Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, Спектральные свойства псевдорелятивистской системы двух частиц с конечными массами, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 2, 297–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:20:11

© 1999 г.

С. А. Вугальтер*, Г. М. Жислин*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПСЕВДОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ С КОНЕЧНЫМИ МАССАМИ

Исследован дискретный спектр гамильтониана псевдорелятивистской системы двух частиц с конечными массами при фиксации полного момента p системы для потенциалов взаимодействия, имеющих при больших $|r_{12}|$ вид $Z|r_{12}|^{-\gamma}$, где $Z < 0$, $0 < \gamma \leq 2$. В случае $\gamma < 2$ найден главный член спектральной асимптотики; при $\gamma = 2$ получены условия конечности и бесконечности дискретного спектра, зависящие (при некоторых Z) от фиксированного момента p , что принципиально отличает рассматриваемую ситуацию от нерелятивистской.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе изучается спектр двухчастичной системы типа атома водорода с псевдорелятивистской кинетической энергией. Массы частиц предполагаются конечными. В отличие от нерелятивистского случая псевдорелятивистский гамильтониан H (см. ниже (1.1)) не допускает отделения движения центра масс разделением переменных. Вместо такого отделения применяют фиксацию полного момента p системы и после этого исследуют спектральные свойства полученного гамильтониана H_p (см. ниже (1.2)). Локализация существенного спектра оператора H_p изучалась в работе [1], результаты о дискретном спектре отсутствовали.

В настоящей статье устанавливается структура дискретного спектра $\sigma_d(H_p)$ оператора H_p для потенциалов взаимодействия, имеющих при больших $|x|$ вид $Z|x|^{-\gamma}$, где $Z < 0$, $0 < \gamma \leq 2$. При любом $\gamma < 2$ доказана бесконечность множества $\sigma_d(H_p)$ и найден главный член спектральной асимптотики, включая и характер его зависимости от p при любых p . В случае $\gamma = 2$ доказано, что в зависимости от Z спектр $\sigma_d(H_p)$ может быть или бесконечным при всех p , или конечным при $|p| < p'$ и бесконечным при $|p| > p''$, где p' , p'' – некоторые числа (см. ниже теорему 2). Таким образом, впервые не только найден дискретный спектр двухчастичной псевдорелятивистской системы, но

* Научно-исследовательский радиопизический институт, Нижний Новгород, Россия

и установлено, что в отличие от нерелятивистских систем его структура определяется как свойствами самой системы, так и фиксированным значением полного момента.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Пусть $m_i, r_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ – масса и координаты i -й частицы, $m_i < +\infty$, $i = 1, 2$; $M = m_1 + m_2$, $r_{12} = r_1 - r_2$. Рассмотрим гамильтониан вида

$$H = \sqrt{-\Delta_1 + m_1^2} + \sqrt{-\Delta_2 + m_2^2} + V(r_{12}), \quad (1.1)$$

где Δ_i – лапласиан по координатам i -й частицы, $V(r_{12})$ – потенциал взаимодействия частиц между собой, $V(r_1) = Z|r_1|^{-\gamma}$ при $|r_1| \geq A_0$, $0 \geq V(r_1) \geq \beta|r_1|^{-1}$ при $|r_1| \leq A_0$, $V(r_1) \in \mathcal{L}_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$; $\beta > -2/\pi$, $A_0 > 0$, $Z < 0$, $0 < \gamma \leq 2$ – некоторые константы, и система единиц выбрана так, что постоянная Планка и скорость света равны единице. При сделанных предположениях оператор H ограничен снизу [2].

1.2. Кинетическую часть оператора H удобнее записать в импульсном представлении

$$\sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2},$$

где p_i – импульс i -й частицы. Поскольку отделение движения центра масс изучаемой системы невозможно, то вместо него мы, следуя [1], фиксируем значение полного импульса системы $p = p_1 + p_2$ и редуцируем оператор H на собственное пространство оператора импульса, отвечающее фиксированному p (это можно сделать, так как оператор H коммутирует с оператором полного импульса). Обозначим редуцированный оператор через $\mathcal{H}_p$. Его можно записать в виде

$$\mathcal{H}_p = T(q, p) + V(x),$$

где

$$T(q, p) = \sqrt{(p_0 m_1 - q)^2 + m_1^2} + \sqrt{(p_0 m_2 + q)^2 + m_2^2}, \quad p_0 = pM^{-1}.$$

Здесь p является фиксированным трехмерным вектором, а переменные $q = (q_1, q_2, q_3)$ и $x = (x_1, x_2, x_3) = r_1 - r_2$ соответствуют друг другу в импульсном и координатном пространствах. Оператор $\mathcal{H}_p$ действует в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$. Расширим его по Фридрихсу с C_0^∞ до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение.

Отметим, что для оператора $\mathcal{H}_p$ использована удобная смешанная форма записи: кинетическая часть действует в импульсном пространстве, а потенциальная – в координатном. При этом оператору умножения на $V(x)$ в координатном пространстве отвечает в импульсном представлении интегральный оператор с ядром $\widehat{V}(q - x)$, а оператору умножения на $T(q, p)$ в импульсном пространстве соответствует в координатном представлении интегральный оператор с ядром $T^\circ(x - q; p)$ (здесь $\widehat{V}(q)$ – фурье-образ функции $V(x)$, $T^\circ(x; p)$ – прообраз функции $T(q, p)$). Поэтому оператор $\mathcal{H}_p$ является нелокальным (независимо от представления).

1.3. Согласно [1] существенный спектр оператора $\mathcal{H}_p$ совпадает с полусью $[\mu(p), +\infty)$, где

$$\mu(p) = \min_q T(q, p) = M(|p_0|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим

$$T_0(q, p) = T(q, p) - \mu(p) \otimes I,$$

где I — единичный оператор в $\mathbb{R}^3$, и в дальнейшем вместо оператора $\mathcal{H}_p$ будем рассматривать оператор

$$H_p = T_0(q, p) + V(x), \quad (1.2)$$

у которого существенный спектр начинается от точки 0. Обозначим через $N(\lambda; \Gamma)$ размерность линейной оболочки собственных векторов произвольного самосопряженного оператора Γ , отвечающих его собственным значениям, не превосходящим λ .

Пусть для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} h_\varepsilon^+ &= -(1 - \varepsilon)d(p)D(p) + (1 + \varepsilon)^2 V_{R_0}(x), \\ h_\varepsilon^- &= -(1 + \varepsilon)d(p)D(p) + (1 - \varepsilon)V_{R_0}(x), \end{aligned}$$

где

$$D(p) = (|p_0|^2 + 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad d(p) = \frac{M}{2m_1 m_2} (|p_0|^2 + 1)^{-\frac{3}{2}},$$

$V_{R_0}(x) = V(x)$ при $|x| \geq R_0$, $V_{R_0}(x) \equiv 0$ при $|x| < R_0$, R_0 — некоторая константа, зависящая от ε .

1.4. Главным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда можно указать такие константы $c_\varepsilon > 0$ и $\lambda_0 > 0$, что для всех $\lambda < 0$, $|\lambda| < \lambda_0$ выполняется

$$N(\lambda; h_\varepsilon^-) \leq N(\lambda; H_p) \leq N(\lambda; h_\varepsilon^+) + c_\varepsilon.$$

Применяя для нахождения асимптотических оценок величин $N(\lambda; h_\varepsilon^\pm)$ известные результаты (см. работы [3] при $\gamma < 2$, [4] при $\gamma = 2$), мы выводим из теоремы 1 следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. А. Пусть $\gamma < 2$. Тогда при любом фиксированном p

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0-0} \frac{N(\lambda; H_p)}{G(\lambda)} = 1,$$

где

$$G(\lambda) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{2}}}{M^{\frac{3}{2}}} |Z|^{\frac{3}{\gamma}} |\lambda|^{\frac{3}{2} - \frac{3}{\gamma}} (|p_0|^2 + 1)^{\frac{5}{4}} B\left(\frac{3}{\gamma} - \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \gamma^{-1},$$

$B(\tau_1, \tau_2)$ – бета-функция.

Б. Пусть $\gamma = 2$ и $8|Z|m_1m_2 > M$. Тогда спектр $\sigma_d(H_p)$ бесконечен при любом p и

$$G_2 \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0-0} \frac{N(\lambda; H_p)}{|\ln |\lambda||} \leq \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0-0} \frac{N(\lambda; H_p)}{|\ln |\lambda||} \leq G_1, \quad (1.3)$$

где

$$G_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{l_i} (2l+1) \sqrt{a_i - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad l_i = \left[\sqrt{a_i} - \frac{1}{2} \right],$$

$$a_1 = \frac{|Z|}{d(p)}, \quad a_2 = a_1(|p_0|^2 + 1)^{-1}.$$

В. Пусть $\gamma = 2$ и $8|Z|m_1m_2 < M$. Тогда спектр $\sigma_d(H_p)$ конечен при

$$|p| < p' = \left[\left(\frac{M}{8m_1m_2|Z|} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

и бесконечен при

$$|p| > p'' = \left[\left(\frac{M}{8m_1m_2|Z|} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

и для $|p| > p''$ выполняются оценки (1.3).

1.5. ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от случая $\gamma < 2$ при $\gamma = 2$ теорема 2 дает не главный член спектральной асимптотики оператора H_p , а лишь его оценки сверху и снизу. Это вызвано тем, что при $\gamma = 2$ нам не известны асимптотики величин $N(\lambda; h_\epsilon^\pm)$, через которые в теореме 1 выражается величина $N(\lambda; H_p)$. Поэтому для оценивания величины $N(\lambda; H_p)$ мы вынуждены использовать грубые оценки операторов $h_\epsilon^\pm$ через операторы вида $-d_1\Delta + d_2V_{R_0}(x)$, для которых главные члены спектральной асимптотики найдены в работе [4].

1.6. Сравним структуру спектра релятивистского гамильтониана H_p с известной структурой спектра нерелятивистского гамильтониана

$$h_p = \frac{1}{2m_1} \left(\frac{pm_1 - q}{M} \right)^2 + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{pm_2 + q}{M} \right)^2 + V(x)$$

рассматриваемой системы при фиксации момента p .

Сдвиги начала сплошного спектра от точки 0 для операторов h_p и H_p различны и составляют соответственно $+|p|^2/2M$ и $+M(\sqrt{|p|^2/M^2 + 1})$. В то же время порядок возрастания числа собственных значений при подходе к сплошному спектру при $\gamma < 2$ в обоих случаях одинаков и определяется множителем $|\lambda|^{(3/2-3/\gamma)}$, где $|\lambda|$ – расстояние до начала сплошного спектра. Однако в псевдорелятивистском случае коэффициент перед этим множителем зависит от $|p|$, а в нерелятивистском не зависит. Особенно значительны различия в спектральных свойствах операторов h_p и H_p при $\gamma = 2$ и $8|Z|m_1m_2 < M$. В этом случае спектр $\sigma_d(h_p)$ конечен и не зависит от p (если не учитывать сдвиг всего спектра на $|p|^2/2M$), в то время как спектр $\sigma_d(H_p)$ существенно зависит от p : он конечен при $|p| < p'$ и бесконечен при $|p| > p''$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

2.1. Для каждого фиксированного $\lambda < 0$ по произвольному $\varepsilon > 0$ мы строим такие подпространства $M_1(\lambda; \varepsilon)$ и $M_2(\lambda; \varepsilon)$, что

$$(H_p \psi, \psi) \geq \lambda \|\psi\|^2 \quad \text{при } \psi \perp M_1(\lambda, \varepsilon), \quad (2.1)$$

$$(H_p \psi, \psi) \leq \lambda \|\psi\|^2 \quad \text{при } \psi \in M_2(\lambda, \varepsilon) \quad (2.2)$$

и

$$\dim M_1(\lambda; \varepsilon) \leq N(\lambda; h_\varepsilon^+) + c_\varepsilon, \quad \dim M_2(\lambda; \varepsilon) \geq N(\lambda; h_\varepsilon^-),$$

где c_ε — некоторая константа. Из этих неравенств и будет следовать утверждение теоремы.

2.2. Начнем с построения $M_1(\lambda; \varepsilon)$. Пусть $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$. Оценим снизу квадратичную форму $(H_p \psi, \psi)$.

Пусть $R_0 > 0$ — константа, которая будет выбрана позже, $u(|x|)$, $v(|x|)$ — две гладкие функции такие, что $u^2(|x|) + v^2(|x|) = 1$, $u(|x|) = 1$ при $|x| \leq R_0$, $u(|x|) = 0$ при $|x| \geq 2R_0$. Усилив локализационную лемму из работы [1], по произвольному $\varepsilon_0 > 0$ выберем функции $u(|x|)$, $v(|x|)$ и число $R_0 > 0$ так, что для всех функций $\psi(x)$

$$(H_p \psi, \psi) \geq L_1[\psi_1] + L_2[\psi_2], \quad (2.3)$$

где $\psi_1 = \psi u$, $\psi_2 = \psi v$,

$$\begin{aligned} L_1[\psi_1] &= (H_p \psi_1, \psi_1) - c \|\psi_1\|^2, \\ L_2[\psi_2] &= (H_p \psi_2, \psi_2) - \varepsilon_0 \| |x|^{-1} \psi_2 \|^2, \end{aligned}$$

константа c не зависит от ψ и $c \rightarrow \infty$ при $\varepsilon_0 \rightarrow 0^1$.

Оценим члены в правой части (2.3), начиная с функционала $L_1[\psi_1]$. Поскольку $\beta > -2/\pi$, то согласно [2] мы можем выбрать $\delta_0 > 0$ так, что оператор $(1 - \delta_0)T_0(q, p) + V(x)$ полуограничен снизу, и, следовательно, для некоторой константы c_1 , не зависящей от функции ψ_1 , выполняется

$$L_1[\psi_1] \geq \delta_0 (T_0(q, p) \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1) - (c + c_1) \|\psi_1\|^2. \quad (2.4)$$

Здесь, как и ранее, $\hat{g}(q)$ есть фурье-образ функции $g(x)$, где $x \in \mathbb{R}^3$.

¹⁾ Если в потенциале $V(x)$ показатель степени $\gamma < 2$, то для доказательства достаточно применить локализационную лемму из работы [1] без изменений: тогда в функционале $L_2[\psi]$ вместо ε_0 надо писать константу c_0 , не зависящую от ψ и R_0 .

2.3. Пусть $K(R_0) = \{x | x = (x_1, x_2, x_3), |x_j| \leq 2R_0, j = 1, 2, 3\}$. Обозначим через $M'_1(N)$ линейную оболочку собственных функций оператора Δ в $K(R_0)$ с нулевым граничным условием при $|x_j| = 2R_0, j = 1, 2, 3$, отвечающих всем собственным значениям этого оператора, не превосходящим N . Пусть $\psi(x) \perp M'_1(N)$, $\text{supp } \psi \subset K(R_0)$. Оценим снизу величину $(T_0(q, p)\hat{\psi}, \hat{\psi})$. Пусть $A_1 > 0$ — произвольное фиксированное число. В силу леммы (см. ниже п. 2.8) при $N > N(A_1)$ выполняется

$$\|\hat{\psi}\|_{|q| \geq A_1}^2 \geq \frac{1}{2} \|\hat{\psi}\|^2,$$

причем число $N(A_1)$ не зависит от ψ . Поэтому

$$(T_0(q, p)\hat{\psi}, \hat{\psi}) \geq (T_0(q, p)\hat{\psi}, \hat{\psi})_{|q| \geq A_1} \geq \frac{1}{2} b(A_1) \|\hat{\psi}\|^2,$$

где

$$b(t) = \min_{q, |q| \geq t} T_0(q, p). \quad (2.5)$$

В силу (2.4) при $\psi_1 \perp M'_1(N)$, $N > N(A_1)$,

$$L_1[\psi] \geq \left(\frac{1}{2} \delta_0 b(A_1) - c - c_1 \right) \|\psi\|^2. \quad (2.6)$$

Поскольку функция $b(A_1)$ неограниченно возрастает при $A_1 \rightarrow +\infty$, то при большом A_1 , $N > N(A_1)$ и $\psi_1 \perp M'_1(N)$ из (2.6) следует оценка

$$L_1[\psi_1] \geq 0. \quad (2.7)$$

2.4. Перейдем теперь к оценке снизу функционала $L_2[\psi_2]$, входящего в правую часть неравенства (2.3). Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Заметим прежде всего, что если число R_0 в определении функций $u(|x|)$, $v(|x|)$ выбрано достаточно большим, то можно взять $\varepsilon_0 < \varepsilon$, и при $x \in \text{supp } \psi_2$ ($\psi_2 = \psi v(|x|)$) выполняется

$$\varepsilon_0 |x|^{-2} < \varepsilon |V(x)|.$$

Поэтому

$$L_2[\psi_2] \geq L_3[\psi_2] \equiv (T_0(p, q)\hat{\psi}_2, \hat{\psi}_2) + (1 + \varepsilon)(V_{R_0}\psi_2, \psi_2), \quad (2.8)$$

где $V_{R_0}(x) = V(x) < 0$ при $|x| \geq R_0$, $V_{R_0}(x) \equiv 0$ при $|x| < R_0$.

Пусть $\alpha > 0$, $\chi_\alpha(q) \equiv 1$ при $|q| \leq \alpha$, $\chi_\alpha(q) = 0$ при $|q| > \alpha$. Обозначим через $\psi_{2,1}(x)$ прообраз функции $\hat{\psi}_{2,1}(q) \equiv \chi_\alpha(q)\hat{\psi}_2(q)$ и положим $\psi_{2,2} = \psi_2 - \psi_{2,1}$. Тогда

$$\begin{aligned} L_3[\psi_2] &\geq (T_0(p, q)\hat{\psi}_{2,1}, \hat{\psi}_{2,1}) + (1 + \varepsilon)^2 (V_{R_0}\psi_{2,1}, \psi_{2,1}) + \\ &+ (T_0(p, q)\hat{\psi}_{2,2}, \hat{\psi}_{2,2}) + (2 + \varepsilon + \varepsilon^{-1})(V_{R_0}\psi_{2,2}, \psi_{2,2}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь мы использовали неравенство

$$|2 \text{Re}(V_{R_0}\psi_{2,1}, \psi_{2,2})| \leq -\varepsilon (V_{R_0}\psi_{2,1}, \psi_{2,1}) - \frac{1}{\varepsilon} (V_{R_0}\psi_{2,2}, \psi_{2,2})$$

и отрицательность потенциала V_{R_0} при $|x| \geq R_0$.

2.5. По определению (2.5) величина $b(\alpha)$ положительна при любом $\alpha > 0$. Поэтому, зафиксировав малое $\alpha > 0$, мы можем выбрать число R_0 столь большим, что

$$(2 + \varepsilon + \varepsilon^{-1}) |V_{R_0}| < b(\alpha). \quad (2.10)$$

Так как при $q \in \text{supp } \widehat{\psi}_{2,2}$ выполняется $|q| > \alpha$, то, очевидно,

$$(T_0(p, q) \widehat{\psi}_{2,2}, \widehat{\psi}_{2,2}) \geq b(\alpha) \|\widehat{\psi}_{2,2}\|^2.$$

Отсюда и из (2.10) следует, что

$$(T_0(p, q) \widehat{\psi}_{2,2}, \widehat{\psi}_{2,2}) + (2 + \varepsilon + \varepsilon^{-1})(V_{R_0} \psi_{2,2}, \psi_{2,2}) \geq 0. \quad (2.11)$$

Для оценки входящих в (2.9) членов, содержащих $\widehat{\psi}_{2,1}(q)$, мы используем разложение функции $T_0(p, q)$ по переменным q_1, q_2, q_3 в окрестности точки $q = (0, 0, 0)$. Учитывая, что в этой точке функция $T_0(p, q)$ и производные $\partial T_0 / \partial q_i$, $i = 1, 2, 3$, обращаются в нуль, мы получим, что при $|q| \leq \alpha(\varepsilon)$

$$T_0(p, q) \geq (1 - \varepsilon) d T_1(q, p),$$

где $T_1(q, p) = q_3^2 + (|p_0|^2 + 1)(q_1^2 + q_2^2)$, $d = d(p) = (1/2)(1/m_1 + 1/m_2)(|p_0|^2 + 1)^{-3/2}$ и координатные оси выбраны так, что $p_0 = (0, 0, |p_0|)$. Далее считаем, что в определении функций $\widehat{\psi}_{2,1}, \widehat{\psi}_{2,2}$ число α взято равным $\alpha(\varepsilon)$. Тогда при $q \in \text{supp } \widehat{\psi}_{2,1}$ выполняется $|q| \leq \alpha(\varepsilon)$ и, следовательно,

$$L_3[\psi_2] \geq (1 - \varepsilon) d (T_1 \widehat{\psi}_{2,1}, \widehat{\psi}_{2,1}) + (1 + \varepsilon)^2 (V_{R_0} \psi_{2,1}, \psi_{2,1}) = (h_\varepsilon^+ \psi_{2,1}, \psi_{2,1}), \quad (2.12)$$

где

$$h_\varepsilon^+ = (1 - \varepsilon) d \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - (|p_0|^2 + 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right] + (1 + \varepsilon)^2 V_{R_0}(x) \quad (2.13)$$

и число $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым при достаточно большом R_0 . Пусть $M'(\lambda, \varepsilon)$ — линейная оболочка собственных функций оператора h_ε^+ , отвечающих его собственным значениям, меньшим $\lambda < 0$. Тогда при $\psi_{2,1} \perp M'(\lambda, \varepsilon)$

$$L_3[\psi_2] \geq \lambda \|\psi_{2,1}\|^2 \geq \lambda \|\psi\|^2. \quad (2.14)$$

В силу соотношений (2.3), (2.4), (2.7), (2.8), (2.12), (2.14)

$$(H_p \psi, \psi) \geq \lambda \|\psi\|^2 \quad (2.15)$$

при $\psi_1 \perp M'_1(N)$, $\psi_{2,1} \perp M'(\lambda, \varepsilon)$. Положим

$$M_1(\lambda, \varepsilon) = u M'_1(N) + v M''(\lambda, \varepsilon),$$

где $M''(\lambda, \varepsilon)$ — прообраз пространства $\chi_\alpha(q) \widehat{M}'(\lambda, \varepsilon)$, а $\widehat{M}'(\lambda, \varepsilon)$ — фурье-образ пространства $M'(\lambda, \varepsilon)$. В силу определения функций ψ_1, ψ_2 (п. 2.2) и $\psi_{2,1}$ (п. 2.4) при $\psi \perp M_1(\lambda, \varepsilon)$ выполняется $\psi_1 \perp M'_1(N)$, $\psi_{2,1} \perp M'(\lambda, \varepsilon)$ и, значит, справедливо (2.15). По построению и в силу (2.15)

$$N(\lambda; H_p) \leq \dim M_1(\lambda, \varepsilon) \leq N(\lambda; h_\varepsilon^+) + c_\varepsilon. \quad (2.16)$$

2.6. Переходим к оценке величины $N(\lambda; H_p)$ снизу. Пусть произвольное число $\varepsilon > 0$ фиксировано. Аналогично п. 2.5 получаем, что при $\alpha < \alpha(\varepsilon)$ и $|q| < \alpha$

$$T_0(q, p) \leq (1 + \varepsilon)dT_1(q, p). \quad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что для функций $\psi(x)$, для которых при $q \in \text{supp } \widehat{\psi}(q)$ выполняется неравенство $|q| \leq \alpha$, имеет место оценка

$$(H_p \psi, \psi) \leq (h(\varepsilon)\psi, \psi), \quad (2.18)$$

где

$$h(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)dT_1(q, p) + V_{R_0}(x). \quad (2.19)$$

Пусть $\widehat{M}'_2(\lambda, \varepsilon)$ – линейная оболочка собственных функций $\widehat{\psi}(q)$ оператора

$$h_\varepsilon^- = h(\varepsilon) - \varepsilon V_{R_0}(x),$$

отвечающих его собственным значениям, не превосходящим λ , функция $\chi_\alpha(q)$ определена в п. 2.4, $M'_2(\lambda, \varepsilon)$ и $M_2(\lambda, \varepsilon)$ – прообразы пространств $\widehat{M}'_2(\lambda, \varepsilon)$ и

$$\widehat{M}_2(\lambda, \varepsilon) := \chi_\alpha(q)\widehat{M}'_2(\lambda, \varepsilon).$$

Покажем, что при $\psi_2(x) \in M_2(\lambda, \varepsilon)$ выполняется неравенство (2.2).

2.7. Пусть $\psi \in M'_2(\lambda, \varepsilon)$, $\|\psi\| \neq 0$, ψ_2 – прообраз функции $\chi_\alpha(q)\widehat{\psi}$, $\psi_1 = \psi - \psi_2$, тогда

$$\begin{aligned} \lambda\|\psi\|^2 &\geq (h_\varepsilon^- \psi, \psi) = (h_\varepsilon^- \psi_1, \psi_1) + (h_\varepsilon^- \psi_2, \psi_2) + \\ &+ 2(1 - \varepsilon) \text{Re}(V_{R_0} \psi_1, \psi_2) \geq L_4[\psi_2] + L_5[\psi_1], \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} L_4[\psi_2] &= (h_\varepsilon^- \psi_2, \psi_2) + \varepsilon(V_{R_0} \psi_2, \psi_2) = (h(\varepsilon)\psi_2, \psi_2), \\ L_5[\psi_1] &= (h_\varepsilon^- \psi_1, \psi_1) + \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon}(V_{R_0} \psi_1, \psi_1). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$L_5[\psi_1] \geq (1 + \varepsilon)d(T_1(q, p)\psi_1, \psi_1) + \left((1 - \varepsilon) + \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon} \right) (V_{R_0} \psi_1, \psi_1).$$

Далее, аналогично тому, как это было сделано в п. 2.5, выберем число R_0 столь большим, чтобы

$$|(1 - \varepsilon + (1 - \varepsilon)^2 \varepsilon^{-1})V_{R_0}(x)| \leq \alpha^2(1 + \varepsilon)d.$$

Тогда $L_5[\psi_1] \geq 0$ и в силу (2.19), (2.20)

$$(h(\varepsilon)\psi_2, \psi_2) \leq \lambda\|\psi\|^2. \quad (2.21)$$

Правая часть неравенства (2.21) отрицательна, следовательно, $\psi_2 \neq 0$ и, значит,

$$\dim M_2(\lambda, \varepsilon) = \dim M'_2(\lambda, \varepsilon).$$

В силу (2.18), (2.21)

$$(H_p \psi_2, \psi_2) \leq \lambda\|\psi\|^2 \quad \forall \psi_2 \in M_2(\lambda, \varepsilon).$$

Так как по определению $\dim M_2(\lambda, \varepsilon) = N(\lambda; h_\varepsilon^-)$, то тем самым теорема доказана.

2.8. Пусть куб $K(R_0)$ и подпространство $M'_1(N)$ те же, что в п. 2.3.

ЛЕММА. Для любой функции $\psi(x) \in C_0^2(K(R_0))$, $\|\psi\| = 1$, $\psi \perp M'_1(N)$, и произвольного числа $A_1 > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{\psi}\|_{|q| \leq A_1} = 0 \quad (2.22)$$

равномерно относительно $\psi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям леммы, $l = \pi/2R_0$, $k = (k_1, k_2, k_3)$, $k_j = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, 3$, $f_k(x) = \sin lk_1 x_1 \sin lk_2 x_2 \sin lk_3 x_3$. По определению $M'_1(N)$ есть линейная оболочка всех функций $f_k(x)$, у которых

$$|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \leq N^2 l^{-2}.$$

Поскольку функция $\psi(x) \perp M'_1(N)$, то в ее разложении по функциям $f_k(x)$ могут присутствовать только слагаемые с $|k| > Nl^{-1}$, т.е. слагаемые, где хотя бы одно из чисел k_j больше $N_0 = (1/2)Nl^{-1}$. Следовательно, можно записать функцию $\psi(x)$ в виде

$$\psi = F_1 + F_2 + F_3, \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{k_1, k_1 > N_0} f_{1, k_1}(x_2, x_3) \sin lk_1 x_1, \\ F_2 &= \sum_{k_2, k_2 > N_0} f_{2, k_2}(x_1, x_3) \sin lk_2 x_2, \\ F_3 &= \sum_{k_3, k_3 > N_0} f_{3, k_3}(x_1, x_2) \sin lk_3 x_3 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (f_{2, k_2}(x_1, x_3), \sin lk_1 x_1)_{R^1(x_1)} &= 0 \quad \text{для } \forall x_3, \quad \forall k_1 > N_0, \\ (f_{3, k_3}(x_1, x_2), \sin lk_j x_j)_{R^1(x_j)} &= 0 \quad \text{для } \forall x_s, \quad s \neq j; \quad \forall k_j > N_0, \quad j, s = 1, 2. \end{aligned}$$

Очевидно, что $1 = \|\psi\|^2 = \|F_1\|^2 + \|F_2\|^2 + \|F_3\|^2$, $\|F_j\|^2 = \sum_{k_j, k_j > N_0} \|f_{j, k_j}\|^2 2R_0$. Применив к (2.23) преобразование Фурье, получим, что $\hat{\psi} = \hat{F}_1 + \hat{F}_2 + \hat{F}_3$, где

$$\hat{F}_j = \sum_{k_j, k_j > N_0} \hat{f}_{j, k_j}(q_s, q_t) \left\{ e^{i2lR_0 k_j} \frac{\sin 2R_0(lk_j - q_j)}{lk_j - q_j} + e^{-i2lR_0 k_j} \frac{\sin 2R_0(lk_j + q_j)}{lk_j + q_j} \right\} \frac{1}{i},$$

$s, t \neq j$; $s \neq t$; $s, t = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$. При $|q| \leq A_1$ и $N/4 = N_0 l/2 > A_1$ выражение в фигурных скобках не превосходит по модулю $4/k_j l$. Поэтому при большом N

$$|\widehat{F}_j|^2 \leq \sum_{k_j, k_j > N_0} |\hat{f}_{j, k_j}|^2 \sum_{k_j, k_j > N_0} \left(\frac{4}{k_j l}\right)^2$$

и, значит,

$$\|\widehat{F}_j\|_{|q| \leq A_1}^2 \leq \frac{32A_1}{l^2} \sum_{k_j, k_j > N_0} \|\hat{f}_{j, k_j}\|^2 \sum_{k_j, k_j > N_0} \frac{1}{k_j^2}.$$

Но $\|\hat{f}_{j, k_j}\| = \|f_{j, k_j}\|$, поэтому

$$\sum_{k_j, k_j > N_0} \|\hat{f}_{j, k_j}\|^2 = \|F_j\|^2 \frac{1}{2R_0} \leq 1.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число N_1 так, что $N_1 \neq N_1(\psi)$ и при $N > N_1$ выполняется неравенство

$$\|\widehat{F}_j\|_{|q| \leq A_1}^2 \leq \varepsilon,$$

что и доказывает лемму.

Благодарности. Работа поддержана грантами Министерства образования РФ № 97-0-14.3-65 и ИНТАС № 95-0414.

Список литературы

- [1] *R. T. Lewis, H. Siedentop, S. Vugalter.* Ann. Inst. H. Poincaré. 1997. V. 97. № 1. P. 1–28.
- [2] *E. Lieb, H. T. Yau.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 177–213.
- [3] *М. Руд, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [4] *W. Kirsch, B. Simon.* Ann. Phys. 1988. V. 183. № 1. P. 122–130.

Поступила в редакцию 15.I.1999 г.