Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, С. Я. Старцев, О дискретных аналогах уравнения Лиувилля, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 2, 271–284

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf808>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 07:22:51

© 1999 г.

В. Э. Адлер*, С. Я. Старцев*

О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Понятие инвариантов Лапласа перенесено на цепочки и дискретные уравнения, являющиеся разностными аналогами гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными. Последовательность инвариантов Лапласа удовлетворяет дискретному аналогу двумеризованной цепочки Тоды. Доказано, что обрыв этой последовательности нулями является необходимым условием существования интегралов рассматриваемого уравнения. Предъявлены формулы для высших симметрий уравнений, обладающих интегралами. Общая теория иллюстрируется на примере разностных аналогов уравнения Лиувилля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Лиувилля и его обобщения изучаются уже полтораста лет, и для них получено очень много результатов, в том числе и классификационных [1–14]. В дискретном варианте эти исследования до сих пор не проводились, хотя многие результаты переносятся с непрерывного случая без особых усилий. Целью данной работы является продвижение в этом направлении. При этом наибольшую трудность представляют уравнения с явной зависимостью от дискретной переменной. Поэтому мы пока рассматриваем только сдвигово-инвариантные уравнения, хотя это, вероятно, сильно обедняет ответ. Преодоление указанной трудности, а также получение классификационных теорем должны быть предметом отдельных исследований.

Итак, рассмотрим дифференциально-разностные и чисто дискретные уравнения вида

$$u_{i+1,x} = f(x, u_{i+1}, u_i, u_{i,x}), \quad (1)$$

$$u_{i+1,j+1} = f(u_{i+1,j}, u_{i,j+1}, u_{i,j}). \quad (2)$$

В дальнейшем предполагается, что для уравнения (1) $f_{u_{i,x}} \neq 0$, а для уравнения (2) $f_{u_{i+1,j}} f_{u_{i,j+1}} f_{u_{i,j}} \neq 0$. Очевидно, что уравнения (1) и (2) можно интерпретировать как разностные аппроксимации уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (3)$$

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

Уравнения (1) возникают так же, как преобразования Беклунда, а уравнения (2) – как их принцип нелинейной суперпозиции. Это относится не только к обобщениям уравнения Лиувилля, но и к уравнениям, интегрируемым в рамках метода обратной задачи (хорошо известными примерами служат одевающая цепочка [15] и разностное уравнение Кортевега–де Фриза [16]).

Среди различных обобщений уравнения Лиувилля можно выделить несколько (пересекающихся) подклассов. Это разбиение зависит от того, какое из свойств уравнения Лиувилля выбирается в качестве определения интегрируемости, например явная формула для общего решения, линеаризуемость, симметрии с функциональным произведением или интегралы по каждому характеристическому направлению. В настоящей работе мы принимаем в качестве определяющего последнее из перечисленных свойств. Насколько нам известно, впервые оно было выдвинуто в качестве самостоятельного определения в работе [7], причем соответствующий подкласс был назван “уравнениями типа Лиувилля”. Используется также термин “уравнения, интегрируемые по Дарбу” [11–13], что не вполне точно, т.к. Дарбу пользовался скорее первым из перечисленных свойств. Поскольку среди специалистов нет единства в использовании терминологии, мы будем говорить просто об “уравнениях, обладающих интегралами.”

Для цепочки (1) принятое определение означает наличие x -интеграла X и i -интеграла I , т.е. таких функций от x и конечного числа динамических переменных $\{u_{i+m}, u_i^{(n)} = \partial_x^n(u_i) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+\}$ (здесь i предполагается фиксированным), что выполняются равенства

$$D_x(X) = 0, \quad (T_i - 1)(I) = 0,$$

где D_x – оператор полной производной по x , а T_i – оператор сдвига по i , вычисляемые в соответствии с цепочкой уравнений. Классическим примером следует считать цепочку спаренных уравнений Риккати

$$u_{i+1,x} - u_{i,x} = u_{i+1}^2 - u_i^2, \quad (4)$$

интегралы для которой имеют вид

$$I = u_{i,x} - u_i^2, \quad X = (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}) = \frac{(u_i - u_{i+2})(u_{i+1} - u_{i+3})}{(u_i - u_{i+3})(u_{i+1} - u_{i+2})}.$$

Чуть более сложный пример дает цепочка

$$u_{i+1,x} u_{i,x} = u_{i+1} + u_i, \quad (5)$$

для которой, как несложно проверить,

$$I = \frac{(u_{i,x} - 1)^2}{u_{i,x}^2}, \quad X = \frac{(u_{i+3} - u_{i+1})(u_{i+2} - u_i)}{u_{i+2} + u_{i+1}}.$$

Нетрудно показать, что и для уравнений (1) общего вида I может зависеть только от производных $u_i^{(n)}$, а X – только от сдвигов u_{i+m} . Порядком (ord) i -интеграла мы

будем называть порядок старшей из производных, от которых он зависит, а порядком x -интеграла – разность между максимальным и минимальным сдвигами переменной u_i , входящими в его выражение. В последнем примере $\text{ord } I = 2$, $\text{ord } X = 3$.

Решение цепочки, обладающей интегралами, сводится к решению разностного уравнения $X = c_i$, где c_i – произвольная последовательность, и совместного с ним обыкновенного дифференциального уравнения $I = C(x)$, где $C(x)$ – произвольная функция. Обычно это позволяет в конечном счете получить явный ответ; например, для цепочки (4) имеем

$$u_i = \frac{\psi_{xx}}{2\psi_x} + \frac{\psi_x}{z_i - \psi},$$

где $\psi(x)$ – произвольная функция и z_i – произвольные параметры. Отметим, что при этом

$$2I = S_\psi = \frac{\psi_{xxx}}{\psi_x} - \frac{3\psi_{xx}^2}{2\psi_x^2}, \quad X = (z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}).$$

Тем не менее вопрос о связи между наличием интегралов и существованием явной формулы для решения в настоящее время остается открытым даже в наиболее изученном непрерывном случае.

Для дискретных уравнений (2) наше определение интегрируемости означает наличие i - и j -интегралов, удовлетворяющих уравнениям

$$(T_i - 1)(I) = 0, \quad (T_j - 1)(J) = 0.$$

В данном случае динамическими переменными являются $u_{i+m,j}$, $u_{i,j+n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, т.к. все прочие исключаются в силу (2). Нетрудно также доказать, что i -интеграл зависит лишь от сдвигов $u_{i,j+n}$, а j -интеграл – от $u_{i+m,j}$. Порядок интегралов определяется так же, как и порядок x -интеграла для уравнения (1). В качестве примера приведем уравнение

$$u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + \frac{1}{u_{i+1,j}} - \frac{1}{u_{i,j}} = 0, \quad (6)$$

для которого имеются i -интеграл первого порядка и j -интеграл третьего порядка:

$$I = u_{i,j+1} + \frac{1}{u_{i,j}}, \quad J = \frac{(u_{i+3,j} - u_{i+2,j})(u_{i+1,j} - u_{i,j})}{(u_{i+3,j} - u_{i+1,j})(u_{i+2,j} - u_{i,j})}.$$

В заключение опишем содержание работы. В разделе 2 понятие инвариантов Лапласа переносится на дискретный случай (ср. [17]). Для приведенных выше примеров и дискретных уравнений Лиувилля из раздела 3 последовательность инвариантов Лапласа обрывается нулями, что позволяет предположить по аналогии с непрерывным случаем, что это свойство является характеристическим для уравнений, обладающих интегралами [11–14]. Необходимость этой гипотезы доказывается в разделе 5, что является основным результатом работы. Схема доказательства в целом та же, что и в непрерывном случае. В разделе 6 приведены конструктивные формулы для симметрий цепочек (1), обладающих интегралами.

Инварианты Лапласа удовлетворяют некоторым рекуррентным уравнениям типа дискретной цепочки Тоды [17–22]. В разделе 4 эти уравнения отождествляются с известными формулами для преобразований Беклунда и принципа нелинейной суперпозиции для двумеризованной цепочки Тоды. В непрерывном случае доказательство достаточности существенно опирается на результаты о структуре интегралов этой цепочки [8, 23], и поэтому было бы желательно получить аналогичные результаты и в дискретном случае.

2. ДИСКРЕТНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА

В теории уравнений (3) полезным инструментом являются инварианты Лапласа линейаризованного уравнения. В частности, доказано, что уравнение обладает интегралами, если и только если ряд инвариантов Лапласа h_j обрывается нулями с обоих концов [11–14]. При этом инварианты $h_{-1} = f_u + f_{u_x}f_{u_y} - D_x(f_{u_x})$, $h_0 = f_u + f_{u_x}f_{u_y} - D_y(f_{u_y})$ вычисляются непосредственно по правой части уравнения, а остальные находятся по явной рекуррентной формуле

$$(\ln h_j)_{xy} = h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}, \quad (7)$$

представляющей собой одну из форм записи двумеризованной цепочки Тоды.

Оказывается, что аналогичные построения можно определить и в дискретной ситуации. Сначала рассмотрим дифференциально-разностный оператор $L = T_i D_x + a_i D_x + b_i T_i + c_i$. Его можно записать в следующих двух формах:

$$L = (T_i + a_i)(D_x + b_{i-1}) + H_{i,0}, \quad (8)$$

$$L = (D_x + b_i)(T_i + a_i) + K_{i,0}, \quad (9)$$

где

$$H_{i,0} = c_i - a_i b_{i-1}, \quad K_{i,0} = c_i - a_i b_i - D_x(a_i).$$

Нетрудно проверить, пользуясь разложением (8), что если $H_{i,0} \neq 0$, то верна формула

$$(D_x + b_{i,1})L = L_1(D_x + b_{i-1}), \quad (10)$$

где

$$L_1 = (D_x + b_{i,1})(T_i + a_i) + H_{i,0}, \quad b_{i,1} = b_{i-1} - D_x(\ln H_{i,0}).$$

Отсюда следует, что оператор $D_x + b_{i-1}$ переводит ядро L в ядро оператора L_1 . При этом оператор $\frac{1}{H_{i,0}}(T_i + a_i)$ задает обратное преобразование, переводящее ядро L_1 в ядро L :

$$L \frac{1}{H_{i,0}}(T_i + a_i) = (T_i + a_i) \frac{1}{H_{i,0}} L_1.$$

Отображение $L = L_0 \mapsto L_1$ будем называть x -преобразованием Лапласа. Его итерации дают последовательность операторов

$$L_j = (T_i + a_i)(D_x + b_{i-1,j}) + H_{i,j}, \quad j \geq 0, \quad (11)$$

где $H_{i,j}$, $b_{i,j}$ определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} H_{i,j+1} &= H_{i,j} + D_x(a_i) + a_i(b_{i,j+1} - b_{i-1,j+1}), \\ b_{i,j+1} &= b_{i-1,j} - D_x(\ln H_{i,j}), \quad b_{i,0} = b_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Подобным образом определяется и i -преобразование Лапласа. Пользуясь разложением (9), получаем аналог формулы (10):

$$(T_i + a_{i,1})L = L_{-1}(T_i + a_i), \quad (13)$$

где

$$L_{-1} = (T_i + a_{i,1})(D_x + b_i) + K_{i+1,0}, \quad a_{i,1} = \frac{a_i K_{i+1,0}}{K_{i,0}}$$

и предполагается, что $K_{i,0} \neq 0$. При этом оператор $\frac{1}{K_{i,0}}(D_x + b_i)$ задает обратное преобразование

$$L \frac{1}{K_{i,0}}(D_x + b_i) = (D_x + b_i) \frac{1}{K_{i+1,0}} L_{-1}.$$

Итерация i -преобразования порождает последовательность операторов

$$L_{-j} = (D_x + b_{i+j})(T_i + a_{i,j}) + K_{i,j}, \quad j \geq 0, \quad (14)$$

где $K_{i,j}$, $a_{i,j}$ определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} K_{i,j+1} &= K_{i+1,j} - D_x(a_{i,j+1}) - a_{i,j+1}(b_{i+j+1} - b_{i+j}), \\ a_{i,j+1} &= \frac{a_{i,j} K_{i+1,j}}{K_{i,j}}, \quad a_{i,0} = a_i. \end{aligned} \quad (15)$$

Если предположить, что $a_i \neq 0$ (это гарантирует нам, что и все $a_{i,j} \neq 0$), то с вычислительной точки зрения удобнее рассматривать величины

$$h_{i,j} = \begin{cases} \frac{H_{i,j}}{a_i}, & j \geq 0, \\ \frac{K_{i,-j-1}}{a_{i,-j-1}}, & j < 0, \end{cases}$$

которые мы будем называть инвариантами Лапласа. Фактически этот переход необходим, т.к. операторы L естественно рассматривать с точностью до калибровочного преобразования $\tilde{L} = \alpha_{i+1}^{-1} L \alpha_i$, инвариантами которого как раз являются величины $h_{i,j}$. В частности, сравнение формул (10), (13) и обратных к ним показывает, что с точностью до калибровки x - и i -преобразования Лапласа являются обратными. Легко проверить, что $h_{i,j}$ удовлетворяют цепочке

$$\left(\ln \frac{h_{i,j}}{h_{i+1,j}} \right)_x = h_{i,j-1} - h_{i,j} - h_{i+1,j} + h_{i+1,j+1}, \quad (16)$$

в то время как величины $H_{i,j}$, $K_{i,j}$ не удовлетворяют замкнутой системе уравнений.

Под инвариантами Лапласа цепочки (1) понимаются инварианты Лапласа ее оператора линеаризации

$$L = T_i D_x - f_{u_{i,x}} D_x - f_{u_{i+1}} T_i - f_{u_i}.$$

В силу условия невырожденности $f_{u_{i,x}} \neq 0$ переход от величин $H_{i,j}$, $K_{i,j}$ к $h_{i,j}$ в данном случае всегда возможен. Отметим также, что благодаря сдвиговой инвариантности цепочки выполняется свойство $h_{i+1,j} = T_i(h_{i,j})$ и, следовательно, инварианты Лапласа могут обратиться в нуль лишь сразу на целой прямой $j = j_0$.

Возвращаясь к примерам из введения, нетрудно проверить прямым вычислением, что для цепочки (4) обращаются в нуль инварианты $h_{i,-3}$ и $h_{i,0}$, а для цепочки (5) — $h_{i,-3}$ и $h_{i,1}$. Таким образом, возникает гипотеза, что сформулированный выше критерий существования интегралов эффективен и в дискретном случае.

Преобразования и инварианты Лапласа для чисто разностных операторов устроены вполне аналогично. Кроме того, они изучались в обзоре [17], поэтому мы приведем лишь ключевые формулы. Перепишем оператор $L = T_i T_j + a_{i,j} T_j + b_{i,j} T_i + c_{i,j}$ в виде

$$L = (T_i + a_{i,j})(T_j + b_{i-1,j}) + H_{i,j,0} = (T_j + b_{i,j})(T_i + a_{i,j-1}) + K_{i,j,0},$$

где

$$H_{i,j,0} = c_{i,j} - a_{i,j} b_{i-1,j}, \quad K_{i,j,0} = c_{i,j} - a_{i,j-1} b_{i,j}.$$

Пользуясь первым из представлений оператора L , можно показать, что оператор $T_j + b_{i-1,j}$ переводит ядро L в ядро оператора

$$L_1 = (T_j + b_{i,j,1})(T_i + a_{i,j}) + H_{i,j+1,0}, \quad b_{i,j,1} = \frac{b_{i-1,j} H_{i,j+1,0}}{H_{i,j,0}},$$

а оператор $\frac{1}{H_{i,j,0}}(T_i + a_{i,j})$ задает обратное преобразование. Итерация данного преобразования, которое естественно назвать j -преобразованием Лапласа, дает последовательность операторов

$$L_k = (T_i + a_{i,j+k})(T_j + b_{i-1,j,k}) + H_{i,j,k}, \quad k \geq 0,$$

где $H_{i,j,k}$, $b_{i,j,k}$ определяются рекуррентно:

$$H_{i,j,k+1} = H_{i,j+1,k} + a_{i,j+k} b_{i,j,k+1} - a_{i,j+k+1} b_{i-1,j,k+1},$$

$$b_{i,j,k+1} = \frac{b_{i-1,j,k} H_{i,j+1,k}}{H_{i,j,k}}, \quad b_{i,j,0} = b_{i,j}.$$

Аналогично определяются i -преобразования и величины $K_{i,j,k}$, $a_{i,j,k}$.

Если $a_{i,j} b_{i,j} \neq 0$, то можно рассмотреть инварианты Лапласа

$$h_{i,j,k} = \frac{H_{i,j,k}}{a_{i,j+k} b_{i-1,j,k}}$$

при $k \geq 0$,

$$h_{i,j,k} = \frac{K_{i,j,-k-1}}{a_{i,j-1,-k-1}b_{i-k-1,j}}$$

при $k < 0$. Аналогично предыдущему случаю эти величины не меняются при калибровочных преобразованиях и удовлетворяют замкнутой системе уравнений

$$(h_{i,j+1,k-1} + 1)(h_{i+1,j,k+1} + 1) = (h_{i,j+1,k}^{-1} + 1)(h_{i+1,j,k}^{-1} + 1)h_{i,j,k}h_{i+1,j+1,k}. \quad (17)$$

Легко проверить, что для уравнения (6) инварианты $h_{i,j,-3}$ и $h_{i,j,0}$ линеаризованного уравнения обращаются в нуль, подтверждая тем самым нашу гипотезу.

3. ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Напомним, что уравнение Лиувилля [1] получается при замыкании цепочки Тоды (7) посредством простейших граничных условий $h_1 = h_{-1} = 0$. Возникает естественный вопрос, что происходит при таком же обрыве из дискретизованных цепочек Тоды (16) и (17). Оказывается, все три уравнения очень близки по структуре и свойствам: они обладают интегралами второго порядка, число их ненулевых инвариантов Лапласа равно двум, имеются линеаризующие подстановки первого порядка. Кроме того, дискретные версии в пределе переходят в само уравнение Лиувилля. Рассмотрим эти примеры подробнее. Обратим внимание, что ниже буква h используется в двух значениях, сначала как полевая переменная в оборванной цепочке Тоды, а потом она переобозначается через u и для полученного уравнения вычисляются инварианты Лапласа, опять обозначенные через h . При этом снова получается оборванная цепочка Тоды, но другой длины.

При замыкании $h_{i,1} = h_{i,-1} = 0$ уравнения (16) превращаются в цепочку вида (1) на переменные $u_i = h_{i,0}$:

$$u_{i+1,x}u_i - u_{i+1}u_{i,x} = u_{i+1}u_i(u_{i+1} + u_i). \quad (18)$$

Нетрудно проверить, что, полагая $u_i(x) = \varepsilon u(x, y)$, $y = \varepsilon i$, мы получим в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение Лиувилля $(\ln u)_{xy} = 2u$. Заметим еще, что цепочка (18) получается из (4) в результате замены $\tilde{u}_i = u_{i+1} - u_i$.

Оператор линеаризации для (18) равен

$$L = D_x T_i - \frac{u_{i+1}}{u_i} D_x - \left(\frac{u_{i,x}}{u_i} + 2u_{i+1} + u_i \right) T_i + u_{i+1} \left(\frac{u_{i,x}}{u_i^2} - 1 \right),$$

и вычисление инвариантов Лапласа дает $h_{i,1} = h_{i,-2} = 0$.

Разделяя переменные u_i и u_{i+1} и дифференцируя, получим

$$\frac{u_{i+1,x}}{u_{i+1}} - u_{i+1} = \frac{u_{i,x}}{u_i} + u_i, \quad \frac{u_{i+1,xx}}{u_{i+1}} - \frac{u_{i+1,x}^2}{u_{i+1}^2} - u_{i+1,x} = \frac{u_{i,xx}}{u_i} - \frac{u_{i,x}^2}{u_i^2} + u_{i,x},$$

откуда легко найти i -интеграл:

$$I = 2 \frac{u_{i,xx}}{u_i} - 3 \frac{u_{i,x}^2}{u_i^2} - u_i^2.$$

Нетрудно найти также и x -интеграл:

$$X = \left(1 + \frac{u_i}{u_{i+1}}\right) \left(1 + \frac{u_i}{u_{i-1}}\right).$$

Уравнение (18) сводится к линейному уравнению $v_{i+1,x} - v_{i,x} = 0$ подстановкой

$$u_i = \frac{(v_{i+1} - v_i)v_{i,x}}{v_{i+1}v_i}$$

(ср. с формулой $u = v_x v_y / v^2$, линеаризующей уравнение Лиувилля), что сразу дает формулу для общего решения:

$$u_i(x) = \frac{(c_{i+1} - c_i)\psi_x}{(c_{i+1} + \psi)(c_i + \psi)},$$

где c_i – произвольные константы, $\psi(x)$ – произвольная функция.

В чисто дискретном случае обрыв $h_{i,j,1} = h_{i,j,-1} = 0$ сводит уравнение (17) к уравнению вида (2) на переменные $u_{i,j} = h_{i,j,0}$:

$$u_{i+1,j+1} \left(1 + \frac{1}{u_{i+1,j}}\right) \left(1 + \frac{1}{u_{i,j+1}}\right) u_{i,j} = 1. \quad (19)$$

Оно превращается в цепочку (18) в результате предельного перехода $u_{i,j} = -\varepsilon u_i(\varepsilon j)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для этого уравнения инварианты Лапласа $h_{i,j,1}$ и $h_{i,j,-2}$ также обращаются в нуль. Формулы для интегралов имеют вид

$$I = \left(1 + \frac{u_{i,j}(u_{i,j-1} + 1)}{u_{i,j-1}}\right) \left(1 + \frac{u_{i,j}}{u_{i,j+1}(u_{i,j} + 1)}\right),$$

$$J = \left(1 + \frac{u_{i,j}(u_{i-1,j} + 1)}{u_{i-1,j}}\right) \left(1 + \frac{u_{i,j}}{u_{i+1,j}(u_{i,j} + 1)}\right).$$

Подстановка

$$u_{i,j} = -\frac{(v_{i+1,j} - v_{i,j})(v_{i,j+1} - v_{i,j})}{v_{i+1,j}v_{i,j+1}}$$

сводит (19) к линейному уравнению $v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} - v_{i,j+1} + v_{i,j} = 0$, откуда получаем формулу для общего решения

$$u_{i,j} = -\frac{(c_{i+1} - c_i)(k_{j+1} - k_j)}{(c_{i+1} + k_j)(c_i + k_{j+1})},$$

где c_i, k_j – произвольные константы.

4. ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Здесь мы немного отклонимся в сторону, чтобы обсудить цепочки (16) и (17), являющиеся, как мы видели, естественными дискретными аналогами цепочки Тоды (7). В этом контексте они уже не раз рассматривались в литературе (возможно, в несколько иной записи, см. например, [17–22]). Для полноты картины мы воспроизведем некоторые формулы из этих работ, показывающие, что связь между этими тремя цепочками глубже, чем это кажется на первый взгляд. Для дальнейшего изложения материал этого раздела не понадобится.

Нам будет удобно начать не с цепочки (7), а с цепочки

$$r_{j,xy} = \exp(r_{j+1} - 2r_j + r_{j-1}), \quad (20)$$

которая связана с ней заменой $h_j = r_{j,xy}$. Преобразование Беклунда для этой цепочки имеет вид

$$(r_{i,j} - r_{i+1,j})_x = \exp(r_{i,j-1} - r_{i,j} - r_{i+1,j} + r_{i+1,j+1}), \quad (21)$$

$$(r_{i+1,j} - r_{i,j-1})_y = \exp(r_{i,j} - r_{i+1,j} - r_{i,j-1} + r_{i+1,j-1}). \quad (22)$$

Действительно, вычисляя перекрестные производные, легко получить формулу

$$r_{i,j,xy} = \exp(r_{i,j+1} - 2r_{i,j} + r_{i,j-1}) + c(x, y),$$

где функция $c(x, y)$ не зависит от i, j , а потому от нее легко избавиться сдвигом вида $r_{i,j} \rightarrow r_{i,j} + C(x, y)$. Цепочка (21) после замены $h_{i,j} = (r_{i,j} - r_{i+1,j})_x$ сводится к цепочке (16).

Как мы видим, в формулах (21), (22) сдвигу в цепочке (20) отвечает второй индекс, а первый обозначает действие преобразования Беклунда. Введем теперь еще третий индекс и запишем преобразование Беклунда по нему, оставляя первый индекс постоянным (при этом в формулах (21), (22) к переменным r следует приписать постоянный третий индекс):

$$(r_{i,j,k} - r_{i,j,k+1})_x = \exp(r_{i,j-1,k} - r_{i,j,k} - r_{i,j,k+1} + r_{i,j+1,k+1}),$$

$$(r_{i,j,k+1} - r_{i,j-1,k})_y = \exp(r_{i,j,k} - r_{i,j,k+1} - r_{i,j-1,k} + r_{i,j-1,k+1}).$$

Рассмотрим суперпозицию этих двух преобразований Беклунда. При этом достаточно рассмотреть дифференцирование по x , т.к. дифференцирование по y приводит к тому же результату. Вычисляя $(r_{i,j,k} - r_{i+1,j,k+1})_x$ двумя разными способами, мы приходим после некоторых преобразований к равенству

$$(T_j - 1) \left(\exp(r_{i+1,j-1,k} - r_{i+1,j,k+1} - r_{i,j-1,k} + r_{i,j,k+1}) - \exp(r_{i,j-1,k+1} - r_{i+1,j,k+1} - r_{i,j-1,k} + r_{i+1,j,k}) \right) = 0.$$

Приравнявая выражение в скобках постоянной $c_{i,k}$ и обращая ее в 1 сдвигом вида $r_{i,j,k} \rightarrow r_{i,j,k} + C_{i,k}$, получаем искомое разностное уравнение

$$\exp(r_{i+1,j-1,k} + r_{i,j,k+1}) - \exp(r_{i,j-1,k+1} + r_{i+1,j,k}) = \exp(r_{i+1,j,k+1} + r_{i,j-1,k}). \quad (23)$$

С точностью до линейного преобразования координатных осей оно эквивалентно известному уравнению Хироты–Мивы [18, 19]

$$af_{i+1,j,k}f_{i-1,j,k} + bf_{i,j+1,k}f_{i,j-1,k}cf_{i,j,k+1}f_{i,j,k-1} = 0$$

(ясно, что растяжение $f \rightarrow \alpha^{i(i-1)}\beta^{j(j-1)}f$ позволяет сделать все коэффициенты единичными). Подстановка

$$h_{i,j,k} = \exp(r_{i+1,j,k+1} - r_{i,j-1,k+1} - r_{i+1,j,k} + r_{i,j-1,k})$$

переводит уравнение (23) в уравнение

$$(h_{i+1,j,k+1} + 1)(h_{i,j-1,k} + 1) = (h_{i,j-1,k+1}^{-1} + 1)(h_{i+1,j,k}^{-1} + 1)h_{i+1,j-1,k}h_{i,j,k+1},$$

которое совпадает с (17) с точностью до линейной замены i, j, k .

Подчеркнем, что преобразования от переменной r к переменным h различны во всех трех случаях, поэтому неправильно утверждать, что цепочка (16) есть преобразование Беклунда для (7), а цепочка (17) задает принцип нелинейной суперпозиции. Тем не менее, как мы показали, эти три цепочки определены на одной и той же трехмерной решетке, порожденной преобразованиями Беклунда для цепочки (20).

5. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

В этом разделе доказывается основная теорема, которая дает достаточно эффективный тест для проверки наличия интегралов уравнений (1), (2).

Мы подробно рассмотрим только цепочки (1). Пусть g есть функция от x и динамических переменных u_{i+m} , $u_i^{(n)}$. Обозначим через g_* ее линеаризацию, т.е. оператор

$$g_* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{u_{i+m}} T_i^m + \sum_{n=1}^{\infty} g_{u_i^{(n)}} D_x^n.$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что для любой такой функции верны формулы

$$(D_x(g))_* = D_x g_* \mod [L], \quad (T_i(g))_* = T_i g_* \mod [L], \quad (24)$$

где L — оператор линеаризации цепочки (1), а через $[L]$ обозначено множество операторов вида ML , M — произвольный дифференциально-разностный оператор.

ТЕОРЕМА 1. Если цепочка (1) имеет x -интеграл X порядка n , то при некотором j , $0 < j \leq n$, ее инвариант Лапласа $h_{i,-j}$ обращается в нуль. Если же она имеет i -интеграл I порядка n , то в нуль обращается $h_{i,j}$ при некотором j , $0 \leq j < n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство от противного первой части утверждения. Допустим, что $h_{i,-j} \neq 0$ при $j = 1, \dots, n$. Это равносильно тому, что величины $K_{i,j} \neq 0$ при $j = 0, \dots, n-1$ и формулы (14), (15) определяют операторы L_{-j} при $j = 0, \dots, n$. Переписывая (13) применительно к этим операторам, получим

$$(T_i + a_{i,j})L_{-j+1} = L_{-j}(T_i + a_{i,j-1}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Многократное применение этой формулы дает $L_{-j}A_{j-1} = 0 \pmod{[L]}$, где разностные операторы A_j определяются равенствами

$$A_{-1} = 1, \quad A_j = (T_i + a_{i,j})A_{j-1}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Таким образом, мы имеем соотношение

$$D_x A_j = -b_{i+j}A_j - K_{i,j}A_{j-1} \pmod{[L]}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Можно считать, не теряя общности, что X зависит от $u_i, \dots, u_{i+n}$, этого можно добиться сдвигом T_i . Разложим X_* по операторам A_j ,

$$X_* = \sum_{j=0}^n \xi_j A_{j-1},$$

и умножим слева на D_x . Сбрав в формуле $D_x X_* = 0 \pmod{[L]}$ коэффициенты при A_j и D_x , получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} (D_x - b_{i+n-1})(\xi_n) &= 0, \\ (D_x - b_{i+j-1})(\xi_j) &= \xi_{j+1}K_{i,j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ D_x(\xi_0) &= \xi_1 K_{i,0}, \\ \xi_0 &= 0, \end{aligned}$$

что приводит к противоречию: $\xi_0 = \dots = \xi_n = 0$, откуда $X_* = 0$.

Доказательство второй половины утверждения вполне аналогично, поэтому мы изложим его кратко. Предположив, что $H_{i,j} \neq 0$ при $0 \leq j < n$, построим операторы L_j по формулам (11), (12) и определим операторы

$$B_{-1} = 1, \quad B_j = (D_x + b_{i-1,j})B_{j-1}.$$

Для них верны формулы

$$T_i B_j = -a_i B_j - H_{i,j} B_{j-1} \pmod{[L]}, \quad j = 1, \dots, n,$$

применяя которые к соотношению $T_i I_* = I_* \bmod [L]$, где

$$I_* = \sum_{j=0}^n \xi_j B_{j-1},$$

получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (a_i T_i + 1)(\xi_n) &= 0, \\ (a_i T_i + 1)(\xi_j) &= -\xi_{j+1} H_{ij}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \xi_0 &= -\xi_1 H_{i,0}, \\ T_i(\xi_0) &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $I_* = 0$.

В чисто дискретном случае тем же способом можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть уравнение (2) имеет i -интеграл (j -интеграл) n -го порядка. Тогда для некоторого k инвариант Лапласа $h_{i,j,k} = 0$, $0 \leq k < n$ ($h_{i,j,-k} = 0$, $0 < k \leq n$).

6. ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ

Понятие симметрии для уравнений (1), (2) и (3) вводится единообразно: так называется любая функция от динамических переменных на данном уравнении, удовлетворяющая характеристическому уравнению $L(g) = 0$, где L — оператор линеаризации. Менее формально симметрию можно понимать как уравнение $u_t = g$, совместное с исходным. Известно [12], что уравнения (3), обладающие интегралами, обладают и богатым семейством симметрий вида

$$g = P(Y) + Q(X),$$

где P и Q — некоторые, явно вычисляемые, дифференциальные операторы от D_x и D_y , соответственно, а X и Y — произвольные x - и y -интегралы.

Целью данного раздела является получение аналогичных формул в дискретном случае. Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3. Пусть цепочка (1) обладает интегралами, тогда операторы $D_x - f_{u_{i+1}}$, $T_i - f_{u_{i,x}}$ имеют непустые ядра в пространстве функций от динамических переменных. Аналогично, если уравнение (2) обладает интегралами, то непустые ядра имеют операторы $T_i - f_{u_{i,j+1}}$, $T_j - f_{i+1,j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для этого достаточно продифференцировать соотношение, определяющее интеграл, по старшей из динамических переменных. Например, дифференцируя по $u_i^{(n)}$ соотношение $(T_i - 1)I(x, u_i, \dots, u_i^{(n)}) = 0$, где $u_{i+1}^{(j+1)} = D_x^j(f)$ в силу цепочки (1), получаем $(f_{u_{i,x}} T_i - 1)(I_{u_i^{(n)}}) = 0$, следовательно, $1/I_{u_i^{(n)}}$ принадлежит ядру оператора $T_i - f_{u_{i,x}}$.

Теперь можно доказать теорему о симметриях цепочки (1) (мы ограничимся этим случаем, т.к. для уравнений (2) рассуждения аналогичны).

ТЕОРЕМА 4. Пусть цепочка (1) обладает x -интегралом порядка m и i -интегралом порядка n , тогда существуют дифференциальный оператор P и разностный оператор Q порядков не выше чем $m - 1$ и $n - 1$, соответственно, такие, что для любых i -интеграла I и x -интеграла X формула

$$g = P(I) + Q(X)$$

задает симметрию данной цепочки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 из наличия x -интеграла следует, что $h_{i,-j} = 0$ при некотором j , $0 < j \leq m$. Применяя $j - 1$ раз i -преобразование Лапласа (14), (15), мы получим общую формулу для решения уравнения $L(g) = 0$

$$g = \frac{1}{K_{i,0}}(D_x + b_i) \cdot \dots \cdot \frac{1}{K_{i,j-2}}(D_x + b_{i+j-2})(\psi),$$

где ψ есть решение уравнения

$$(D_x + b_{i+j-1})(T_i + a_{i,j-1})(\psi) = 0.$$

Положим $(T_i + a_{i,j-1})(\psi) = 0$, тогда ψ можно представить в виде $\psi = K_{i,j-2} \dots K_{i,0} \varphi I$, где I — произвольный i -интеграл, а φ удовлетворяет уравнению $(T_i + a_i)(\varphi) = 0$. Поскольку в силу леммы 3 это уравнение разрешимо (заметим, что это обеспечивается i -интегралом), получаем частное решение определяющего уравнения вида $g = P(I)$.

Рассмотрим теперь x -преобразования Лапласа. Пусть в нуль обращается инвариант $h_{i,j}$, $0 \leq j < n$, тогда решение определяющего уравнения можно представить в виде

$$g = \frac{1}{H_{i,0}}(T_i + a_i) \cdot \dots \cdot \frac{1}{H_{i,j-1}}(T_i + a_i)(\psi),$$

где ψ есть решение уравнения

$$(T_i + a_i)(D_x + b_{i-1,j})(\psi) = 0.$$

При этом согласно (12)

$$b_{i-1,j} = b_{i-j-1,0} - D_x \ln(H_{i-1,j-1} \dots H_{i-j,0}),$$

следовательно, функция $\psi = H_{i-1,j-1} \dots H_{i-j,0} \varphi X$, где X — произвольный x -интеграл, является частным решением, если φ удовлетворяет уравнению $\varphi_x + b_{i-j-1,0} \varphi = 0$. Это уравнение разрешимо вследствие леммы 3, и мы получаем частное решение определяющего уравнения вида $g = Q(X)$.

В качестве примера приведем формулу для симметрий дискретного уравнения Лиувилля (18):

$$u_{i,t} = D_x(u_i I) + (T_i - 1) \left(\left(u_i + \frac{u_i^2}{u_{i+1}} \right) X \right).$$

Первое слагаемое в этой формуле определяет семейство эволюционных уравнений, для которых цепочка (18) задает преобразование Беклунда. Для сравнения заметим, что в непрерывном случае операторы P и Q для симметрий уравнения $(\ln u)_{xy} = 2u$ равны $P = D_x u$, $Q = D_y u$.

Благодарности. Авторы благодарят А. В. Жибера, В. В. Соколова, И. Т. Хабибуллина, С. П. Царева и А. Б. Шабата за интерес к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 99-01-00431.

Список литературы

- [1] *J. Liouville*. J. Math. Pure Appl. 1853. V. 18. P. 71.
- [2] *G. Darboux*. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal. Paris: Gauthier-Villars, 1896.
- [3] *E. Goursat*. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Paris: Hermann, 1896.
- [4] *E. Vessiot*. J. Math. Pure Appl. 1939. V. 18. P. 1; 1942. V. 21. P. 1.
- [5] *A. R. Forsyth*. Theory of Differential Equations. New York: Dover Publ., 1959.
- [6] *А. В. Жубер, А. Б. Шабат*. ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1103.
- [7] *А. В. Жубер, Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат*. ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 1. С. 26.
- [8] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов*. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт Башкирского филиала АН СССР. Уфа: Изд-во Башкирского филиала АН СССР, 1981.
- [9] *А. В. Жубер, А. Б. Шабат*. ДАН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 29.
- [10] *А. В. Жубер*. Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 33.
- [11] *I. M. Anderson, N. Kamran*. Duke Math. J. 1997. V. 87. № 2. P. 265.
- [12] *А. В. Жубер, В. В. Соколов, С. Я. Старцев*. Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 6. С. 746.
- [13] *V. V. Sokolov, A. V. Zhiber*. Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 303.
- [14] *I. M. Anderson, M. Juras*. Duke Math. J. 1997. V. 89. № 2. P. 351.
- [15] *А. П. Веселов, А. Б. Шабат*. Функци. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1.
- [16] *V. G. Papageorgiou, F. W. Nijhoff, H. W. Capel*. Phys. Lett. A. 1990. V. 147. № 2, 3. P. 106.
- [17] *И. А. Дынкин, С. П. Новиков*. УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175.
- [18] *R. Hirota*. J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 11. P. 3785.
- [19] *T. Miwa*. Proc. Japan Acad. 1982. V. 58. P. 9.
- [20] *D. Levi, L. Pilloni, P. M. Santini*. J. Phys. A. 1981. V. 14. № 7. P. 1567.
- [21] *A. Ramani, B. Grammaticos, J. Satsuma*. Phys. Lett. A. 1992. V. 169. P. 323.
- [22] *И. Г. Корепанов*. Интегрируемые системы в дискретном пространстве-времени и неоднородные модели двумерной статистической физики. Дисс. д.ф.-м.н. Санкт-Петербург, 1995; solv-int/9506003.
- [23] *A. B. Shabat*. Phys. Lett. A. 1995. V. 200. P. 121.

Поступила в редакцию 16.II.1999 г.