ следующего вида:

$$L_0 = g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + l(\partial, x), \quad (1)$$

$$L = g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + l(\partial, x) + u(x), \quad (2)$$

где $l(\partial, x)$ – дифференциальный оператор не выше первого порядка с аналитическими коэффициентами, а $u(x) = u(x^1, \dots, x^n)$ – мероморфная функция (т.е. являющаяся локально отношением вещественных аналитических). Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть для операторов (1), (2) выполняется сплетающее соотношение

$$L \circ D = D \circ L_0, \quad (3)$$

где D – некоторый дифференциальный оператор с мероморфными коэффициентами. Предположим также, что в области U сингулярности функции $u(x)$ образуют подмногообразие $\mathcal{N}$ размерности $n - 1$. Тогда $\mathcal{N}$ является вполне геодезической гиперповерхностью.

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть $A(\partial, x)$ – дифференциальный оператор порядка l в области U риманова многообразия (M^n, g^{ij}) и пусть $A_l(k, x)$ – старший символ $A(\partial, x)$, $k =$

$(k_1, \dots, k_n)$. Определим

$$B(\partial, x) = \left[g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, A(\partial, x) \right],$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор дифференциальных операторов, и пусть $B_{l+1}(k, x)$ – символ порядка $l+1$ в $B(\partial, x)$.

Тогда

$$B_{l+1}(k(t), x(t)) = \frac{d}{dt} A_l(k(t), x(t)),$$

где кривые $k = k(t)$, $x = x(t)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^\alpha(t) = 2g^{\alpha\beta}(x(t))k_\beta(t), \\ \dot{k}_\gamma(t) = -\frac{\partial g^{\alpha\beta}(x(t))}{\partial x^\gamma} k_\alpha(t)k_\beta(t), \end{cases} \quad (4)$$

причем $x = x(t)$ оказывается геодезической линией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, во-первых, что

$$B_{l+1}(k, x) = g^{\alpha\beta}(x) \left(k_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} A_l(k, x) + k_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_l(k, x) \right) - \sum_\gamma \frac{\partial g^{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma} k_\alpha k_\beta \frac{\partial A_l(k, x)}{\partial k_\gamma},$$

откуда следует первая часть утверждения. Покажем далее, что $x = x(t)$ – геодезическая кривая. Пусть $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ – символы Кристоффеля римановой связности. Используя известную формулу, выражающую последние через метрику, из (4) получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma &= \left(4 \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} g^{i\gamma} k_\gamma k_\beta - 2g^{\alpha\beta} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^\beta} k_i k_j \right) + \\ &+ \frac{1}{2} g^{\alpha s} \left(\frac{\partial g_{s\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{s\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^s} \right) 4g^{\beta i} g^{\gamma j} k_j k_i. \end{aligned} \quad (5)$$

В соответствии с соотношениями $g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a$, $g^{ab}\partial_i g_{bc} + g_{bc}\partial_i g^{ab} = 0$ имеем

$$\begin{aligned} g^{\alpha s} \frac{\partial g_{s\gamma}}{\partial x^\beta} g^{\beta i} g^{\gamma j} &= -\frac{\partial g^{\alpha s}}{\partial x^\beta} \delta_s^j g^{\beta i}, \quad g^{\alpha s} \frac{\partial g_{s\beta}}{\partial x^\gamma} g^{\beta i} g^{\gamma j} = -\frac{\partial g^{\alpha s}}{\partial x^\gamma} \delta_s^i g^{\beta j}, \\ -g^{\alpha s} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^s} g^{\beta i} g^{\gamma j} &= g^{\alpha s} \frac{\partial g^{\beta i}}{\partial x^s} \delta_\beta^j. \end{aligned}$$

Упрощая (5) с помощью последних равенств, получаем

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 4 \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} g^{i\gamma} k_\gamma k_\beta - 2 \left(\frac{\partial g^{\alpha j}}{\partial x^\beta} g^{\beta i} + \frac{\partial g^{\alpha i}}{\partial x^\gamma} g^{\gamma j} \right) k_i k_j = 0.$$

Тем самым лемма доказана. Отметим, что в (k, x) -пространстве через каждую точку проходит ровно одна кривая, удовлетворяющая системе (4). В то же время в x -пространстве для любой геодезической $x(t)$, проходящей через данную точку, выполняется система (4) с подходящим $k(t)$.

Предположим теперь, что для операторов L_0 и L (соответствующие формулы (1) и (2)) выполняется сплетающее соотношение (3). Представим оператор D в виде

$$D = P_N(\partial, x) + P_{N-1}(\partial, x) + \dots + P_0(\partial, x), \quad (6)$$

где $P_i(k, x)$ – однородный по k многочлен степени i .

ЛЕММА 2. $P_N(k, x)$ не имеет особенностей и постоянен на кривых $k = k(t)$, $x = x(t)$, удовлетворяющих системе (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (3), (6) следует, что коммутатор

$$\left[g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, P_N(\partial, x) \right]$$

есть дифференциальный оператор порядка не выше N . Применяя лемму 1, получаем

$$\frac{d}{dt} P_N(k(t), x(t)) \equiv 0.$$

Если бы многочлен P_N имел особенность в какой-нибудь точке a , то по уже доказанному постоянству на кривых (4) P_N был бы сингулярен и в целой окрестности a , точки которой соединимы с a подходящей геодезической $x(t)$. Однако это, очевидно, невозможно.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение, которое является аналогом леммы о нулевых вычетах из работ Береста и Веселова [2, 3].

ЛЕММА 3. Предположим, что выполнены условия теоремы, и пусть $x = x(t)$ — геодезическая кривая общего положения, проходящая через точку общего положения $x_0 = x(0) \in \mathcal{N}$. При малых t представим $u(x(t))$ в виде

$$u(x(t)) = t^{-m} \sum_{i=0}^{\infty} u_i t^i.$$

Тогда $u_{m-1} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предположить, что в точке x_0 $P_N(k, x_0) \neq 0$, т.к. иначе вследствие леммы 2 мы бы получили, что $P_N(k, x) \equiv 0$. Далее, рассмотрим соотношение (3), где D представлен в виде (6). Выделим члены порядка N и ограничим соответствующие им символы на кривую $k = k(t)$, $x = x(t)$. С учетом леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} & \left(g^{ij}(x(t)) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + l(\partial, x) \right) (P_N(k(t), x(t))) + u(x(t)) P_N(k(t), x(t)) - \\ & - \{ P_N(\partial, x(t)) \circ (g^{ij}(x(t)) \partial_i \partial_j + l(\partial, x)) \}^{(N)} + \frac{d}{dt} P_{N-1}(k(t), x(t)) = 0, \end{aligned}$$

где под $\{ A(\partial, x) \}^{(N)}$ понимается символ дифференциального оператора $A(\partial, x)$ порядка N , ограниченный на кривую (4).

По лемме 2 отсюда следует, что

$$cu(x, t) = -\frac{d}{dt} P_{N-1}(k(t), x(t)) + f(t),$$

где $f(t)$ — аналитическая функция, а c — константа, причем $c \neq 0$ для почти всех геодезических $x(t)$. Так как у мероморфной функции

$$\frac{d}{dt} P_{N-1}(k(t), x(t))$$

коэффициент при t^{-1} в ряде Лорана обязан быть равен нулю, лемма доказана.

Теперь мы можем завершить **доказательство теоремы**. В окрестности точки $x_0 \in \mathcal{N}$ общего положения представим функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = \frac{Q(x)}{\tau^m(x)},$$

где $Q(x)$, $\tau(x)$ – аналитические функции, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\tau(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$ и дифференциал $d\tau(x_0) \neq 0$.

Прежде всего заметим, что порядок полюса $m = 2$. Действительно, из формулы (3) с учетом (1), (2) видно, что необходимо, чтобы выполнялось условие $m \leq 2$, поскольку оператор $g^{ij}\partial_i\partial_j + l(\partial)$ увеличивает порядок полюса при $\tau(x) = 0$ в операторе D не более чем на 2. Лемма же 3 показывает, в частности, что случай $m = 1$ невозможен. Пусть, далее, $x = x(t)$ – геодезическая общего положения, $x(0) = x_0$, $\xi = \dot{x}(0)$. При $t \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} Q(x(t)) &= Q(x_0) + Q'_{xi}(x_0)\xi^i t + o(t), \\ \tau(x(t)) &= \tau'_{xi}(x_0)\xi^i t + (\tau''_{x^i x^j}(x_0)\xi^i \xi^j - \tau'_{xi}(x_0)\Gamma_{jl}^i(x_0)\xi^j \xi^l)\frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

(в последней формуле мы воспользовались уравнением геодезической $\ddot{x}^i + \Gamma_{jl}^i \dot{x}^j \dot{x}^l = 0$). Применяя лемму 3, получаем

$$Q(x_0)(\tau''_{x^i x^j}(x_0)\xi^i \xi^j - \tau'_{xi}(x_0)\Gamma_{jl}^i(x_0)\xi^j \xi^l) = Q'_{xi}(x_0)\xi^i \tau'_{x^j}(x_0)\xi^j.$$

Это соотношение выполняется уже для всех ξ ; в частности, если ξ – вектор, касательный к подмногообразию $\mathcal{N}$, то $\tau'_{x^j}\xi^j = 0$ и

$$(\tau''_{x^i x^j} - \tau'_{xi}\Gamma_{ij}^l)\xi^i \xi^j = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь произвольную кривую $x = x(s)$, $x(0) = x_0$, лежащую в $\mathcal{N}$: $\tau(x(s)) \equiv 0$. Положим $\eta(s) = \dot{x}(s)$, тогда $\tau'_{xi}(x(s))\eta^i(s) \equiv 0$. Дифференцируя еще раз, получаем

$$\tau''_{x^i x^j}(x(s))\eta^i(s)\eta^j(s) + \tau'_{xi}(x(s))\frac{d}{ds}\eta^i(s) = 0.$$

Используя (7) для $\xi = \eta(0)$, находим

$$\tau'_{xi}(x_0) \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \eta^i(s) + \Gamma_{ij}^l(x_0)\eta^j \eta^i \right) = 0.$$

Выберем координаты, в которых в окрестности точки x_0 подмногообразие $\mathcal{N}$ задается уравнением $x^n = 0$. Тогда выполняется $\Gamma_{ij}^n|_{\mathcal{N}} \equiv 0$ при $i, j \neq n$, это эквивалентно тому, что гиперповерхность $\mathcal{N}$ вполне геодезична. Теорема доказана.

3. ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим плоский случай

$$\mathcal{M}^n = \mathbb{R}^n, \quad L_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x^{n^2}}, \quad L = L_0 + u(x).$$

В качестве $u(x)$ возьмем потенциал системы Калоджеро–Мозера

$$u(x) = -2m(m+1) \sum_{i < j}^n \frac{1}{(x^i - x^j)^2}, \quad (8)$$

где $m \in \mathbb{Z}$. Тогда существует такой сплетающий оператор D , что выполняется соотношение (3). Это следует из существования так называемого оператора сдвига, доказанного Опдамом [7]. В этом примере особенности потенциала $u(x)$ сосредоточены на зеркалах отражений группы Кокстера типа A_{n-1} . Существуют обобщения систем Калоджеро–Мозера, связанные с произвольными группами Кокстера [8]. Сингулярности потенциалов обобщенных систем Калоджеро–Мозера лежат на зеркалах соответствующих групп, а существование сплетающих операторов следует из результатов Хекмана [9]. Имеются также примеры с некокстеровскими конфигурациями гиперплоскостей особенностей (см. [5]).

2. В качестве неплоского примера рассмотрим единичную сферу S^2 и оператор Лапласа–Бельтрами на ней. В координатах, индуцированных из $\mathbb{R}^3$ формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta, \end{cases} \quad -\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

получим

$$L_0 = \partial_\theta^2 - \operatorname{tg} \theta \partial_\theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \partial_\varphi^2.$$

Положим

$$u(\varphi, \theta) = -\frac{2q^2}{\sin^2 q\varphi} \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad q \in \mathbb{N};$$

особенности $u(\varphi, \theta)$ суть большие окружности $\varphi = 2\pi i/q$, $i = 0, \dots, q-1$. Нетрудно проверить, что оператор $D = \partial_\varphi - q \operatorname{ctg} q\varphi$ является сплетающим:

$$\begin{aligned} & \left(\partial_\theta^2 - \operatorname{tg} \theta \partial_\theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \left(\partial_\varphi^2 - \frac{2q^2}{\sin^2 q\varphi} \right) \right) \circ (\partial_\varphi - q \operatorname{ctg} q\varphi) = \\ & = (\partial_\varphi - q \operatorname{ctg} q\varphi) \circ \left(\partial_\theta^2 - \operatorname{tg} \theta \partial_\theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right). \end{aligned}$$

Этот пример можно модифицировать, добавив особенность на геодезической $\{\theta = 0\}$:

$$\hat{u}(\varphi, \theta) = u(\varphi, \theta) - \frac{2}{\sin^2 \theta}.$$

Соответствующий сплетающий оператор можно взять в виде $\hat{D} = D \circ (\sin \varphi \partial_\theta - \cos \varphi \operatorname{tg} \theta \partial_\varphi - \sin \varphi \operatorname{ctg} \theta)$.

3. В заключительном примере рассмотрим единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, L_0 – оператор Лапласа–Бельтрами на ней. Введем в $\mathbb{R}^n$ сферическую систему координат (r, φ) , $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ и определим $u_{\text{сф}}(\varphi)$ – угловую часть потенциала Калоджеро–Мозера (8):

$$u_{\text{сф}}(\varphi) = u(x)|_{S^{n-1}}.$$

Тогда для оператора $L = L_0 + u_{\text{сф}}(\varphi)$ на сфере S^{n-1} выполняется соотношение (3) с подходящим D . Заметим, что это утверждение не является прямым следствием существования сплетающего оператора в $\mathbb{R}^n$ для системы Калоджеро–Мозера (8). Тем не менее, как и в плоском случае, оно может быть установлено в духе работы Хекмана [9]. Ключевым элементом конструкции является оператор Данкла [10]. Мы надеемся обсудить эту конструкцию как для системы A_n , так и для других групп Кокстера в отдельной работе.

Благодарности. В заключение я хотел бы искренне поблагодарить А. П. Веселова и О. А. Чалых за полезные обсуждения и помощь. Я также благодарен А. Б. Шабату за внимание к работе. Работа была выполнена при поддержке INTAS (грант № 96-0770) и РФФИ (проект № 96-15-96037).

Список литературы

- [1] Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. научн.-техн. изд-во Украины, 1939.
- [2] Ю. Ю. Берест, А. П. Веселов. УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 211–212.
- [3] Yu. Berest, A. Veselov. On the Structure of Singularities of Integrable Schrödinger Operators. (Submitted to Letters in Math. Phys., 1998.)
- [4] О. А. Чалых. УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 167–168.
- [5] О. А. Chalykh, M. V. Feigin, A. P. Veselov. Multidimensional Baker–Akhiezer Functions and Huygens' Principle. math-ph/9903019; submitted to Commun. Math. Phys., 1998.
- [6] Э. Картан. Геометрия римановых пространств. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
- [7] E. M. Opdam. Compos. Math. 1988. V. 67. P. 191–209.
- [8] M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov. Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313–404.
- [9] G. J. Heckman. Progr. Math. 1991. V. 101. P. 181–191.
- [10] C. F. Dunkl. Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 311. P. 167–183.

Поступила в редакцию 22.III.1999 г.