Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Манько, Классические пропагаторы квадратичных квантовых систем,
ТМФ, 1999, том 121, номер 2, 285–296

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:51:13

© 1999 г.

О. В. Манько*

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОПАГАТОРЫ КВАДРАТИЧНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Новый формализм квантовой механики, основанный на вероятностном представлении состояния, применен к процессу движения иона в ловушках и к процессу вынужденного комбинационного рассеяния. Найден в явном виде классический пропагатор для случая свободного движения частицы, гармонического осциллятора, иона в ловушке Пауля и в ловушке Пеннинга, а также для процесса вынужденного комбинационного рассеяния.

ВВЕДЕНИЕ

Важную роль в физике играют линейные колебания взаимодействующих осцилляторов, моделирующие поведение многих классических и квантовых систем. Гамильтониан таких колебательных систем является квадратичной формой по координатам и скоростям (импульсам) осцилляторов в случае классических колебаний и квадратичной формой по операторам координат и импульсов в квантовой теории. Мы назовем такие системы системами с квадратичными гамильтонианами.

Волновая функция квантовых колебательных систем, если она задана в начальный момент времени, определяется в любой момент времени интегралом по начальным координатам от произведения этой начальной волновой функции и функции Грина уравнения Шредингера. Функция Грина определяет эволюцию волновой функции и называется квантовым пропагатором. Квантовый пропагатор находится из эволюционного уравнения Шредингера и является комплексной амплитудой вероятности перехода из начального в конечное положение системы.

Матрица плотности чистого состояния квантовой системы – это произведение волновой функции координаты на комплексно-сопряженную волновую функцию другой координаты. Поэтому эволюция матрицы плотности определяется другим квантовым пропагатором, который является произведением функции Грина уравнения Шредингера на ее комплексно-сопряженную функцию от другого аргумента. Квантовый пропагатор для матрицы плотности в общем случае – комплексная величина.

Недавно [1, 2] была предложена новая формулировка квантовой механики, в которой вместо волновой функции и матрицы плотности (функции Вигнера) состояние взаимо-

* Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: omanko@sci.lebedev.ru

действующих осцилляторов описывается распределением вероятностей их координат (маргинальным распределением), измеренных в ансамбле систем отсчета в классическом фазовом пространстве осцилляторов, которые связаны друг с другом поворотом и изменением масштаба осей начальной системы отсчета. Распределение вероятностей, которое задает квантовое состояние, эволюционирует согласно новому уравнению (аналогу уравнения Шредингера), по форме это обобщенное классическое уравнение Фоккера–Планка. Эволюция маргинального распределения может быть описана с помощью пропагатора (называемого “классическим пропагатором”), являющегося функцией Грина обобщенного классического уравнения Фоккера–Планка. Классический пропагатор содержит всю информацию о квантовой системе и связан с квантовым пропагатором интегральным преобразованием. Физический смысл классического пропагатора заключается в том, что он задает вероятность перехода между начальными и конечными координатами осцилляторов, рассматриваемых в ансамбле систем отсчета в фазовом пространстве. Поэтому классический пропагатор является не только более простой действительной величиной (в отличие от квантового пропагатора), но и положительной величиной, при этом квантовый пропагатор определяется полностью классическим пропагатором [3].

Цель настоящей работы – построить в явном виде классические пропагаторы на примерах квантовых систем, объединенных общим свойством. Эти системы описываются квадратичными гамильтонианами.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 квантовое состояние, обычно описываемое матрицей плотности или функцией Вигнера, представлено в рамках новой формулировки квантовой механики [1, 2] как распределение вероятностей (маргинальное распределение). В разделе 2 в общей постановке рассмотрены классический пропагатор и его связь с квантовым пропагатором. В разделе 3 изучен классический пропагатор квантовой квадратичной системы и приведены простейшие примеры таких систем: свободная частица и одномерный квантовый осциллятор. В разделе 4 приведены примеры классического пропагатора нестационарной одномерной квадратичной системы (ион в ловушке Пауля) и двумерной квадратичной системы (ион в ловушке Пеннинга). В разделе 5 получен классический пропагатор для еще одного нестационарного квадратичного гамильтониана (с двумя взаимодействующими модами), описывающего вынужденное комбинационное рассеяние.

1. КВАНТОВОЕ СОСТОЯНИЕ КАК РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Известно (см., например, [4]), что распределение $w(X, \mu, \nu)$ наблюдаемой

$$\hat{X} = \mu \hat{q} + \nu \hat{p} \quad (1)$$

связано с функцией Вигнера $W(q, p)$ соотношением

$$w(X, \mu, \nu) = \int \exp[-ik(X - \mu q - \nu p)] W(q, p) \frac{dk dq dp}{(2\pi)^2} \quad (2)$$

($\hbar = 1$). Операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ являются операторами координаты и импульса. Распределение w нормализовано по переменной X . Оно зависит от двух дополнительных действительных параметров μ и ν . Физический смысл этих параметров состоит в том, что они описывают ансамбль систем координат, повернутых друг относительно друга с измененным масштабом осей. Переменная X измеряется в этом ансамбле систем координат. При $\mu = \cos \varphi$ и $\nu = \sin \varphi$ распределение (2) превращается в распределение для выходного сигнала при гомодинном детектировании, измеряемого в оптической томографии [5]. Мы можем написать формулу, обратную формуле (2), и выразить функцию Вигнера квантового состояния через маргинальное распределение [4]

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int w(X, \mu, \nu) \exp[-i(\mu q + \nu p - X)] d\mu d\nu dX. \quad (3)$$

Так как функция Вигнера полностью описывает квантовую систему, а распределение w определяет функцию Вигнера, можно полностью описать квантовое состояние системы классическим распределением компонент. Итак, мы можем сказать, что квантовое состояние системы задано, если в ансамбле систем координат, повернутых друг относительно друга, с различными масштабами осей в классическом фазовом пространстве задано распределение вероятности $w(X, \mu, \nu)$. Надо отметить, что в распределении w содержится избыточная информация. Для полного определения квантового состояния достаточно знать функцию $w(X, \mu, \nu)$ только при значениях параметров μ и ν , удовлетворяющих условию

$$\mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Данная область параметров относится к оптической томографии [5, 6], т.к. в ней параметры μ и ν заданы соотношениями $\mu = \cos \varphi$ и $\nu = \sin \varphi$, где угол поворота φ определяет положение системы координат в классическом фазовом пространстве.

2. КЛАССИЧЕСКИЙ ПРОПАГАТОР

В работе [2] была введена классическая плотность вероятности перехода системы из положения X' , измеренного в начальный момент времени $t = 0$ в системе координат, положение которой определяется в классическом фазовом пространстве параметрами μ' и ν' , в положение X , измеренное в момент времени t в системе координат, положение которой определяется в классическом фазовом пространстве параметрами μ и ν . Эта классическая плотность вероятности является классическим пропагатором уравнения эволюции для распределения w . Классический пропагатор – это ядро интегрального соотношения

$$w(X, \mu, \nu, t) = \int \Pi(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t) w(X', \mu', \nu', 0) dX' d\mu' d\nu'. \quad (4)$$

Можно найти связь между классическим пропагатором и квантовым пропагатором (функцией Грина) для матрицы плотности $\rho(X, X', t)$ в координатном представлении. Для чистого состояния с волновой функцией $\Psi(X, t)$ матрица плотности имеет вид

$$\rho(X, X', t) = \Psi(X, t) \Psi^*(X', t). \quad (5)$$

Функция Грина $G(X, Y, t)$ уравнения Шредингера связывает волновую функцию в начальный момент времени $t = 0$ и в момент времени t :

$$\Psi(X, t) = \int G(X, Y, t) \Psi(Y) dY. \quad (6)$$

Тогда матрица плотности (5) с учетом (6) может быть представлена в виде

$$\rho(X, X', t) = \int K(X, X', Y, Y', t) \rho(Y, Y', t = 0) dY dY', \quad (7)$$

где пропагатор $K(X, X', Y, Y', t)$ определяется функцией Грина

$$K(X, X', Y, Y', t) = G(X, Y, t) G^*(X', Y', t). \quad (8)$$

Так как связь между матрицей плотности и распределением w считается известной в любой момент времени t (см. (5) и (6)), мы можем получить следующее выражение для пропагатора:

$$\begin{aligned} K(X, X', Z, Z', t) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{|\nu'|} \exp \left\{ i \left(Y - \mu \frac{X + X'}{2} \right) - i \frac{Z - Z'}{\nu'} Y' + i \frac{Z^2 - Z'^2}{2\nu'} \mu' \right\} \times \\ \times \Pi(Y, \mu, X - X', Y', \mu', \nu', t) d\mu d\mu' dY dY' d\nu'. \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, мы выразили квантовый пропагатор через классический пропагатор. Следовательно, зная классический пропагатор распределения w , мы можем восстановить квантовый пропагатор для матрицы плотности квантового состояния, а, следовательно, полностью определить матрицу плотности квантового состояния. При выводе (9) использованы следующие формулы:

$$\begin{aligned} W(q, p) &= \frac{1}{2\pi} \int w(X, \mu, \nu) \exp[-i(\mu q + \nu p - X)] d\mu d\nu dX, \\ \rho(X, X') &= \frac{1}{2\pi} \int w(Y, \mu, X - X') \exp \left[i \left(Y - \mu \frac{X + X'}{2} \right) \right] d\mu dY, \\ w(X, \mu, \nu) &= \frac{1}{2\pi|\nu|} \int \rho(Z, Z') \exp \left[-i \frac{Z - Z'}{\nu} \left(X - \mu \frac{Z + Z'}{2} \right) \right] dZ dZ'. \end{aligned}$$

Данные формулы связывают распределение $w(X, \mu, \nu)$ с функцией Вигнера и с матрицей плотности в координатном представлении. Необходимо отметить, что существует формула, обратная формуле (9).

3. КВАДРАТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим одномерную систему с квадратичным эрмитовым гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(Q, BQ) + (C, Q), \quad (10)$$

где $Q = (\hat{p}, \hat{q})$ – вектор, элементами которого являются операторы координат и импульсов. Симметричная (2×2) -матрица B и действительный двумерный вектор C могут явно зависеть от времени. Для квадратичных систем существуют интегралы движения, линейные по операторам координат и импульсов [7, 8]:

$$I(t) = \Lambda(t)Q + \Delta(t). \quad (11)$$

Здесь действительная симплектическая (2×2) -матрица $\Lambda(t)$ и действительный вектор $\Delta(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\Lambda} = i\Lambda B\sigma_y, \quad \dot{\Delta} = i\Lambda\sigma_y C, \quad (12)$$

где

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

при начальных условиях

$$\Lambda(0) = 1, \quad \Delta(0) = 0. \quad (13)$$

Используя (2) и известные свойства функции Вигнера [7], классический пропагатор можно записать в явном матричном виде

$$\Pi(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t) = \delta(X - X' + \mathcal{N}\Lambda^{-1}\Delta)\delta(\mathcal{N}' - \mathcal{N}\Lambda^{-1}) \quad (14)$$

с векторами $\mathcal{N} = (\nu, \mu)$ и $\mathcal{N}' = (\nu', \mu')$. Если линейные слагаемые в гамильтониане квадратичной системы отсутствуют, т.е. $C = 0$, то классический пропагатор приобретает вид

$$\Pi(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t) = \delta(X - X')\delta(\mathcal{N}' - \mathcal{N}\Lambda^{-1}). \quad (15)$$

Итак, если известны интегралы движения, т.е. найдены матрица $\Lambda(t)$ и вектор $\Delta(t)$, то классический пропагатор также известен.

Рассмотрим различные примеры квадратичных систем.

Для свободного движения частицы гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} \quad (16)$$

и два интеграла движения равны [7, 8]

$$\hat{p}_0(t) = \hat{p}, \quad \hat{q}_0(t) = \hat{q} - \hat{p}t. \quad (17)$$

В случае свободного движения $\Delta(t) = 0$ и симплектическая (2×2) -матрица

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Итак, мы имеем

$$\mathcal{N}\Lambda^{-1}(t) = (\nu + \mu t, \mu). \quad (19)$$

Классический пропагатор в случае свободного движения частицы имеет вид

$$\Pi^{(f)}(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t) = \delta(X - X')\delta(\nu' - \nu - \mu t)\delta(\mu - \mu'). \quad (20)$$

Для гармонического осциллятора линейные интегралы движения известны [7, 8] и матрица

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Это значит, что в случае гармонического осциллятора мы можем записать

$$\mathcal{N}\Lambda^{-1}(t) = (\nu \cos t - \mu \sin t, \nu \sin t + \mu \cos t). \quad (22)$$

Итак, классический пропагатор в случае гармонического осциллятора имеет вид

$$\Pi^{(os)}(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t) = \delta(X - X')\delta(\nu' - \nu \cos t + \mu \sin t)\delta(\mu' - \nu \sin t - \mu \cos t). \quad (23)$$

4. ИОН В ЛОВУШКЕ

Здесь рассматриваются ионы, находящиеся в ловушке Пауля [9] (см. также [10]) или в асимметричной ловушке Пеннинга.

Сначала исследуются свойства параметрического осциллятора, т.к. ион в ловушке Пауля описывается моделью параметрического осциллятора [11, 12]. Гамильтониан параметрического осциллятора с произвольной зависимостью частоты от времени имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{2dx^2} + \frac{\omega^2(t)x^2}{2}, \quad (24)$$

где $\hbar = m = \omega(0) = 1$.

Интегралы движения, явно зависящие от времени, были найдены в работе [13]:

$$A = \frac{i}{\sqrt{2}} [\varepsilon(t)\hat{p} - \dot{\varepsilon}(t)\hat{q}], \quad (25)$$

где $\varepsilon(t)$ – решение задачи Коши

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \omega^2(t)\varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon(0) = 1, \quad \dot{\varepsilon}(0) = i. \quad (26)$$

Интегралы движения удовлетворяют бозонным коммутационным соотношениям

$$[A, A^\dagger] = 1. \quad (27)$$

Для иона в ловушке зависимость частоты от времени имеет вид [11]

$$\omega^2(t) = 1 + \kappa^2 \sin^2 \Omega t. \quad (28)$$

Решения уравнения Шредингера, представленные в виде гауссовских волновых пакетов, могут быть интерпретированы как когерентные состояния иона [13], т.к. они являются собственными состояниями оператора A (25). Когерентные состояния иона равны

$$\Psi_\alpha(x, t) = \Psi_0(x, t) \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\alpha^2 \varepsilon^*(t)}{2\varepsilon(t)} + \frac{\sqrt{2}\alpha x}{\varepsilon} \right\}, \quad (29)$$

где

$$\Psi_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(t)\sqrt{\pi}}} \exp \frac{i\dot{\varepsilon}(t)x^2}{2\varepsilon(t)} \quad (30)$$

может быть интерпретирована как волновая функция аналога основного состояния параметрического осциллятора. Число α является комплексным. Дисперсии координаты и импульса параметрического осциллятора в когерентном состоянии (29) определяются формулами

$$\sigma_{qq} = \frac{|\varepsilon(t)|^2}{2}, \quad \sigma_{pp} = \frac{|\dot{\varepsilon}(t)|^2}{2}, \quad (31)$$

а коэффициент корреляции r координаты и импульса, описывающий их статистическую зависимость, имеет значение, минимизирующее соотношение неопределенностей Шредингера [14]:

$$\sigma_{qq}\sigma_{pp} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-r^2}, \quad r = \frac{\sigma_{pq}}{\sqrt{\sigma_{qq}\sigma_{pp}}}. \quad (32)$$

Если $\sigma_{qq} < 1/2$ или $\sigma_{pp} < 1/2$, то возникает сжатие.

Для систем с гамильтонианами вида

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{q})$$

в работе [1, 2] было получено новое эволюционное уравнение для маргинального распределения. Это эволюционное уравнение является аналогом уравнения Шредингера для волновой функции или уравнения Фоккера–Планка для матрицы плотности, используемых для описания эволюции квантовой системы. В случае движения иона в ловушке Паули эволюционное уравнение приобретает вид

$$\dot{w} - \mu \frac{\partial}{\partial \nu} w + \omega^2(t) \nu \frac{\partial}{\partial \mu} w = 0. \quad (33)$$

Распределение w наблюдаемой X , которая имеет смысл координаты центра иона, находящегося в когерентном состоянии (29), является решением эволюционного уравнения и имеет вид

$$w_\alpha(X, \mu, \nu, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X(t)}} \exp \left\{ -\frac{(X - \bar{X})^2}{2\sigma_X(t)} \right\}, \quad (34)$$

где среднее значение X в соответствии с формулой (1) и с учетом формул (25) и (26) равно

$$\overline{X} = \mu \langle \hat{q} \rangle + \nu \langle \hat{p} \rangle, \quad (35)$$

а средние значения операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$ определяются формулами

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha \varepsilon^* + \alpha^* \varepsilon), \quad (36)$$

$$\langle \hat{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha \varepsilon^* - \alpha^* \varepsilon). \quad (37)$$

Дисперсия наблюдаемой X равна

$$\sigma_X(t) = \mu^2 \sigma_{qq} + \nu^2 \sigma_{pp} + 2\mu\nu \sigma_{pq}, \quad (38)$$

где σ_{qq} , σ_{pp} и σ_{pq} заданы формулами (31) и (32).

Найдем выражение для классического пропагатора иона в ловушке Пауля в рамках модели параметрического осциллятора (24). В этом случае $C = 0$, $\Delta = 0$, $Q = (p, q)$ и матрицы B и $\Lambda(t)$ имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \kappa^2 \sin^2 \Omega t \end{pmatrix},$$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^*) & -\frac{1}{2}(\dot{\epsilon} + \dot{\epsilon}^*) \\ -\frac{1}{2i}(\epsilon - \epsilon^*) & \frac{1}{2i}(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^*) \end{pmatrix}.$$

Итак, для классического пропагатора иона в ловушке получено выражение

$$\begin{aligned} \Pi(X, \mu, \nu, X', \mu', \nu', t) &= \delta(X - X') \delta \left(\nu' - \frac{1}{2i}(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^*)\nu - \frac{1}{2i}(\epsilon - \epsilon^*)\mu \right) \times \\ &\times \delta \left(\mu' - \frac{1}{2}(\dot{\epsilon} + \dot{\epsilon}^*)\nu - \frac{1}{2}(\epsilon + \epsilon^*)\mu \right). \end{aligned}$$

Классический пропагатор иона в ловушке Пауля удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Pi} - \mu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} + (1 + \kappa^2 \sin^2 \Omega t) \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = \delta(t) \delta(X - X') \delta(\mu - \mu') \delta(\nu - \nu').$$

Движение иона в ловушке Пауля в рамках схемы симплектической томографии было рассмотрено в [15, 16].

Следующим примером квадратичной системы является ион в асимметричной ловушке Пеннинга. Движение такого иона рассматривается в модели двумерного гармонического осциллятора с постоянными частотами.

В работах [17, 18] было предложено описывать движение иона в асимметричной ловушке Пеннинга гамильтонианом вида

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{\omega_c}{2}(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) + \frac{m}{2}(\omega_x^2 \hat{x}^2 + \omega_y^2 \hat{y}^2). \quad (39)$$

В данном случае магнитное поле перпендикулярно плоскости (x, y) , ω_c – циклотронная частота, а частоты ω_x и ω_y равны

$$\omega_x^2 = \frac{\omega_c^2}{2} - (1 + D)\frac{\omega_z^2}{2}, \quad \omega_y^2 = \frac{\omega_c^2}{2} - (1 - D)\frac{\omega_z^2}{2},$$

где D – параметр, описывающий аксиальную симметрию поля, а ω_z – аксиальная частота. Запишем гамильтониан (39) в форме (10). Векторы C и Δ в данном случае равны нулю, $Q = (p_x, p_y, x, y)$ и матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m} & 0 & 0 & -\frac{\omega_c}{4} \\ 0 & \frac{1}{2m} & \frac{\omega_c}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_c}{4} & \frac{\omega_x^2}{4} & 0 \\ -\frac{\omega_c}{4} & 0 & 0 & \frac{\omega_y^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\Lambda(t)$ является решением уравнения

$$\dot{\Lambda} = \Lambda \Sigma B,$$

где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы можем записать ее в виде

$$\Lambda(t) = \exp(B\Sigma t) = \begin{pmatrix} \Lambda_{11}(t) & \Lambda_{12}(t) & \Lambda_{13}(t) & \Lambda_{14}(t) \\ \Lambda_{21}(t) & \Lambda_{22}(t) & \Lambda_{23}(t) & \Lambda_{24}(t) \\ \Lambda_{31}(t) & \Lambda_{32}(t) & \Lambda_{33}(t) & \Lambda_{34}(t) \\ \Lambda_{41}(t) & \Lambda_{42}(t) & \Lambda_{43}(t) & \Lambda_{44}(t) \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу, обратную матрице $\Lambda(t)$:

$$\Lambda^{-1}(t) = \Lambda(-t) = \begin{pmatrix} \Lambda_{11}(-t) & \Lambda_{12}(-t) & \Lambda_{13}(-t) & \Lambda_{14}(-t) \\ \Lambda_{21}(-t) & \Lambda_{22}(-t) & \Lambda_{23}(-t) & \Lambda_{24}(-t) \\ \Lambda_{31}(-t) & \Lambda_{32}(-t) & \Lambda_{33}(-t) & \Lambda_{34}(-t) \\ \Lambda_{41}(-t) & \Lambda_{42}(-t) & \Lambda_{43}(-t) & \Lambda_{44}(-t) \end{pmatrix}.$$

Запишем классический пропагатор иона в ловушке Пеннинга в виде произведения шести дельта-функций Дирака:

$$\begin{aligned} \Pi(X, Y, \mu_x, \mu_y, \nu_x, \nu_y, X', Y', \mu'_x, \mu'_y, \nu'_x, \nu'_y, t) = \\ = \delta(X - X')\delta(Y - Y')\delta(\nu'_x - N'_1)\delta(\nu'_y - N'_2)\delta(\mu'_x - N'_3)\delta(\mu'_y - N'_4). \end{aligned}$$

Элементы вектора $(N'_1, N'_2, N'_3, N'_4) = N\Lambda^{-1}(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} N'_1 &= \nu_x \Lambda_{11}(-t) + \nu_y \Lambda_{21}(-t) + \mu_x \Lambda_{31}(-t) + \mu_y \Lambda_{41}(-t), \\ N'_2 &= \nu_x \Lambda_{12}(-t) + \nu_y \Lambda_{22}(-t) + \mu_x \Lambda_{32}(-t) + \mu_y \Lambda_{42}(-t), \\ N'_3 &= \nu_x \Lambda_{13}(-t) + \nu_y \Lambda_{23}(-t) + \mu_x \Lambda_{33}(-t) + \mu_y \Lambda_{43}(-t), \\ N'_4 &= \nu_x \Lambda_{14}(-t) + \nu_y \Lambda_{24}(-t) + \mu_x \Lambda_{34}(-t) + \mu_y \Lambda_{44}(-t). \end{aligned}$$

5. ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

Обсудим еще один пример квантовой системы с квадратичным гамильтонианом. В работах [18–23] было предложено описывать вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) с помощью феноменологического квадратичного гамильтониана

$$\hat{H} = \hbar\omega_S \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_{31} \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar\kappa [e^{-i\omega_L t} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + e^{i\omega_L t} \hat{b} \hat{a}]. \quad (40)$$

Гамильтониан (40) был использован для описания возбуждения одной стоксовой волны. Оператор $\hat{a}$ является оператором уничтожения фотона в стоксовой моде, ω_S – его частота. Оператор $\hat{b}$ – оператор уничтожения фонона и ω_{31} – частота фонона. Лазерная частота обозначена через ω_L , а константа связи, описывающая взаимодействие стоксовой и фононной мод, обозначена символом κ . Лазерное поле накачки (в рамках данной модели) считается классическим и входит в гамильтониан только в виде зависящих от времени коэффициентов перед перекрестными членами в гамильтониане. На частоту лазерного поля накладывается следующее условие:

$$\omega_L = \omega_{31} + \omega_S, \quad (41)$$

истощением накачки мы пренебрегаем. Кроме того, в рамках модели рассматривается возбуждение только стоксовой волны, а антистоксова компонента не учитывается.

Введем новые операторы, являющиеся комбинациями операторов рождения и уничтожения фотонов и фононов,

$$\begin{aligned} \hat{p}_a &= \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}, & \hat{q}_a &= \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \\ \hat{p}_b &= \frac{\hat{b} - \hat{b}^\dagger}{i\sqrt{2}}, & \hat{q}_b &= \frac{\hat{b} + \hat{b}^\dagger}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Интегралы движения стоксовой моды были приведены в [21]. Мы можем записать интегралы движения в матричном виде (14), где

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \text{ch } \kappa t \cos \omega_s t & -\text{sh } \kappa t \sin \omega_{31} t & \text{ch } \kappa t \sin \omega_s t & \text{sh } \kappa t \cos \omega_{31} t \\ -\text{sh } \kappa t \sin \omega_s t & \text{ch } \kappa t \cos \omega_{31} t & \text{sh } \kappa t \cos \omega_s t & \text{ch } \kappa t \sin \omega_{31} t \\ -\text{ch } \kappa t \sin \omega_s t & \text{sh } \kappa t \cos \omega_{31} t & \text{ch } \kappa t \cos \omega_s t & \text{sh } \kappa t \sin \omega_{31} t \\ \text{sh } \kappa t \cos \omega_s t & -\text{ch } \kappa t \sin \omega_{31} t & \text{sh } \kappa t \sin \omega_s t & \text{ch } \kappa t \cos \omega_{31} t \end{pmatrix}$$

и вектор $\Delta(t) = 0$. Соответствующая матрице $\Lambda(t)$ квадратная четырехмерная блочная матрица Σ состоит из двумерных квадратных нулевых матриц и двумерных единичных матриц I_2 , а именно,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Классический пропагатор для процесса ВКР имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \delta(X - X')\delta(Y - Y') \times \\
 & \times \delta(\nu'_a - \nu_a \operatorname{ch} \kappa t \cos \omega_s t - \nu_b \operatorname{sh} \kappa t \sin \omega_{13} t - \mu_a \operatorname{ch} \kappa t \sin \omega_s t + \mu_b \operatorname{sh} \kappa t \cos \omega_{13} t) \times \\
 & \times \delta(\nu'_b - \nu_a \operatorname{sh} \kappa t \sin \omega_s t - \nu_b \operatorname{ch} \kappa t \cos \omega_{13} t + \mu_a \operatorname{sh} \kappa t \cos \omega_s t - \mu_b \operatorname{ch} \kappa t \sin \omega_{13} t) \times \\
 & \times \delta(\mu'_a - \nu_a \operatorname{ch} \kappa t \sin \omega_s t - \nu_b \operatorname{sh} \kappa t \cos \omega_{13} t + \mu_a \operatorname{ch} \kappa t \cos \omega_s t - \mu_b \operatorname{sh} \kappa t \sin \omega_{13} t) \times \\
 & \times \delta(\mu'_b - \nu_a \operatorname{sh} \kappa t \cos \omega_s t - \nu_b \operatorname{ch} \kappa t \sin \omega_{13} t - \\
 & - \mu_a \operatorname{sh} \kappa t \sin \omega_s t + \mu_b \operatorname{ch} \kappa t \cos \omega_{13} t).
 \end{aligned} \tag{42}$$

Он представлен в виде произведения шести дельта-функций Дирака, аргументы которых явно зависят от времени. Описание ВКР на языке классического пропагатора или распределения w (в представлении вероятностей) в симплектической или оптической томографии позволяет приблизить язык обсуждения квантово-механических свойств процесса к классическому статистическому языку.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен метод симплектической томографии, и в рамках этого метода обсужден процесс измерения квантового состояния иона в ловушках Пауля и Пеннинга, а также процесс вынужденного комбинационного рассеяния. Показано, что состояние иона в ловушке может задаваться положительным распределением вероятности измеряемой переменной, а это значит, что квантово-механическая система может описываться методами классической теории вероятности и классической статистической физики. Полученные для квантовых систем маргинальные распределения эквивалентны положительным функциям распределения вероятностей измеряемой координаты, заданной в ансамбле различных систем отсчета в фазовом пространстве. Если, например, распределение вероятности положения центра иона будет измерено, то с использованием метода симплектической томографии становится возможным восстановление матрицы плотности квантового состояния иона в ловушке. Следовательно, распределения w и классические пропагаторы могут быть использованы для полного описания квантовых состояний и их эволюции для иона в ловушках и стоксовой волны при ВКР наравне, а при необходимости и вместо функций Вигнера и матриц плотности. Основным результатом работы являются формулы для классических пропагаторов нескольких интересных физических систем с квадратичными гамильтонианами в новом формализме квантовой механики.

Благодарности. Работа выполнялась при поддержке Министерства науки и технологии Российской Федерации в рамках Государственной программы “Оптика. Лазерная физика” и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-02-17222 и 96-02-18623).

Список литературы

- [1] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 1.
- [2] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Found. Phys. 1997. V. 27. P. 801.
- [3] *O. V. Manko, V. I. Manko.* J. Russ. Laser Res. 1997. V. 18. P. 407.
- [4] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Quantum Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 615.
- [5] *K. Vogel, H. Risken.* Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 2847.
- [6] *D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1244.
- [7] *V. V. Dodonov, V. I. Man'ko.* Invariants and Evolution of Nonstationary Quantum Systems. In: Proceedings of the Lebedev Physical Institute. V. 183. New York: Nova Science, 1989.
- [8] *И. А. Малкин, В. И. Манько.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
- [9] *O. V. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1997. V. 228. P. 29.
- [10] *P. J. Bardroff, C. Leichte, G. Schrade, W. P. Schleich.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 2198.
- [11] *R. J. Glauber.* The quantum mechanics of particles in time-dependent quadrupole fields. In: Recent Developments in Quantum Optics, Proceedings of the International Conference on Quantum Optics (Hyderabad, India, January 1991). Ed. R. Inguva. New York: Plenum Press, 1993. P. 1.
- [12] *G. Schrade, V. I. Man'ko, W. P. Schleich, R. J. Glauber.* Quantum Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 307.
- [13] *I. A. Malkin, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1970. V. 32. P. 243.
- [14] *E. Schrödinger.* Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. 1930. V. 24. P. 296.
- [15] *V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko.* Phys. Rev. A. 1994. V. 50. P. 813.
- [16] *O. V. Man'ko.* Symplectic tomography of nonclassical states of a trapped ion. Preprint IC/96/39. Trieste: ICTP, 1996; Los Alamos Report No. quant-ph/9604018; J. Russ. Laser Res. 1996. V. 17. P. 439; Symplectic tomography of Schrödinger cat states of a trapped ion. In: Proceedings of the Second International Symposium on Fundamental Problems in Quantum Mechanics (Oviedo, Spain, July 1996). Eds. M. Ferrero and A. van der Merwe. Kluwer Academic Press, 1997. P. 225; Symplectic tomography of nonlinear Schrödinger cats of a trapped ion. In: Proceedings of the Fifth International Conference "Squeezed States and Uncertainty Relations" (Balatonfüred, Hungary, May 1997). Eds. D. Han, J. Janszky, Y. S. Kim, V. I. Man'ko. NASA Conference Publication, NASA/CP-1998-206855. Greenbelt, Maryland: Goddard Space Flight Center, 1998. P. 309.
- [17] *L. S. Brown, G. Gabrielse.* Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 233.
- [18] *O. Castanos, S. Hacyan, R. Lopez-Pena, V. I. Man'ko.* J. Phys. A: Math. Gen. 1998. V. 31. P. 1227.
- [19] *S. Kielich.* Progr. Opt. 1983. V. 20. P. 156.
- [20] *M. G. Raymer, I. A. Walmsley.* Progr. Opt. 1990. V. 28. P. 182.
- [21] *O. V. Man'ko, N. V. Tcherniega.* Photon distribution function for Stokes wave for stimulated Raman scattering. Preprint IC/97/35 ICTP. Trieste: ICTP, 1997; J. Russ. Laser Res. 1997. V. 18. P. 479.
- [22] *D. F. Walls.* Z. Phys. 1970. V. 234. P. 331.
- [23] *D. F. Walls.* Z. Phys. 1970. V. 237. P. 224.

Поступила в редакцию 10.I.1999 г.