Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Бугрий, В. Н. Шадура, Асимптотика корреляционной функции твистованных полей в двумерной модели Дирака на решетке, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 2, 329–346

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 12:53:55

АСИМПТОТИКА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ТВИСТОВАННЫХ ПОЛЕЙ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДИРАКА НА РЕШЕТКЕ

Получено детерминантное представление для корреляционной функции твистованных полей в двумерной теории Дирака на решетке. Эти поля определяются твистованными граничными условиями для дираковских фермионов. Вычислена асимптотика корреляционной функции на больших расстояниях (вакуумное ожидание твистованного поля) в критической точке и в скейлинговой области.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время был достигнут определенный прогресс в вычислении асимптотического поведения корреляционных функций локальных полей в некоторых точнорешаемых моделях двумерных квантовых теорий поля [1, 2]. Обычно корреляционная функция некоторого локального поля в таких моделях может быть представлена в виде бесконечного ряда формфакторных вкладов, которые вычисляются с использованием идеи формфакторного бутстрапа [3] или метода углового квантования [4, 5]. В работах [6–8] разработана техника суммирования формфакторного разложения, позволяющая получать представление корреляционной функции через детерминанты Фредгольма определенных интегральных операторов. Такое представление позволяет провести анализ асимптотического поведения корреляционной функции.

В данной работе с использованием метода функционального интеграла в двумерной теории дираковского поля на решетке получено детерминантное представление корреляционной функции твистованных полей $\mu_\nu(r)$ в фазе беспорядка. При $\nu = 1/2$ такие поля совпадают с полями беспорядка $\mu(r)$ в этой модели и их корреляционная функция удовлетворяет следующему соотношению [9, 10]:

$$\langle \mu(0)\mu(r) \rangle = \langle \mu^I(0)\mu^I(r) \rangle^2, \quad (1.1)$$

где $\mu^I(r)$ – поле беспорядка в модели Изинга.

* Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина. E-mail: abugrij@bitp.kiev.ua

Вычисляя асимптотическое поведение корреляционной функции твистованных полей в критической точке и в скейлинговой области в пределе $r \rightarrow \infty$, мы находим вакуумное ожидание $\langle \mu_\nu(r) \rangle$. Индекс ν ($0 < \nu < 1$) задает твистованные граничные условия для дираковских фермионов вдоль линии корреляции. Поскольку мы получаем указанные асимптотики в рамках одного и того же способа регуляризации, то это позволяет исключить неоднозначность в нормировке корреляционных функций и, следовательно, в нормировке вакуумного ожидания. В скейлинговом пределе (квантовая теория массивных дираковских фермионов) эти поля являются аналогами твистованных полей в конформной теории поля с центральным зарядом $c = 1$ [11].

Вакуумное ожидание поля беспорядка $\mu(r)$ связано простым соотношением с вакуумным ожиданием экспоненциального поля $\exp(i\nu\phi)$ при $\nu = 1/2$ в модели синус-Гордон в точке свободных фермионов. Эта модель описывается евклидовым действием

$$S = \frac{1}{4\pi} \int dx d\tau (\partial_k \phi \partial_k \phi + \mu \cos(\hat{\beta}\phi)).$$

Точка свободных фермионов соответствует $\hat{\beta} = 1$.

Экспоненциальное поле $\exp(i\nu\phi)$ в этой точке определяется следующими коммутационными соотношениями с дираковским полем [12]:

$$\begin{aligned} e^{i\nu\phi(\tau,x)} \psi(\tau,y) &= \psi(\tau,y) e^{i\nu\phi(\tau,x)}, & y < x, \\ e^{i\nu\phi(\tau,x)} \psi(\tau,y) &= e^{2\pi i\nu} \psi(\tau,y) e^{i\nu\phi(\tau,x)}, & y > x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Как было показано в работах [9, 10, 13], в точке свободных фермионов корреляционная функция полей беспорядка $\mu(r)$ удовлетворяет соотношению

$$\langle \mu(0)\mu(r) \rangle = \left\langle \cos \frac{1}{2}\phi(0) \cos \frac{1}{2}\phi(r) \right\rangle. \quad (1.3)$$

Отсюда находим

$$\langle \mu(0)\mu(r) \rangle = \frac{1}{2} \langle e^{i\frac{1}{2}\phi(0)} e^{i\frac{1}{2}\phi(r)} \rangle + \frac{1}{2} \langle e^{i\frac{1}{2}\phi(0)} e^{-i\frac{1}{2}\phi(r)} \rangle. \quad (1.4)$$

Это соотношение позволяет получить связь между вакуумными средними поля беспорядка и экспоненциального поля. Заметим, что конкретные вычисления правой и левой частей (1.4) требуют регуляризации и приводят к появлению соответствующих констант перенормировки волновой функции. Чтобы избавиться от них при вычислении вакуумных средних, удобно нормировать корреляционные функции на поведение при $r \rightarrow 0$. В этом пределе из (1.4) получаем

$$\langle \mu(0)\mu(r) \rangle = \frac{1}{2} \langle e^{i\frac{1}{2}\phi(0)} e^{-i\frac{1}{2}\phi(r)} \rangle, \quad (1.5)$$

где мы воспользовались следующей асимптотикой корреляционной функции экспоненциальных полей при $r \rightarrow 0$ [14]:

$$\langle e^{i\nu\phi(0)} e^{i\nu'\phi(r)} \rangle = \langle e^{i(\nu+\nu')\phi} \rangle r^{2\nu\nu'}. \quad (1.6)$$

Тогда для отношения равенств (1.4) (в пределе $r \rightarrow \infty$) и (1.5) получаем

$$\frac{\langle \mu \rangle^2}{\langle \mu(0) \mu(r) \rangle|_{r \rightarrow 0}} = \frac{2 \langle e^{i \frac{1}{2} \phi} \rangle^2}{\langle e^{i \frac{1}{2} \phi(0)} e^{-i \frac{1}{2} \phi(r)} \rangle|_{r \rightarrow 0}}. \quad (1.7)$$

Как будет показано ниже, можно выбрать такую нормировку полей беспорядка, чтобы асимптотики корреляционных функций в знаменателях правой и левой частей (1.7) совпадали. В этом случае из (1.7) получаем $\langle \mu \rangle = \sqrt{2} \langle \exp(i \frac{1}{2} \phi) \rangle$. В работе [14] было предложено следующее выражение для вакуумного ожидания экспоненциального поля:

$$\langle e^{i \nu \phi} \rangle = \left(\frac{m}{2} \right)^{\nu^2} \exp \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}^2 \frac{\nu t}{2}}{\text{sh}^2 \frac{t}{2}} - \nu^2 e^{-t} \right) \right]. \quad (1.8)$$

Справедливость этого выражения легко доказывается при помощи результатов вычислений асимптотического поведения корреляционной функции экспоненциальных полей в пределе $r \rightarrow 0$, впервые полученных в [15]. В этой работе исследовалась асимптотика корреляционной функции, которая была вычислена в [12]. Заметим, что здесь для экспоненциальных полей использовалось определение (1.2). Используя результат наших вычислений (см. (4.18) ниже) и выражение (1.8), нетрудно получить соотношение между вакуумными ожиданиями твистованного и экспоненциального полей для $|\nu| < 1$:

$$\langle \mu_\nu \rangle = 4^{\nu^2} \langle \exp(i \nu \phi) \rangle. \quad (1.9)$$

Подчеркнем, что это соотношение справедливо для нормировки, при которой двухточечные корреляционные функции твистованных и экспоненциальных полей имеют одинаковую асимптотику при $r \rightarrow 0$:

$$\langle \mu_\nu(0) \mu_\nu(r) \rangle|_{r \rightarrow 0} \equiv \langle e^{i \nu \phi(0)} e^{-i \nu \phi(r)} \rangle|_{r \rightarrow 0} \equiv \frac{1}{r^{2\nu^2}}.$$

В разделе 2 с использованием определения твистованных полей при помощи твистованных граничных условий для дираковских фермионов выводится детерминантное представление корреляционной функции этих полей через матрицу нетеплицава типа. В разделе 3 рассматривается асимптотика корреляционной функции при $r \rightarrow \infty$ и показывается, что для этого случая можно получить новое детерминантное представление через матрицу теплицава типа. В разделе 4 с помощью полученного представления вычисляется асимптотика корреляционной функции твистованных полей. В приложении приводится вывод некоторых соотношений, которые используются в основном тексте.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ТВИСТОВАННЫХ ПОЛЕЙ В ВИДЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Известно [16, 17], что корреляционная функция полей беспорядка $\langle \mu^I(0) \mu^I(r) \rangle$ в двумерной модели Изинга может быть представлена в виде функционального интеграла

теории свободных майорановских фермионов с антипериодическими граничными условиями, за исключением линии корреляции $[0, r]$, где эти фермионы имеют периодические граничные условия.

По аналогии определим корреляционную функцию полей $\mu_\nu(r)$ через отношение следующих функциональных интегралов в решеточной теории Дирака:

$$\langle \mu_\nu(0) \mu_\nu(r) \rangle = \frac{\int d[\psi \bar{\psi}] e^{S_r[\psi]}}{\int d[\psi \bar{\psi}] e^{S[\psi]}} \quad (2.1)$$

с действием

$$S_r[\psi] = (\bar{\psi} \hat{D} \psi) = \sum_{\rho, \rho'} \bar{\psi}(\rho) D_{\rho, \rho'} \psi(\rho'), \quad (2.2)$$

где $\psi(\rho)$ – комплексное двухкомпонентное грассманово поле, заданное на узлах $\rho = (x, y)$ квадратной решетки размером $n_x \times n_y$, $\hat{D}$ – решеточный оператор Дирака, имеющий вид

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v^T & u^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t\nabla_x & 1 - t\nabla_y \\ -(1 - t\nabla_{-y}) & 1 - t\nabla_{-x} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Ниже мы покажем, что параметр t связан с массой m в уравнении Дирака следующим образом (a – постоянная решетки): $ma = \sqrt{2}(t^{-1/2} - t^{1/2})$. Через ∇_x, ∇_y обозначены операторы сдвига на один шаг решетки соответственно вдоль оси X и Y :

$$\nabla_x \psi(\rho) = \psi(\rho + \hat{x}), \quad \nabla_y \psi(\rho) = \psi(\rho + \hat{y}),$$

где $\hat{x}, \hat{y}$ – соответствующие орты. Индекс r обозначает, что в действии $S_r[\psi]$ оператор ∇_y имеет твистованные граничные условия вдоль линии корреляции $[0, r-1]$ ($r-1 = (r-1, 0)$):

$$\nabla_y \psi(x, n_y) = -e^{2\pi i \nu} \psi(x, 0), \quad x = 0, 1, \dots, r-1.$$

В знаменателе формулы (2.1) действие $S[\psi]$ по форме совпадает с $S_r[\psi]$, но оператор ∇_y удовлетворяет антипериодическим граничным условиям вдоль всей границы.

Нетрудно проверить, что для оператора $\hat{D}$ выполняется соотношение $\hat{D}^{-1} = \hat{D}^T \cdot \hat{K}$, где $\hat{K}$ – решеточный аналог оператора Клейна–Гордона

$$\hat{K} = \det \hat{D} = uu^T + vv^T = 2(1-t)^2 - t[(\nabla_x - 2 + \nabla_{-x}) + (\nabla_y - 2 + \nabla_{-y})].$$

В “наивном” непрерывном пределе (постоянная решетки $a \rightarrow 0$) $\hat{K} = a^2 t(m^2 - \partial_i \partial_i)$, где $\partial_i = (\nabla_i - 1)/a$ и $ma/\sqrt{2} = t^{-1/2} - t^{1/2}$. Отсюда для критической точки модели имеем $t_c = 1$, и скейлинговая область определяется соотношением $|t_c - t| = ma/\sqrt{2}$. В импульсном представлении функция

$$K(p) = 2(1-t)^2 + 4t \left(\sin^2 \frac{p_x}{2} + \sin^2 \frac{p_y}{2} \right),$$

в отличие от обычного решеточного оператора Дирака, имеет единственный минимум при $p_x = p_y = 0$ в зоне Бриллюэна, и проблем с решеточным дублированием фермионных степеней свободы не возникает.

Для того чтобы выполнить интегрирование по фермионным полям в числителе (2.1), удобно перейти в действии $S_r[\psi]$ к оператору ∇_y с антипериодическими граничными условиями вдоль всей границы, явно указав в $S_r[\psi]$ член, содержащий дефект на решетке, обусловленный твистованными граничными условиями,

$$S_r[\psi] = S[\psi] + \delta S_r[\psi],$$

где

$$\delta S_r[\psi] = t \sum_{x=0}^{r-1} [-\xi \bar{\psi}^1(x, n_y) \psi^2(x, 0) + \xi^* \bar{\psi}^2(x, 0) \psi^1(x, n_y)] = (\bar{\psi} \hat{P}^T \hat{\Xi} \hat{P} \psi).$$

Здесь проекционный оператор $\hat{P}$ выделяет узлы решетки на линии корреляции $[0, r-1]$

$$\hat{P}_{l,x} = \delta_{l,x} \delta_{n_y,y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nabla_y \end{pmatrix}, \quad l = 0, 1, \dots, r-1,$$

фазовая матрица

$$\hat{\Xi} = t \begin{pmatrix} 0 & -\xi \hat{I}^{(r)} \\ \xi^* \hat{I}^{(r)} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\xi = 1 - e^{2\pi i \nu}$ и $\hat{I}^{(r)}$ — единичная матрица размера $r \times r$. Тогда

$$\langle \mu_\nu(0) \mu_\nu(r) \rangle = \langle e^{\delta S_r[\psi]} \rangle = \frac{\int d[\psi \bar{\psi}] e^{S[\psi] + \delta S_r[\psi]}}{\int d[\psi \bar{\psi}] e^{S[\psi]}}. \quad (2.4)$$

Для вычисления функциональных интегралов в (2.4) удобно представить экспоненту $e^{\delta S_r[\psi]}$ через интеграл по вспомогательному полю

$$e^{\delta S_r[\psi]} = |\hat{\Xi}| \int d[\chi \bar{\chi}] \exp[(\bar{\chi} \hat{\Xi}^{-1} \chi) + (\bar{\chi} \hat{P} \psi) + (\bar{\psi} \hat{P}^T \chi)]. \quad (2.5)$$

Используя (2.5) и выполняя интегрирование в (2.4) по полю $\psi(\rho)$, находим

$$\begin{aligned} \langle \mu_\nu(0) \mu_\nu(r) \rangle &= |\hat{\Xi}| \int d[\chi \bar{\chi}] \exp[(\bar{\chi} \hat{\Xi}^{-1} \chi) + (\bar{\chi} \hat{P} \hat{D}^{-1} \hat{P}^T \chi)] = \\ &= |\hat{\Xi}| |\hat{\Xi}^{-1} + \hat{P} \hat{D}^{-1} \hat{P}^T| = |\hat{G}|, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $|\hat{G}|$ обозначает детерминант блочной (2×2) -матрицы с блоками размера $r \times r$. Матрица $\hat{G}$ имеет вид

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{x,x'}^{11} \sin \pi \nu & -g_{x,x'}^{12} \sin \pi \nu + i I_{x,x'}^{(r)} \cos \pi \nu \\ g_{x,x'}^{12} \sin \pi \nu + i I_{x,x'}^{(r)} \cos \pi \nu & (g_{x,x'}^{11})^T \sin \pi \nu \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} g_{x,x'}^{11} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 p}{K(p)} e^{ip_x(x-x')} 2t u^*(p_x), \quad u(p_x) = 1 - t e^{ip_x}, \\ g_{x,x'}^{12} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 p}{K(p)} e^{ip_x(x-x')} 2t (u^*(p_x) + u(p_x)). \end{aligned}$$

Покажем, что выражение для корреляционной функции (2.6) при $\nu = 1/2$ совпадает с квадратом корреляционной функции полей беспорядка в модели Изинга. Для этого сделаем преобразование подобия матрицы $\widehat{G}$ с помощью унитарной матрицы $\widehat{Q}$

$$\widehat{Q} = e^{i\gamma_5 \frac{\theta}{2}}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ctg } \theta = t. \quad (2.8)$$

В результате получаем

$$G(r) = \langle \mu_\nu(0) \mu_\nu(r) \rangle \equiv |\widehat{Q} \cdot \widehat{G} \cdot \widehat{Q}^{-1}| = |\cos^2 \pi\nu + \sin^2 \pi\nu \widehat{V} \cdot \widehat{V}^T|, \quad (2.9)$$

где

$$V_{x,x'} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-(x-x')} V(z), \quad V(z) = \sqrt{\frac{(1-\alpha z)(1-\beta z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z)}}, \quad (2.10)$$

$$\alpha = t \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2} + 1}, \quad \beta = t \frac{\sqrt{1+t^2} - t}{\sqrt{1+t^2} + 1}. \quad (2.11)$$

Здесь матрица $V_{x,x'}$ в точности совпадает с классическим выражением для теплицевой матрицы [18], через определитель которой выражается парная корреляционная функция поля беспорядка $\langle \mu^1(0) \mu^1(r) \rangle$ в модели Изинга в парамагнитной области. Для некоторой экономии в дальнейшем мы не будем выписывать множитель $(2\pi i)^{-1}$ в контурных интегралах, подразумевая, что он включен должным образом в меру интегрирования. Очевидно, что при $\nu = 1/2$ из (2.9) следует (1.1).

Отметим, что преобразование $\widehat{Q}$ связано с конкретным выбором решеточного варианта оператора Дирака (2.3). В “наивном” непрерывном пределе действие (2.2) принимает вид

$$S[\psi] = \int d^2 \rho \bar{\psi}(\rho) (m e^{i\gamma_5 \frac{\pi}{4}} - \gamma_i \partial_i) \psi(\rho), \quad (2.12)$$

где

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

В критической точке $t = t_c = 1$ угол θ в (2.8) равен $\pi/4$ и преобразование $\widehat{Q}$ сводится к γ_5 -повороту грассмановых полей: $\psi' = \exp(i\gamma_5 \pi/8) \psi$, после чего дираковское действие принимает обычный вид

$$S[\psi] = \int d^2 \rho \bar{\psi}(\rho) (m - \gamma_i \partial_i) \psi(\rho). \quad (2.13)$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ ТЕПЛИЦЕВА ДЕТЕРМИНАНТА

В этом разделе мы покажем, что при $r \rightarrow \infty$ и в скейлинговом пределе ($ma \rightarrow 0$) вычисление корреляционной функции (2.9) можно свести к вычислению детерминанта матрицы теплицева типа:

$$G(r) = |\cos^2 \pi\nu + \sin^2 \pi\nu \widehat{V} \cdot \widehat{V}^T|_{r \rightarrow \infty} = |V^{(\nu)} \cdot V^{(\nu)T}| = |V^{(\nu)}|^2, \quad (3.1)$$

где

$$V_{x,x'}^{(\nu)} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-(x-x')} V^{(\nu)}(z), \quad V^{(\nu)}(z) = \left[\frac{(1-\alpha z)(1-\beta z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z)} \right]^\nu. \quad (3.2)$$

При $\nu = 1/2$ ядро $V^{(\nu)}(z)$ совпадает с ядром $V(z)$ (2.10).

В приложении показано, что корреляционную функцию (2.9) можно представить в следующем виде:

$$G(r) \underset{r \rightarrow \infty}{=} |1 - \sin^2 \pi\nu \hat{A}|^2, \quad (3.3)$$

где

$$A_{x,x'} = \oint_{|z_1 z_2| < 1} \frac{dz_1 dz_2 (z_1)^x (z_2)^{x'}}{(1 - z_1 z_2)} V^{-1}(z_1) V^{-1}(z_2).$$

Здесь контуры интегрирования проходят между разрезами, изображенными на рисунке.

Используя (3.3), получаем

$$\frac{1}{2} \ln G(r) = \text{Sp} \ln(1 - \sin^2 \pi \nu \hat{A}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi} \right)^{2k}, \quad (3.4)$$

где

$$a_k = \pi^{2k} \text{Sp} \hat{A}^k = \pi^{2k} \oint \prod_{l=1}^{2k} dz_l \frac{\prod_{l=1}^k [1 - (z_l z_{l+1})^r]}{\prod_{l=1}^{2k} [(1 - z_l z_{l+1}) V(z_l)]}, \quad z_{2l+1} = z_1. \quad (3.5)$$

При $r \rightarrow \infty$ слагаемые в правой части (3.5), содержащие произведения $(z_l z_{l+1})^r$, экспоненциально малы, так что

$$\begin{aligned} a_k &= \pi^{2k} \oint \frac{\prod_{l=1}^{2k} dz_l}{\prod_{l=1}^{2k} [(1 - z_l z_{l+1}) V(z_l)]} = \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\prod_{l=1}^{2k} dz_l}{\prod_{l=1}^{2k} (1 - z_l z_{l+1})} \prod_{l=1}^{2k} \left[\frac{(\alpha - z_l)(1 - \beta z_l)}{(1 - \alpha z_l)(z_l - \beta)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В пределе $ma = 0$, т.е. $\alpha = 1$, интеграл в (3.6) расходится логарифмически на верхнем пределе (в окрестности “правого верхнего угла” $2k$ -мерного гиперкуба с координатами $z_l = 1$). Выделим и оценим эту расходимость:

$$a_k \simeq \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} \prod_{l=1}^{2k} \frac{dz_l}{1 - z_l z_{l+1}} \prod_{l=1}^{2k} \left(\frac{\alpha - z_l}{1 - \alpha z_l} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \int_1^{\varepsilon/ma} \prod_{l=1}^{2k} \frac{dz_l}{z_l + z_{l+1}}. \quad (3.7)$$

Для вывода этой оценки мы сделали ряд последовательных замен переменных: $z_l = \alpha - z'_l$, $z'_l = (ma)z''_l$, $z''_l = z_l + 1$. Явно выделив в последнем интеграле логарифмическую сингулярность, получаем равенство

$$a_k = \int_1^{\varepsilon/ma} \prod_{l=1}^{2k} \frac{dz_l}{z_l + z_{l+1}} = -k b_k \ln(ma) + \text{const}. \quad (3.8)$$

Коэффициенты b_k можно выразить через многократные интегралы, продифференцировав по ma правую и левую части (3.8),

$$b_k = 2 \int_0^1 \prod_{l=1}^{2k-1} dz_l \left[(1 + z_1)(1 + z_{2k-1}) \prod_{l=1}^{2k-2} (z_l + z_{l+1}) \right]^{-1}. \quad (3.9)$$

Используя формулы (3.8) и (3.4), получаем следующее асимптотическое выражение для корреляционной функции при $r \rightarrow \infty$, $ma \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{2} \ln G(\infty) = \ln(ma) \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi} \right)^{2k} + \text{const}. \quad (3.10)$$

Интегралы для первых трех коэффициентов в (3.9) можно свести к табличным:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 2\zeta(2), \quad b_3 = 4\zeta^2(2) + 6\zeta(4), \quad (3.11)$$

где $\zeta(k)$ – ζ -функция Римана

$$\zeta(k+1) = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 \frac{dx \ln^k x}{1-x}.$$

Раскладывая функции $(\sin \pi\nu/\pi)^{2k}$, входящие в ряд (3.10), по степеням ν и используя значения (3.11) для коэффициентов b_k , нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} b_1 \frac{\sin^2 \pi\nu}{\pi^2} &= \nu^2 + O(\nu^4), \\ b_1 \frac{\sin^2 \pi\nu}{\pi^2} + b_2 \frac{\sin^4 \pi\nu}{\pi^4} &= \nu^2 + O(\nu^6), \\ b_1 \frac{\sin^2 \pi\nu}{\pi^2} + b_2 \frac{\sin^4 \pi\nu}{\pi^4} + b_3 \frac{\sin^6 \pi\nu}{\pi^6} &= \nu^2 + O(\nu^8), \end{aligned} \quad (3.12)$$

т.е. каждый следующий член в ряду (3.11) уничтожает все более высокие степени ν^{2k} . Хотя прямое вычисление интегралов (3.9) кратности выше пятой вряд ли выполнимо, можно предположить, что и в более высоких порядках соотношения типа (3.12) имеют место, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi} \right)^{2k} = \nu^2. \quad (3.13)$$

Это означает, что производящей функцией для коэффициентов b_k является функция

$$\frac{1}{\pi^2} \arcsin^2(\pi\sqrt{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k. \quad (3.14)$$

Если это действительно так, то для определителя (3.1) имеет место следующее выражение:

$$G(\infty)_{(ma) \rightarrow 0} = \text{const} \cdot (ma)^{2\nu^2}. \quad (3.15)$$

Заметим, что формула (3.14) позволяет находить значения интегралов (3.9) произвольной кратности.

Докажем справедливость соотношений (3.14) и (3.15). Ключевым для доказательства является следующее обстоятельство, вытекающее из цепочки выкладок (3.7): при асимптотической ($ma \rightarrow 0$) оценке интегралов в (3.6) оказывается несущественным показатель степени в выражении, задающем ядро матрицы $V_{x,x'}$, что позволяет ввести новую матрицу $V_{x,x'}^{(\nu)}$ с ядром (3.2). Для этого определим корреляционную функцию

$$G^{(\nu)}(r) = |\hat{V}^{(\nu)} \cdot \hat{V}^{(\nu)T}|, \quad (3.16)$$

где матрица $\hat{V}^{(\nu)}$ определена в (3.2). Используя результаты приложения, функцию (3.16) можно представить следующим образом:

$$G^{(\nu)}(r) \underset{r \rightarrow \infty}{=} |1 - \hat{A}^{(\nu)}|^2, \quad (3.17)$$

где матрица $\hat{A}^{(\nu)}$ имеет вид

$$A_{x,x'}^{(\nu)} = \oint \frac{dz_1 dz_2 (z_1)^x (z_2)^{x'}}{(1 - z_1 z_2)} \frac{1}{V^{(\nu)}(z_1) V^{(\nu)}(z_2)}. \quad (3.18)$$

След от k -й степени матрицы $\hat{A}^{(\nu)}$ выражается через $2k$ -кратный интеграл

$$\begin{aligned} \text{Sp}[(\hat{A}^{(\nu)})^k] &= \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi} \right)^{2k} \int_{\beta}^{\alpha} \prod_{l=1}^{2k} \frac{dz_l}{(1 - z_l z_{l+1})} \times \\ &\times \prod_{l=1}^{2k} \left[\frac{(\alpha - z_l)(1 - \beta z_l)}{(1 - \alpha z_l)(z_l - \beta)} \right]^{\nu} \prod_{l=1}^k [1 - (z_l z_{l+1})^r]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь, в отличие от формулы (3.4), множитель $(\sin \pi \nu)^{2k}$ возникает при стягивании контура интегрирования в (3.18) на разрез $[\beta, \alpha]$ за счет показателя ν , задающего тип точек ветвления в ядре (3.2). С учетом (3.19) для $G^{(\nu)}(r)$ при $r \rightarrow \infty$ получаем выражение, аналогичное (3.4),

$$\frac{1}{2} \ln G^{(\nu)}(r) = \text{Sp} \ln(1 - \hat{A}^{(\nu)}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{(\nu)}}{k} \left(\frac{\sin \pi \nu}{\pi} \right)^{2k}, \quad (3.20)$$

где

$$a_k^{(\nu)} = \int_{\beta}^{\alpha} \prod_{l=1}^{2k} \frac{dz_l}{(1 - z_l z_{l+1})} \prod_{l=1}^{2k} \left[\frac{(\alpha - z_l)(1 - \beta z_l)}{(1 - \alpha z_l)(z_l - \beta)} \right]^{\nu} \prod_{l=1}^k [1 - (z_l z_{l+1})^r]. \quad (3.21)$$

При $r \rightarrow \infty$ слагаемые в (3.21), содержащие степени $(z_l z_{l+1})^r$, исчезают. Оставшиеся интегралы в (3.21) расходятся на верхнем пределе при $\alpha \rightarrow 1$, однако разность между (3.6) и (3.21)

$$\begin{aligned} \Delta a_k^{(\nu)} \equiv a_k - a_k^{(\nu)} &= \int_{\beta}^{\alpha} \prod_{l=1}^{2k} \frac{dz_l}{(1 - z_l z_{l+1})} \times \\ &\times \left\{ \prod_{l=1}^{2k} \left[\frac{(\alpha - z_l)(1 - \beta z_l)}{(1 - \alpha z_l)(z_l - \beta)} \right]^{\frac{1}{2}} - \prod_{l=1}^{2k} \left[\frac{(\alpha - z_l)(1 - \beta z_l)}{(1 - \alpha z_l)(z_l - \beta)} \right]^{\nu} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

является конечной величиной при $\alpha = 1$,

$$\Delta a_k^{(\nu)} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \int_{1-\varepsilon}^1 \prod_{l=1}^{2k} \frac{dz_l}{(1 - z_l z_{l+1})} \sum_{l=1}^{2k} (1 - z_l) + \text{const} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что отношение детерминантов (2.9) и (3.16) также является конечным и не равным нулю:

$$\gamma \equiv \frac{G(\infty)}{G^{(\nu)}(\infty)} = \frac{|\cos^2 \pi \nu + \sin^2 \pi \nu \hat{V} \cdot \hat{V}^T|}{|\hat{V}^{(\nu)} \cdot \hat{V}^{(\nu) T}|} \stackrel{ma \rightarrow 0}{=} \text{const.} \quad (3.23)$$

Поэтому сингулярный по ma фактор в $G(\infty)$ совпадает с таковым в определителе (3.16). Поскольку матрица $\hat{V}^{(\nu)}$ является теплицевой, а теория теплицевых детерминантов хорошо развита, то задача по вычислению (2.9) в пределе $r \rightarrow \infty$, $ma \rightarrow 0$ может быть решена.

Отношение детерминантов (3.23) рассматривалось нами в пределе $r = \infty$, $ma \rightarrow 0$. В работе [14] коррелятор экспоненциальных полей был нормирован на корреляционную функцию этих полей в теории безмассовых дираковских фермионов. Поэтому для сравнения наших результатов с [14] необходимо исследовать отношение (3.23) в пределе $ma = 0$, $r \rightarrow \infty$. Точнее говоря, надо убедиться, что величина γ не зависит от последовательности предельных переходов.

Можно показать, что при $ma = 0$ разность коэффициентов (3.5) и (3.21) отличается от (3.22) на некоторую добавку, убывающую с ростом r ,

$$a_k - a_k^{(\nu)} = \Delta a_k + \frac{\phi_k(r)}{r^2}.$$

Асимптотическая оценка для $\phi_k(r)$ имеет вид

$$\phi_k(r) \simeq \frac{\ln^k r}{k!}. \quad (3.24)$$

В результате при $ma = 0$, $r \rightarrow \infty$ получаем

$$\frac{G(r)}{G^{(\nu)}(r)} = \gamma \exp \left[\frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(r) \right]. \quad (3.25)$$

Для лидирующих по r вкладов (3.24) в $\phi_k(r)$ суммирование в экспоненте правой части (3.25) выполняется в явном виде, что приводит к оценке

$$\frac{G(r)}{G^{(\nu)}(r)} = \gamma + O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (3.26)$$

4. АСИМПТОТИКА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Здесь мы вычисляем асимптотику корреляционной функции $G(r)$, используя для нее представление (3.1) через детерминант матрицы $V_{x,x'}^{(\nu)}$. Поскольку эта матрица относится к тепличеву типу, для исследования асимптотического поведения ее детерминанта можно применить технику работы [18], использовавшуюся при исследовании асимптотического поведения корреляционной функции в модели Изинга ($\nu = 1/2$). Для случая произвольного $0 < \nu < 1$ эта техника требует некоторого обобщения. Из-за громоздкости выкладок приведем только окончательный результат:

$$\ln |\widehat{V}^{(\nu)}| \underset{r \rightarrow \infty}{=} r \oint \frac{dz}{z} \ln V^{(\nu)}(z) - \oint dz \ln P(z) \frac{\partial}{\partial z} \ln Q(z^{-1}). \quad (4.1)$$

Подставляя сюда явные выражения для функций $P(z)$ и $Q(z)$:

$$V^{(\nu)}(z) = P(z)Q(z^{-1}), \quad P(z) = \left(\frac{1 - \alpha z}{1 - \beta z} \right)^\nu, \quad Q(z) = \left(\frac{1 - \beta z}{1 - \alpha z} \right)^\nu = \frac{1}{P(z)}, \quad (4.2)$$

получаем

$$\begin{aligned} \oint \frac{dz}{z} \ln V^{(\nu)} &= \nu \left(\oint \frac{dz}{z} \ln P(z) - \oint \frac{dz}{z} \ln P(z^{-1}) \right) = \nu(P(0) - P(0)) = 0, \\ - \oint dz \ln P(z) \frac{\partial}{\partial z} \ln Q(z^{-1}) &= \nu^2 \oint dz \ln P(z) \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right) = \\ &= \nu^2 (\ln P(\alpha) - \ln P(\beta)). \end{aligned}$$

В результате имеем

$$|\widehat{V}^{(\nu)}| \underset{r \rightarrow \infty}{=} \left(\frac{P(\alpha)}{P(\beta)} \right)^{\nu^2} = \left[\frac{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}{(1 - \alpha\beta)^2} \right]^{\nu^2}. \quad (4.3)$$

Заметим, что данное выражение выведено при конечных значениях ma и r . Вывод (4.1) справедлив и в скейлинговом режиме: $ma \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, $r(ma) = \text{const}$. Однако при $ma = 0$, $r = \text{const}$ интегралы в правой части (4.1) являются расходящимися и вычисление $|\widehat{V}^{(\nu)}|$ при $ma = 0$ и $r \rightarrow \infty$ требует специального рассмотрения.

Прежде чем перейти к этому, упростим немного задачу, заметив, что отношение детерминантов $|\widehat{V}^{(\nu)}(\beta)|/|\widehat{V}^{(\nu)}(0)|$ является конечной величиной как в скейлинговом режиме, так и в критической точке, а именно

$$\frac{|\widehat{V}^{(\nu)}(\beta)|}{|\widehat{V}^{(\nu)}(0)|} \underset{r \rightarrow \infty}{=} \left[\frac{1 - \beta^2}{(1 - \alpha\beta)^2} \right]^{\nu^2} \underset{ma=0}{=} 2^{\nu^2/2}. \quad (4.4)$$

Здесь явно указана зависимость матрицы $\widehat{V}^{(\nu)}$ от параметра β : матрица $\widehat{V}^{(\nu)}(0)$ определяется ядром (3.2) при значении $\beta = 0$.

Соотношение (4.4) нетрудно вывести, используя (4.1). Действительно, для отношения детерминантов в левой части (4.4) получаем

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{|\widehat{V}^{(\nu)}(\beta)|}{|\widehat{V}^{(\nu)}(0)|} \right) &= - \oint dz \ln P(z) \frac{\partial}{\partial z} \ln Q(z^{-1}) + \\ &+ \oint dz [\ln P(z) + \nu \ln(1 - \beta z)] \frac{\partial}{\partial z} [\ln Q(z^{-1}) - \nu \ln(1 - \beta z^{-1})] = \\ &= -\nu \ln P(\beta) + \nu \ln P(0) - \nu^2 \ln(1 - \beta^2) + \\ &+ \nu \oint dz \ln(1 - \beta z) \frac{\partial}{\partial z} \ln Q(z^{-1}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Последнее слагаемое в правой части (4.5) проинтегрируем по частям:

$$\nu \oint dz \ln(1 - \beta z) \frac{\partial}{\partial z} \ln Q(z^{-1}) = \nu \beta \oint \frac{dz}{1 - \beta z} \ln Q(z) = \nu \ln Q(\beta).$$

В результате найдем, что

$$\ln \left(\frac{|\widehat{V}^{(\nu)}(\beta)|}{|\widehat{V}^{(\nu)}(0)|} \right) = -\nu \ln P(\beta) + \nu \ln Q(\beta) - \nu^2 \ln(1 - \beta^2) = \ln \left[\frac{1 - \beta^2}{(1 - \alpha \beta)^2} \right]^{\nu^2}.$$

Матричные элементы матрицы

$$V_{x,x'}^{(\nu)}(0) = \oint \frac{dz}{z} z^{-(x-x')} V^{(\nu)}(z) \Big|_{\beta=0}$$

при $ma = 0$ ($\alpha = 1$) вычисляются в явном виде:

$$V_{x,x'}^{(\nu)}(0) = \frac{\sin \pi \nu}{\pi} \frac{1}{\nu - x + x'}. \quad (4.6)$$

Напомним, что величины x, x' пробегает значения $0, \dots, r-1$. Чтобы упростить обозначения, введем матрицу

$$\widehat{U}_r \equiv V_{x,x'}^{(\nu)}(0), \quad (4.7)$$

где нижний индекс у матрицы (4.6) явно указывает на ее размерность. Умножив матрицу (4.6) слева на левую треугольную матрицу $\widehat{L}_r$ и справа на правую треугольную матрицу $\widehat{R}_r$, получим соотношение

$$\widehat{L}_r \cdot \widehat{U}_r \cdot \widehat{R}_r = \begin{pmatrix} \frac{\sin \pi \nu}{\pi} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\widehat{U}_{r-1} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где матрицы $\widehat{L}_r$ и $\widehat{R}_r$ имеют следующий вид:

$$\widehat{L}_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{1} & \frac{\nu}{1} - 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{r-1} & 0 & \dots & \frac{\nu}{r-1} - 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{R}_r = \begin{pmatrix} \nu & -\frac{1}{1} & \dots & -\frac{1}{r-1} \\ 0 & \frac{\nu}{1} + 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\nu}{r-1} + 1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Детерминант произведения этих матриц нетрудно вычислить:

$$|\hat{L}_r \cdot \hat{R}_r| = \frac{(-1)^{r-1} \sin \pi \nu}{\pi} \frac{\Gamma(r+\nu)\Gamma(r-\nu)}{\Gamma^2(r)}. \quad (4.10)$$

Это позволяет получить из формул (4.8), (4.10) простое рекуррентное соотношение для определителей

$$|\hat{U}_{r-1}| = |\hat{U}_r| \frac{\Gamma(r+\nu)\Gamma(r-\nu)}{\Gamma^2(r)},$$

решением которого является

$$|\hat{U}_r| = \prod_{k=1}^r \frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k-\nu)}. \quad (4.11)$$

Воспользовавшись следующим представлением для Γ -функции:

$$\ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{e^{zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z-1)e^{-t} \right),$$

получим для (4.11) выражение

$$\ln |\hat{U}_r| = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} (1 - e^{-tr}) \frac{\text{sh}^2 \frac{\nu t}{2}}{\text{sh}^2 \frac{t}{2}}. \quad (4.12)$$

При $r \rightarrow \infty$ интеграл в правой части (4.12) расходится в нуле. Выделим эту расходимость, переписав (4.12) в виде

$$\ln |\hat{U}_r| = -\nu^2 \ln r - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}^2 \frac{\nu t}{2}}{\text{sh}^2 \frac{t}{2}} - \nu^2 e^{-t} \right) + \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-tr} \left(\frac{\text{sh}^2 \frac{\nu t}{2}}{\text{sh}^2 \frac{t}{2}} - \nu^2 \right).$$

Поскольку зависящий от r интеграл теперь хорошо определен, получим для асимптотики по r соотношение

$$\ln |\hat{U}_r| \underset{r \rightarrow \infty}{=} -\nu^2 \ln r - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}^2 \frac{\nu t}{2}}{\text{sh}^2 \frac{t}{2}} - \nu^2 e^{-t} \right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (4.13)$$

С учетом формул (3.1), (4.3), (4.4), (4.7) и (4.13) находим для корреляционной функции $G(r)$ следующие асимптотические выражения:

$$G(r) \underset{r \rightarrow \infty, \alpha < 1}{=} \left[\frac{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}{(1-\alpha\beta)^2} \right]^{2\nu^2} = (2\sqrt{2}ma)^{2\nu^2}, \quad (4.14)$$

$$G(r) \underset{r \rightarrow \infty, \alpha = 1}{=} \left[\frac{(1-\beta^2)}{r(1-\alpha\beta)^2} \right]^{2\nu^2} \exp \left[-2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}^2 \frac{\nu t}{2}}{\text{sh}^2 \frac{t}{2}} - \nu^2 e^{-t} \right) \right]. \quad (4.15)$$

Определяя не зависящую от нормировки и параметра решеточного обрезания величину $h(Rm)$ как отношение выражений (4.14) и (4.15) и учитывая (4.4), получаем

$$h(Rm) = \frac{G(r)|_{m \neq 0}}{G(r)|_{m=0}} = (2mR)^{2\nu^2} \exp \left[2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}^2 \frac{\nu t}{2}}{\text{sh}^2 \frac{t}{2}} - \nu^2 e^{-t} \right) \right], \quad (4.16)$$

где через $R = ra$ обозначено размерное расстояние.

Для сравнения этой асимптотики с результатами работы [14] в точке свободных фермионов заметим, что авторы [14] использовали следующую нормировку для корреляционной функции в безмассовом случае:

$$G(R) = R^{-2\nu^2}. \quad (4.17)$$

Воспользовавшись этой нормировкой, из отношения (4.16) получаем

$$G(R) \Big|_{R \rightarrow \infty, m \neq 0} \langle \mu_\mu \rangle^2 = (2m)^{2\nu^2} \exp \left[2 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{\text{sh}^2 \frac{\nu t}{2}}{\text{sh}^2 \frac{t}{2}} - \nu^2 e^{-t} \right) \right]. \quad (4.18)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получено детерминантное представление для корреляционной функции твистованных полей беспорядка в двумерной решеточной теории Дирака. Вычислив асимптотическое поведение этой корреляционной функции, мы нашли вакуумное ожидание твистованного поля. Полученное выражение отличается от вакуумного ожидания экспоненциального поля на константу, зависящую от индекса твистования ν .

Можно привести следующие аргументы для объяснения этого факта. Известно, что квантовые поля, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (1.2), реализуют операторное решение задачи изомонодромной деформации решений уравнения Дирака с нетривиальной монодромией [12]. Корреляционную функцию твистованных полей (2.1) можно интерпретировать как функциональный интеграл в теории Дирака с заданными условиями монодромии для фермионных полей, рассматриваемый в рамках решеточной регуляризации. Тогда такие корреляционные функции могут быть связаны с другим решением задачи изомонодромной деформации уравнения Дирака. Для проверки этого предположения необходимо вычислить детерминант (2.9) и вывести дифференциальное уравнение для корреляционной функции твистованных полей.

Заметим, что с нашей точки зрения в приложении В работы [14] вместо вакуумного ожидания экспоненциального поля вычислялось вакуумное ожидание твистованного поля, однако использование нормировки, согласующейся с вычислениями асимптотики корреляционной функции экспоненциальных полей при $r \rightarrow 0$ [15], привело к правильному результату (1.8) для вакуумного ожидания экспоненциальных полей.

Благодарности. Авторы благодарят Н. А. Славнова, С.З. Пакуляка, С. Лукьянова и М. Лашкевича за полезные обсуждения. Один из авторов (В.Ш.) благодарит А. Ю. Морозова за поддержку и гостеприимство в ИТЭФ, где эта работа была закончена. Работа выполнена при поддержке программы INTAS (грант № 97-1312).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что при $r \rightarrow \infty$ справедливо следующее представление для детерминанта:

$$g(r) = |\cos^2 \pi \nu' + \sin^2 \pi \nu' \hat{C} \cdot \hat{C}^T| \underset{r \rightarrow \infty}{=} |1 - \sin^2 \pi \nu' \hat{A}|^2, \quad (\text{П.1})$$

где матрица

$$C_{x,y} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-(x-y)} C(z), \quad C(z) = \left[\frac{(1-\alpha z)(1-\beta z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z)} \right]^\mu \quad (\text{П.2})$$

для удобства определена с размерами $(r+1) \times (r+1)$ ($x, y = 0, 1, \dots, r$) и $0 < \mu < 1$. При $\mu = 1/2$ эта матрица совпадает с матрицей $V_{x,y}$ в детерминантном представлении корреляционной функции (2.9). В соотношении (П.1) матрица $\hat{A}$ задана соотношением

$$A_{x,y} = \oint_{|z_1 z_2| < 1} \frac{dz_1 dz_2 (z_1)^x (z_2)^y}{(1 - z_1 z_2)} C^{-1}(z_1) C^{-1}(z_2).$$

Представим произведение $\hat{C} \cdot \hat{C}^T$ в виде

$$\begin{aligned} (\hat{C} \cdot \hat{C}^T)_{x,y} &= \oint_{|z| < |\xi| < 1} \frac{d(z\xi)}{z\xi} z^{-x} \xi^y C(z) C(\xi^{-1}) \sum_{x'=0}^r \left(\frac{z}{\xi} \right)^{x'} = \\ &= \delta_{x,y} - A_{x,y} - B_{x,y}, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где

$$\begin{aligned} A_{x,y} &= - \oint_{|\xi| < 1 < |z|} \frac{d(z\xi) z^{-x} \xi^y}{z\xi(1 - \frac{z}{\xi})} \frac{C(z)}{C(\xi)} = \oint \frac{d(z\xi) z^x \xi^y}{1 - z\xi} \frac{1}{C(z)C(\xi)}, \\ B_{x,y} &= \oint_{|z| < |\xi| < 1} \frac{d(z\xi) z^{r+1-x} \xi^{y-r-1}}{z\xi(1 - \frac{z}{\xi})} \frac{C(z)}{C(\xi)} = \oint \frac{d(z\xi) z^{r+1-x} \xi^{y-r-1}}{1 - z\xi} C(z)C(\xi). \end{aligned}$$

При выводе (П.3) мы выполнили суммирование по x' геометрической прогрессии и использовали соотношение $C(z^{-1}) = C^{-1}(z)$. Подставляя (П.3) в (П.1), получаем

$$g(r) = |1 - s^2(\hat{A} + \hat{B})| = |(1 - s^2 \hat{A}) \cdot (1 - s^2 \hat{B}) - s^4 \hat{A} \cdot \hat{B}|, \quad (\text{П.4})$$

где $s = \sin \pi \nu'$.

Заметим, что матричные элементы матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют следующее асимптотическое поведение:

$$A_{x,y} \underset{x+y \gg 1}{\sim} \alpha^{x+y}, \quad B_{x,y} \underset{2r-x-y \gg 1}{\sim} \alpha^{2r-x-y},$$

следовательно, произведение $\hat{A} \cdot \hat{B}$ является экспоненциально малой матрицей. Действительно,

$$\begin{aligned} (\hat{A} \cdot \hat{B})_{xy} &= \oint \frac{d(z_1 \dots z_4)}{(1 - z_1 z_2)(1 - z_3 z_4)} \frac{C(z_3)C(z_4)}{C(z_1)C(z_2)} (z_1)^x (z_4)^{r-y} \frac{(z_3)^{r+1} - (z_2)^{r+1}}{z_3(1 - \frac{z_2}{z_3})} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \\ &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha^r \ln r}{r} \left(\oint \frac{dz z^x}{1 - \alpha z} C(z^{-1}) \right) \left(\oint \frac{dz z^{r-y}}{1 - \alpha z} C(z) \right). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

С учетом (П.5) в пределе $r \rightarrow \infty$ определитель (П.4) записывается в виде произведения определителей

$$g(r) \underset{r \rightarrow \infty}{=} |(1 - s^2 \hat{A})| |(1 - s^2 \hat{B})|. \quad (\text{П.6})$$

Покажем также, что $|(1 - s^2 \hat{A})| = |(1 - s^2 \hat{B})|$ при $r \rightarrow \infty$. Для этого матрицу $\hat{B}$ представим в виде

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{J} \cdot \hat{D} \cdot \hat{J}, \quad J_{x,y} = \delta_{x+y,r}, \quad (\hat{J} \cdot \hat{J})_{x,y} = \delta_{x,y}, \\ D_{x,y} &= \oint \frac{d(z\xi) z^x \xi^y}{1 - z\xi} C(z) C(\xi). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Используя это представление, нетрудно показать, что

$$|(1 - s^2 \hat{A})| = |(1 - s^2 \hat{D})|. \quad (\text{П.8})$$

Детерминанты в (П.8) удобно записать в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} \ln |1 - s^2 \hat{A}| &= \text{Sp} \ln(1 - s^2 \hat{A}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{2k}}{k} a_{2k}, \\ \ln |1 - s^2 \hat{D}| &= \text{Sp} \ln(1 - s^2 \hat{D}) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^{2k}}{k} d_{2k}, \end{aligned}$$

где

$$a_{2k} = \text{Sp}(\hat{A})^k, \quad d_{2k} = \text{Sp}(\hat{D})^k.$$

В пределе $r \rightarrow \infty$ матрицы $\hat{A}$ и $\hat{D}$ можно представить в факторизованном виде

$$\begin{aligned} \hat{A} &\underset{r \rightarrow \infty}{=} \hat{F}^{(a)} \cdot \hat{F}^{(a)}, \quad \hat{D} \underset{r \rightarrow \infty}{=} \hat{F}^{(d)} \cdot \hat{F}^{(d)}, \\ F_{x,y}^{(a)} &= \oint dz z^{x+y} C(z), \quad F_{x,y}^{(d)} = \oint dz z^{x+y} C^{-1}(z), \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \text{Sp}(\hat{F}^{(a)})^{2k} = \oint \prod_{l=1}^{2k} \left(\frac{dz_l C^{-1}(z_l)}{1 - z_l z_{l+1}} \right), \quad z_{2k+1} \equiv z_1, \\ d_{2k} &= \text{Sp}(\hat{F}^{(d)})^{2k} = \oint \prod_{l=1}^{2k} \left(\frac{dz_l C(z_l)}{1 - z_l z_{l+1}} \right), \quad z_{2k+1} \equiv z_1. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Рассмотрим для примера случай $k = 1$:

$$\begin{aligned} d_2 &= \oint_{|z_1 z_2| < 1} \frac{dz_1 dz_2}{(1 - z_1 z_2)^2} C(z_1) C(z_2) = \oint_{|z_1| < |z_2|} \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2} \frac{C(z_1)}{C(z_2)} = \\ &= \oint_{|z_2| < |z_1|} \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2} \frac{C(z_1)}{C(z_2)} + \oint dz C(z) \frac{\partial}{\partial z} C^{-1}(z). \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Второе слагаемое в правой части (П.10) обращается в нуль, т.к. является интегралом по замкнутому контуру от производной, и замена переменной $z_1 \rightarrow (z_1)^{-1}$ в первом слагаемом в правой части (П.10) дает

$$d_2 = \oint_{|z_1 z_2| < 1} \frac{dz_1 dz_2}{(1 - z_1 z_2)^2} \frac{1}{C(z_1)C(z_2)} = a_2. \quad (\text{П.11})$$

Для $k > 1$ нетрудно вывести рекуррентное соотношение

$$d_{2k} = a_{2k} + d_{2k-2} - a_{2k-2}. \quad (\text{П.12})$$

Для этого в выражении (П.9) для d_2 в интеграле делается замена переменных $z_l \rightarrow (z_l)^{-1}$. При этом контуры интегрирования переходят в такие, что $|z_l z_{l+1}| > 1$. Стягивая эти контуры последовательно по переменным z_l таким образом, чтобы $|z_l z_{l+1}| < 1$, и следя за вычетами в полюсах при $z_l = (z_{l+1})^{-1}$, мы получаем соотношение (П.12). С учетом “начального условия” (П.11) решением рекуррентного соотношения (П.12) является $a_{2k} = d_{2k}$, из которого следует равенство (П.8). В свою очередь, соотношения (П.8) и (П.6) приводят к выполнению представления (П.1).

Заметим, что, положив в (П.2) $\mu = 1/2$ и $\nu' = \nu$, из (П.1) получаем (3.3), а при $\mu = \nu$ и $\nu' = 1/2$ из (П.1) следует (3.17).

Список литературы

- [1] V. E. Korepin, N. A. Slavnov. The determinant representation for quantum correlation functions of the sinh-Gordon model. hep-th/9801046.
- [2] V. E. Korepin, T. Oota. The determinant representation for quantum correlation functions in scaling Lee-Yang model. hep-th/9802003.
- [3] F. A. Smirnov. Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory. Singapore: World Scientific, 1992.
- [4] S. Lukyanov. Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 2543.
- [5] V. Brazhnikov, S. Lukyanov. Nucl. Phys. B. 1998. V. 512. P. 616.
- [6] V. E. Korepin. Commun. Math. Phys. 1987. V. 113. P. 177.
- [7] Н. А. Славнов. Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 245. С. 270.
- [8] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. Cambridge: University Press, 1993.
- [9] J. B. Zuber, C. Itzykson. Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2875.
- [10] B. Schroer, T. T. Truong. Nucl. Phys. B. 1978. V. 144. P. 80.
- [11] P. Ginsparg. Applied conformal field theory. In: Champs, Cordes et Phenomenes Critiques. Les Houches 1988 Summer School. Eds. E. Brezin, J. Zinn-Justin. Amsterdam: North Holland, 1989. P. 1.
- [12] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1979. V. 15. P. 871.
- [13] D. Bernard, A. LeClair. Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 534.
- [14] S. Lukyanov, A. Zamolodchikov. Nucl. Phys. B. 1997. V. 493. P. 571.
- [15] E. L. Basor, C. A. Tracy. Inter. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. Sup. 1A. P. 83.
- [16] E. C. Marino, B. Schroer, J. A. Swieca. Nucl. Phys. B. 1982. V. 200. P. 473.
- [17] А. И. Бутрий, В. Н. Шадюра. ТМФ. 1995. Т. 103. С. 388.
- [18] B. M. McCoy, T. T. Wu. The Two-Dimensional Ising Model. Cambridge: Harvard University Press, 1973.

Поступила в редакцию 23.11.1999 г.