Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Веденяпин, Ю. Н. Орлов, О законах сохранения для полиномиальных гамильтонианов и для дискретных моделей уравнения Больцмана, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 2, 307–315

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:02:54

© 1999 г.

В. В. Веденяпин*, Ю. Н. Орлов*

О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТониАнов И ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Для классических и квантовых гамильтонианов строятся и исследуются законы сохранения, линейные по числу частиц. Рассматривается также класс релаксационных моделей, обобщающих дискретные модели уравнения Больцмана. Для этих моделей выписываются законы сохранения в том же виде, что и для гамильтонианов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Законы сохранения являются одними из важнейших инструментов в классической и квантовой механике. В классической механике скобка Пуассона

$$\{I, H\} = \frac{\partial I}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}$$

закона сохранения I и гамильтониана H равна нулю. В квантовой механике соответствующие величины описываются линейными самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве [1]. Наблюдаемая величина, которой отвечает самосопряженный оператор $\hat{I}$, является законом сохранения, если $\hat{I}$ коммутирует с оператором Гамильтона $\hat{H}$: $[\hat{I}, \hat{H}] = 0$.

В работах [2–5] был найден некоторый класс законов сохранения для квантовых полиномиальных гамильтонианов. Определенные в этих работах законы сохранения позволили авторам исследовать спектр гамильтонианов некоторых модельных задач квантовой оптики. Оказалось, что для соответствующих классических гамильтонианов аналогичные законы сохранения хорошо известны: они использовались при изучении устойчивости решений и исследовании проблемы интегрируемости [6, 7].

Цель данной работы – сопоставить предложенные в [2] законы сохранения для квантовых и классических систем. В разделе 2 мы описываем класс рассматриваемых законов сохранения. В разделах 3 и 4 изучается поведение законов сохранения при различных

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия. E-mail: vicveden@kiam.ru

квантованиях и в зависимости от выбора сопряженных переменных. В разделе 5 предлагается сопоставление гамильтонианам кинетических уравнений, имеющих те же законы сохранения.

Раздел 3 написан Ю. Н. Орловым, раздел 5 – В. В. Веденяпиным, остальные разделы написаны совместно.

2. КВАНТОВЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ

Рассмотрим классический гамильтониан H , полиномиальный по переменным

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{q_k + ip_k}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z}_k = \frac{q_k - ip_k}{\sqrt{2}}, \quad i^2 = -1, \\ H &= \sum_{(\alpha, \beta) \in J} b_{\alpha\beta} \bar{z}^\alpha z^\beta + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $(\alpha, \beta) \in J \subset Z_+^{2N}$ – неотрицательные целочисленные мультииндексы, так что $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_N^{\alpha_N}$, $b_{\alpha\beta}$ – числовые коэффициенты, h.c. означает эрмитово сопряжение. Уравнения Гамильтона в этих переменных имеют вид

$$\dot{z}_k = -i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_k}, \quad \dot{\bar{z}}_k = i \frac{\partial H}{\partial z_k}.$$

Тогда выражение

$$I = \sum_{k=1}^N \mu_k |z_k|^2 \quad (2.2)$$

есть первый интеграл системы (2.1), если

$$(\mu, \alpha - \beta) = 0 \quad (2.3)$$

для всех индексов $(\alpha, \beta) \in J$.

Для квантовых гамильтонианов аналогичный результат был получен в [2–4], а именно оператор

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^N \mu_k \hat{n}_k \quad (2.4)$$

коммутирует с гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_{(\alpha, \beta) \in J} b_{\alpha\beta} (a^+)^{\alpha} (a^-)^{\beta} + \text{h.c.}, \quad (2.5)$$

если вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ ортогонален линейной оболочке $L(J)$ векторов $\alpha - \beta$. Здесь $\hat{n}_k = a_k^+ a_k^-$ – оператор числа частиц k -го сорта, a_k^- , a_k^+ – операторы уничтожения и рождения в пространстве Фока для стандартных бозевских коммутационных соотношений [1] или их обобщений [2–4].

В качестве следствия отметим, что если $\dim L(J) = 1$, то система (2.5) будет иметь $(N - 1)$ линейно независимых дополнительных первых интегралов в инволюции, т.е.

будет полностью интегрируемой по Лиувиллю. Эти законы сохранения могут быть выписаны явно:

$$\hat{I}_k = \gamma_N \hat{n}_k - \gamma_k \hat{n}_N = \text{const}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad \gamma = \alpha - \beta. \quad (2.6)$$

Примеры использования этого следствия при исследовании спектра гамильтонианов вида (2.5) содержатся в статьях [2–4, 8]. В последующих разделах условие (2.3) применяется для анализа зависимости количества законов сохранения квантовой системы от правила квантования классической динамической системы, а также при исследовании дискретных моделей уравнения Больцмана.

3. ЛИНЕЙНОЕ КВАНТОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о том, как зависит число законов сохранения вида (2.4) для оператора Гамильтона, получающегося из классического гамильтониана (2.1), от правила квантования. Правил квантования назовем, следуя [9], сопоставление функции $B(q, p)$, $q, p \in R^N$, оператора $\hat{B}$, действующего в гильбертовом пространстве функций $\psi(x)$, с интегрируемым квадратом модуля.

Мы ограничимся некоторым классом линейных квантований [9]. Пусть

$$\hat{B}\psi(x) \equiv \int \tilde{B}(x, y)\psi(y) dy,$$

где ядро $\tilde{B}(x, y)$ оператора $\hat{B}$ задается формулой

$$\tilde{B}(x, y) = \int B(q, p) K(q, p | x, y) dq dp, \quad (3.1)$$

а функция $K(q, p | x, y)$ имеет вид

$$K(q, p | x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \prod_{s=1}^N \int_0^1 \mathcal{Q}_s(t_s) \delta(q_s - t_s x_s - (1 - t_s) y_s) \times \\ \times \exp[i\hbar^{-1} p_s(x_s - y_s)] dt_s, \quad (3.2)$$

$\mathcal{Q}_s(t)$ – некоторая произвольная функция, интегрируемая на $(0, 1)$ с любой степенью t , причем

$$\int_0^1 \mathcal{Q}_s(t) dt = 1,$$

и $\hbar$ – постоянная Планка.

Задавая различные функции $\mathcal{Q}_s(t)$, получаем разные правила расстановки операторов $\hat{q}$, $\hat{p}$ в произведении вида $q^n p^m$. Квантование (3.2) представляет собой обобщение некоторых часто применяемых линейных квантований [9] в форме, удобной для исследования зависимости оператора от способа симметризации, т.е. от вида функций $\mathcal{Q}_s(t)$.

Используя (3.1), (3.2), получаем, что моному $q^n p^m$ отвечает оператор

$$q^n p^m \leftrightarrow \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_N=0}^{m_N} (-i\hbar)^{|k|} \binom{m_1}{k_1} \cdots \binom{m_N}{k_N} n^{[k]} \sigma_k \hat{q}^{n-k} \hat{p}^{m-k}, \quad (3.3)$$

$$\sigma_k = \prod_{s=1}^N \sigma_{k_s}^{(s)}, \quad \sigma_k^{(s)} = \int_0^1 \mathcal{Q}_s(t) t^k dt, \quad n^{[k]} = \prod_{s=1}^N n_s(n_s - 1) \cdots (n_s - k_s + 1).$$

Таким образом, квантование может быть задано моментами $\sigma_k^{(s)}$ функций $\mathcal{Q}_s(t)$. Приведем некоторые примеры:

1) квантование Вейля,

$$\mathcal{Q}_s(t) = \delta\left(t - \frac{1}{2}\right), \quad \sigma_k^{(s)} = \frac{1}{2^k};$$

2) квантование Йордана,

$$\mathcal{Q}_s(t) = \frac{1}{2}(\delta(t) + \delta(1-t)), \quad \sigma_k^{(s)} = \frac{1}{2}, \quad k \geq 1;$$

3) квантование Борна,

$$\mathcal{Q}_s(t) = 1, \quad \sigma_k^{(s)} = \frac{1}{k+1}.$$

Вернемся к формуле (2.1), представляющей гамильтониан классической системы, которая имеет законы сохранения (2.2). В силу аддитивности (2.2) по q^2 и p^2 ($|z|^2 = q^2 + p^2$) операторы соответствующих законов сохранения не зависят от правила квантования (3.2), тогда как квантовый гамильтониан, соответствующий классическому (2.5) согласно (3.3), будет содержать зависимость от моментов функций $\mathcal{Q}_s(t)$. Поэтому операторы, отвечающие классическим законам сохранения (2.2), не при всяком квантовании будут коммутировать с гамильтонианом. Если переписать (2.1) в переменных q, p и использовать формулу квантования монома (3.3), то можно показать, что операторы (2.4), полученные из (2.2), коммутируют с соответствующим квантовым гамильтонианом, только если $\sigma_k^{(s)} = 2^{-k}$, т.е. при квантовании Вейля.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ДРУГИХ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим оператор

$$\hat{H} = \sum_{(\alpha, \beta) \in J} C_{\alpha\beta} \hat{q}^\alpha \hat{p}^\beta. \quad (4.1)$$

В каком случае оператор

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^N \mu_k \hat{q}_k \hat{p}_k \quad (4.2)$$

коммутирует с (4.1)? Ответ совпадает с формулой (2.3): если для всех $(\alpha, \beta) \in J$ выполняется условие $(\mu, \alpha - \beta) = 0$, то $[\hat{I}, \hat{H}] = 0$. В частности, для оператора (3.3) $\dim L(J) =$

1, поскольку $(n-k) - (m-k) = n-m$ не зависит от k . Дополнительные $(N-1)$ законов сохранения имеют вид

$$\hat{F}_k = \gamma_N \hat{\theta}_k - \gamma_k \hat{\theta}_N, \quad (4.3)$$

где

$$\hat{\theta}_k = \hat{q}_k \hat{p}_k, \quad \gamma_k = n_k - m_k, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

При любом квантовании вида (3.2) они коммутируют с соответствующим оператором Гамильтона (3.3).

Итак, законы сохранения, линейные по произведениям сопряженных переменных, в случае (4.3) “выживают” при любом квантовании, которое задается по формулам (3.1), (3.2), тогда как законы сохранения вида (2.2) – только при квантовании по Вейлю.

5. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И УРАВНЕНИЯ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

В этом разделе исследуются связи между кинетическими уравнениями и квантовыми гамильтонианами, которые имеют законы сохранения, линейные по операторам числа частиц $\hat{n}$.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида (дискретные модели уравнения Больцмана [10, 11]):

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{jkm} B_{km}^{ij} (n_k n_m - n_i n_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

Здесь $n \in R_+^N$ – вектор N -мерного линейного пространства с положительными компонентами, $B_{km}^{ij} = B_{ij}^{km} = B_{km}^{ji} > 0$ – набор положительных констант (сечений столкновения) для реакции вида $(i, j) \rightarrow (k, m)$. Суммирование в (5.1) ведется по всем реакциям, в которых участвует данное вещество. Для этой системы, как и для уравнения Больцмана, справедлива H -теорема: функционал

$$H = \sum_{i=1}^N n_i \ln n_i$$

убывает со временем.

Известно [10], что величина $\sum \mu_i n_i$ сохраняется для системы (5.1), если для всех ненулевых сечений столкновений выполняется равенство $\mu_k + \mu_m = \mu_i + \mu_j$. Каждой реакции с ненулевым сечением B_{km}^{ij} сопоставим два вектора e_{ij} и $e_{km} \in Z^N$, у которых на местах, отмеченных индексами, стоят единицы, а остальные элементы – нули. Тогда условие $\mu_k + \mu_m = \mu_i + \mu_j$ эквивалентно условию $(\mu, e_{ij} - e_{km}) = 0$, которое аналогично утверждению (2.3).

Обобщим систему (5.1) на произвольные степенные реакции. Каждому набору пар векторов $\alpha, \beta \in Z_+^N$ сопоставим сечения $B_\beta^\alpha = B_\alpha^\beta > 0$ и систему уравнений

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{(\alpha, \beta)} (\alpha_i - \beta_i) B_\beta^\alpha (n^\beta - n^\alpha), \quad i = 1, \dots, p, \quad n^\alpha \equiv n_1^{\alpha_1} \dots n_N^{\alpha_N}. \quad (5.2)$$

Пусть, в частности, идет только одна реакция со скоростью B_β^α . Тогда система (5.2) имеет вид

$$\frac{dn_i}{dt} = (\alpha_i - \beta_i) B_\beta^\alpha (n^\beta - n^\alpha), \quad i = 1, \dots, p, \quad n^\alpha \equiv n_1^{\alpha_1} \dots n_p^{\alpha_p}.$$

Рассмотрим, как меняется в силу этой системы функционал $F = \sum \varphi_i(n_i)$:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \beta_i) \varphi'_i(n_i) B_\beta^\alpha (n^\beta - n^\alpha).$$

Если F имеет вид (2.2), т.е. $F = (\mu, n)$, то достаточное условие того, что F является законом сохранения, есть $(\mu, \beta - \alpha) = 0$. В данном случае имеется $(N - 1)$ законов сохранения.

Если F является модифицированной энтропией $F = \sum (n_i \ln n_i - n_i)$, то

$$\frac{dF}{dt} = B_\beta^\alpha (n^\beta - n^\alpha) \ln \left(\frac{n^\alpha}{n^\beta} \right) \leq 0$$

и справедлива H -теорема. Доказательство H -теоремы и существования законов сохранения вида (2.2) в общем случае (5.2) получается путем суммирования по наборам $\alpha, \beta \in Z_+^N$. Модификация H -функции связана с тем, что в этой модели, вообще говоря, не выполнен закон сохранения числа частиц. Он имеет место, если $\sum \alpha_i = \sum \beta_i$.

ПРИМЕР 5.1. Пусть в (5.2) $N = 2$ и сечения B_{03}^{10} и B_{00}^{12} отличны от нуля. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= B_{03}^{10} (n_2^3 - n_1) + B_{00}^{12} (1 - n_1 n_2^2), \\ \frac{dn_2}{dt} &= 3B_{10}^{03} (n_1 - n_2^3) + 2B_{00}^{12} (1 - n_1 n_2^2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Векторы $\gamma = \beta - \alpha$ имеют вид $\gamma_1 = (-1, 3)$, $\gamma_2 = (-1, -2)$. Линейных законов сохранения нет. Стационарное множество — точка $(1, 1)$, к которой сходятся все траектории системы (5.3). Это следует из того, что H -функция этой системы убывает и выпукла вниз, поскольку

$$d^2 H = \frac{1}{n_1} (dn_1)^2 + \frac{1}{n_2} (dn_2)^2$$

— положительно-определенная форма в R_+^2 .

ПРИМЕР 5.2. Пусть в предыдущем примере одно из сечений равно нулю, т.е. $B_{00}^{12} = 0$, $B_{03}^{10} > 0$. Тогда имеется закон сохранения $3n_1 + n_2 = \text{const}$, а траектории с началом в этом множестве сходятся к единственной точке его пересечения со стационарным множеством $n_1 = n_2^2$. Если же $B_{03}^{10} = 0$, $B_{00}^{12} > 0$, то имеем закон сохранения $2n_1 - n_2 = \text{const}$ и траектории сходятся к точке его пересечения со стационарным множеством $n_1 n_2^2 = 1$. Эти примеры иллюстрируют поведение решений системы (5.2).

Квантовые системы требуют дальнейших обобщений. В работе [12] приведен вывод одной дискретной модели квантового уравнения Больцмана (уравнения Юлинга–Уленбека) из соответствующего квантового гамильтониана. Ранее Фрелихом рассматривалась модель квантовой накачки, где использовался линейный случай дискретных моделей. Эта модель описана в книге [13]. Общие дискретные модели уравнения Юлинга–Уленбека введены и изучены в работах [14–16]. Дадим необходимые обобщения вышеописанных результатов для этого случая.

Пусть $H(n)$ – некоторая функция (аналог энтропии) и $h_i = \exp(\partial H / \partial n_i)$. Пусть также B_β^α – набор положительных функций (константы скоростей реакций). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{(\alpha, \beta)} (\alpha_i - \beta_i) B_\beta^\alpha (h^\beta - h^\alpha). \quad (5.4)$$

Она также обладает законами сохранения вида $\sum \mu_i n_i$, где $(\mu, \beta - \alpha) = 0$. $H(n)$ является убывающим функционалом:

$$\frac{dH}{dt} = - \sum_{(\alpha, \beta)} B_\beta^\alpha (\nabla H, \alpha - \beta) (\exp(\nabla H, \alpha) - \exp(\nabla H, \beta)) \leq 0.$$

Таким образом, по любому набору стационарных точек можно построить функционал H с минимумом в них и получить много примеров уравнений типа химической кинетики с заданными точками притяжения.

ПРИМЕР 5.3. Положим в (5.4) $N = 3$. Пусть первое вещество – бозон, а второе и третье – фермионы. При этом второе вещество обозначает фермион в возбужденном состоянии: он испускает фотоны (бозоны) и получается третье вещество – невозбужденный фермион. Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\frac{dn_1}{dt} = B \left(\frac{n_2}{1 - n_2} - \frac{n_1}{1 + n_1} \frac{n_3}{1 - n_3} \right) \equiv g, \quad \frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_3}{dt} = -g, \quad (5.5)$$

где

$$B \equiv B_{101}^{010} = b(1 + n_1)(1 - n_2)(1 - n_3), \quad b > 0.$$

Энтропия представляется в виде суммы одной бозонной и двух фермионных частей:

$$\begin{aligned} H(n) &= H_b(n_1) + H_f(n_2) + H_f(n_3), \\ H_b(n) &= n \ln n - (1 + n) \ln(1 + n), \\ H_f(n) &= n \ln n + (1 - n) \ln(1 - n). \end{aligned}$$

Динамическая система (5.5) рассматривается в полуцилиндре P : $n_1 \geq 0$, $0 \leq n_2$, $n_3 \leq 1$. Эти ограничения сохраняются со временем [11, 14–16], и H -функция по-прежнему выпукла в P . Система имеет два закона сохранения: $n_1 + n_2 = C_1$, $n_2 + n_3 = C_2$. Последний закон выражает сохранение числа фермионов. Минимум H -функции при

этих ограничениях ищем обычным способом и получаем квадратное уравнение, дающее стационарную притягивающую точку. Этот пример соответствует гамильтониану $\hat{H} = \hat{H}_0 + B(a^+ f_1^- f_2^- + f_1^+ f_2^+ a^-)$ из раздела 2, где $a^\pm$ относятся к бозону, а $f_{1,2}^\pm$ – к фермионам. Таким же способом можно сопоставить каждому квантовому гамильтониану (2.5) для бозонов и фермионов релаксационную модель типа (5.4).

Предложенная в начале этого раздела алгебраическая конструкция линейных законов сохранения может быть использована при исследовании дискретных моделей уравнения Больцмана. Покажем, как она работает, на примере модели из статьи [17]. Предложенные в [17] модели замечательны тем, что они являются первыми нетривиальными моделями для смесей. В этих моделях все скорости двумерны и выполнены пять основных законов сохранения: два для числа частиц каждого сорта, два для компонент импульса и закон сохранения энергии. Но есть ли там так называемые “лишние инварианты” (spurious invariants)?

ПРИМЕР 5.4. “Модель тринадцати скоростей” [17]. В этой модели имеются пять тяжелых частиц массы M со скоростями $w_0 = (0, 0)$, $w_{1,3} = (\pm 2m, 0)$, $w_{2,4} = (0, \pm 2m)$ и восемь легких частиц массы m , имеющих скорости

$$\begin{aligned} v_{1,3} &= (\pm(M - m), 0), & v_{2,4} &= (0, \pm(M - m)), \\ v_{5,7} &= (\pm(M + m), 0), & v_{6,8} &= (0, \pm(M + m)). \end{aligned}$$

В модели допускается одно столкновение между тяжелыми частицами: $(1, 3) \leftrightarrow (2, 4)$. Такой реакции будем сопоставлять вектор в R^{13} , обозначаемый как $l_{13} - l_{24} \equiv l_{24}^{13}$, у которого на местах 1 и 3 стоят единицы, а на местах 2 и 4 – минус единицы, на остальных местах расположены нули. Между легкими частицами допускаются два столкновения, которым сопоставим векторы $l_{2'4'}^{1'3'}$, $l_{6'8'}^{5'7'}$ (номера легких частиц отмечены штрихами). Допускаются также столкновения между тяжелыми и легкими частицами, которые определяются соответственно векторами $l_{13'}^{05'}$, $l_{24'}^{06'}$, $l_{31'}^{07'}$, $l_{42'}^{08'}$. Общее число таких векторов равно семи, т.е. размерность их линейной оболочки также не больше семи. Поэтому ортогональное дополнение к этой линейной оболочке (пространство инвариантов) имеет размерность, не меньшую шести: $13 - 7 = 6$. Легко проверить, что все семь указанных векторов линейно независимы. Таким образом, эта модель имеет один $(6 - 5 = 1)$ лишний инвариант.

Вторая модель из работы [17] – это модель с двадцатью пятью скоростями. Вычисления по программам Арансона [18] и независимо Турчанинова показали, что эта модель имеет семь независимых линейных инвариантов, т.е. она содержит два $(7 - 5 = 2)$ лиших инварианта.

Следует отметить, что построение моделей в [17] опирается на теорему Бобылева–Пальчевского–Шнайдера о принципиальной возможности аппроксимации уравнения Больцмана дискретными моделями. Эта теорема следует из теоретико-числового результата о представлении целого числа в виде суммы трех целых квадратов, что дает возможность построить богатый набор дискретных моделей уравнения Больцмана с пятью основными законами сохранения. Результаты настоящей работы показывают, что

следует проявлять осторожность, поскольку могут появиться лишние инварианты, что требует дополнительных исследований. Таким образом, возникает задача о построении дискретных моделей с ровно необходимым числом инвариантов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы привели законы сохранения для квантовых гамильтонианов, аналогичные классическим, и изучили, как такие системы ведут себя при различных линейных квантованиях. Мы сопоставили каждому квантовому полиномиальному гамильтониану релаксационную модель, имеющую те же законы сохранения. В дальнейших работах будут рассмотрены пределы применимости релаксационных моделей. Поскольку квантовые гамильтонианы рассматриваемого вида используются в нелинейной оптике, сопоставление им релаксационных моделей и вывод последних были бы весьма полезны. С другой стороны, отмечена алгебраическая тождественность поиска законов сохранения, линейных по числу частиц, в гамильтоновой механике и для дискретных моделей уравнения Больцмана. Это может быть полезно для усовершенствования дискретных моделей с целью устранения лишних инвариантов.

Благодарности. Авторы выражают благодарность М. В. Масленникову, А. К. Погребкову и А. Д. Брюно за полезные обсуждения, А. Арансону и В. Турчанинову за проведение вычислений по их программам. Авторы благодарны также Рэю Стритеру и Джеффри Суэллу за присланные разъяснения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00861).

Список литературы

- [1] П. Дирак. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
- [2] O. V. Mingalev, Yu. N. Orlov, V. V. Vedenyapin. Phys. Lett. A. 1996. V. 223. P. 246–250.
- [3] В. В. Веденяпин, Ю. Н. Орлов. Докл. РАН. 1997. Т. 351. № 4. С. 444–447.
- [4] В. В. Веденяпин, О. В. Мингалев. Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 2. С. 155–158.
- [5] В. В. Веденяпин, О. В. Мингалев, И. В. Мингалев. ТМФ. 1997. Т. 113. № 3. С. 369–383.
- [6] А. Д. Брюно. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990.
- [7] Ю. Мозер. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
- [8] Ja. Perina. Quantum Statistics of Nonlinear Optics. Dordrecht: Reidel, 1984.
- [9] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [10] С. К. Годунов, У. М. Султангазин. УМН. 1971. Т. 26. № 3. С. 1–51.
- [11] В. В. Веденяпин. УМН. 1988. Т. 43. № 1. С. 159–179.
- [12] R. Streater. Statistical Dynamics. London: Imperial College Press, 1995.
- [13] G. L. Sewell. Quantum Theory of Collective Phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1986.
- [14] В. В. Веденяпин, И. В. Мингалев, О. В. Мингалев. Матем. сб. 1993. Т. 184. № 11. С. 21–38.
- [15] О. В. Мингалев. Докл. АН СССР. 1992. Т. 323. № 6. С. 1029–1033.
- [16] И. В. Мингалев. Докл. АН СССР. 1992. Т. 324. № 1. С. 42–45.
- [17] A. V. Bobylev, C. Cercignani. J. Stat. Phys. 1998. V. 91. № 1–2. P. 327–341.
- [18] А. Б. Арансон. Вычисление многогранника Ньютона. В сб.: Материалы междунаrodn. конф. и Чебышевских чтений, посв. 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева. Т. 1. Ред. Н. С. Бахвалов, С. Н. Кружков, К. Ю. Богачев и др. М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 32.

Поступила в редакцию 22.XII.1998 г.,
после доработки 20.V.1999 г.