Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Горжини, Модель Хуанга–Янга–Латтинжера: гауссова доминантность и бозе-конденсация, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 2, 347–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 17:49:12

© 1999 г.

М. Горжини*

МОДЕЛЬ ХУАНГА–ЯНГА–ЛАТТИНЖЕРА: ГАУССОВА ДОМИНАНТНОСТЬ И БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ

Для модели Хуанга–Янга–Латтинжера доказано условие гауссовой доминантности в случае произвольного химического потенциала. С помощью данного условия в рамках метода корреляционных неравенств получены двусторонние оценки для соответствующих двухточечных термодинамических средних. На основе этих оценок доказано существование бозе-конденсации в данной модели.

1. МОДЕЛЬ ХУАНГА–ЯНГА–ЛАТТИНЖЕРА

Пусть Λ – открытая область единичного объема с гладкой границей в евклидовом ν -мерном пространстве R^ν и пусть $L \geq 1$. Пусть

$$\Lambda_L = \{Lx : x \in \Lambda\}, \quad \mathcal{H}^L = L^2(\Lambda_L)$$

и пусть $\mathcal{F}_B(\mathcal{H}^L)$ – симметричное фоковское пространство, построенное на $\mathcal{H}^L$. Оператор $S^L = -\Delta$ задает самосопряженный гамильтониан на $\mathcal{H}^L$ с дискретным спектром

$$0 = L^{-2}E_0 < L^{-2}E_1 \leq L^{-2}E_2 \leq \dots,$$

подсчитанным с учетом кратностей, и собственными функциями $\{\phi_k(x)\}$, удовлетворяющими уравнению

$$-\frac{1}{2}\Delta\phi_k(x) = L^{-2}E_k\phi_k(x)$$

при подходящих граничных условиях. Набор функций $\{\phi_k(x)\}$ образует базис в пространстве $L^2(\Lambda_L)$. Любая функция $\psi(x_1, \dots, x_N) \in L^2(\Lambda_L^N)$ может быть задана с помощью множества функций

$$\{\psi_k(x_1, \dots, x_N) = \bigotimes_{j=1}^N \phi_{k_j}(x_j)\},$$

* Математический факультет Университета Ла-Серены, Ла-Серена, Чили

где $k = \{k_1, k_2, \dots, k_N\}$. Это множество образует ортонормальный базис в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}^{N,L} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}^L,$$

снабженным скалярным произведением

$$\langle \psi_k, \psi_l \rangle = \prod_{j=1}^N \langle \phi_{k_j}, \phi_{l_j} \rangle_{L^2(\Lambda_L)},$$

где $\langle \phi_{k_j}, \phi_{l_j} \rangle_{L^2(\Lambda_L)}$ – обычное скалярное произведение в пространстве $L^2(\Lambda_L) = \mathcal{H}^L$.

Обозначим через $\mathcal{H}_B^{N,L}$ подпространство $\mathcal{H}^{N,L}$, состоящее из симметричных функций (бозе-система) и снабженное ортонормальным базисом, построенным из базиса $\{\psi_k\}$ с помощью симметризации. Если положить $\mathcal{H}_B^{0,L} = C$, то фоковское пространство $\mathcal{F}_B(\mathcal{H}^L)$ определяется соотношением

$$\mathcal{F}_B(\mathcal{H}^L) = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_B^{N,L}.$$

В этой статье изучается так называемая модель Хуанга–Янга–Латтинжера [1], оператор энергии которой имеет вид

$$H^L = \sum_{j \geq 1} \lambda_L(j) a_j^\dagger a_j + \frac{a}{2V} \left[2\hat{N}^2 - \sum_{j \geq 1} n_j^2 \right] \equiv H_0 + H_I, \quad (1)$$

где V – объем области Λ_L , $\lambda_L(j) = L^{-2} E_j$, H_0 задает свободный гамильтониан в $\mathcal{F}_B(\mathcal{H}^L)$, построенный обычным способом из S^L . Оператор

$$\hat{N} = \sum_{j \geq 1} n_j = \sum_{j \geq 1} a_j^\dagger a_j$$

есть оператор числа частиц, $a_j^\dagger$, a_j – бозевские операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[a_i, a_j^\dagger] = a_i a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i = \delta_{i,j}.$$

Постоянная $a > 0$ ассоциируется с коэффициентом преломления при оптической аналогии, используемой в физической интерпретации рассматриваемой модели.

Очевидно, что

$$\hat{N} \psi_k^B(x_1, \dots, x_N) = N \psi_k^B(x_1, \dots, x_N).$$

Введем гиббсовское состояние термодинамического равновесия

$$\langle \dots \rangle_{H^L} = \frac{\text{Tr} \dots e^{-\beta(H^L - \mu \hat{N})}}{\text{Tr} e^{-\beta(H^L - \mu \hat{N})}} \quad (2)$$

и среднюю плотность числа частиц в конечном объеме $\rho_V = \langle \hat{N}/V \rangle_{H^L} = \langle \hat{n} \rangle_{H^L}$, где $\hat{n}$ – оператор плотности. В термодинамическом пределе плотность

$$\rho = \lim_{L \rightarrow \infty} \rho_V, \quad (3)$$

μ и β представляют собой химический потенциал и обратную температуру, соответственно.

2. ГАУССОВА ДОМИНАНТНОСТЬ

Рассмотрим функцию распределения большого канонического ансамбля

$$\begin{aligned} Z_{\beta, \mu}[H^L] &= \text{Tr} e^{-\beta(H^L - \mu \hat{N})} = \sum_{N=0}^{\infty} \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} e^{-\beta(H^L - \mu \hat{N})} = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} e^{-\beta H^{N,L}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $H^{N,L} = H^L|_{\mathcal{H}_B^{N,L}}$, $Z_{\beta, \mu}[H^L]_{N=0} = 1$, $[H^L]_{N=1} = H_0$. Величина $\text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}}(\dots)$ задает ограничение следа на пространство $\mathcal{H}_B^{N,L}$.

Рассмотрим семейство операторов

$$H^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) = \sum_{j \geq 1} \lambda_L(j) \left(a_j^\dagger - \frac{h_j^*}{\sqrt{V}} \right) \left(a_j - \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right) + H_I \equiv H_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) + H_I,$$

где $\lambda_L(j) = L^{-2} E_j$ и только конечное число параметров $h_j \in C$ отлично от нуля.

Имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \text{Tr} \exp \left\{ -\beta \left(H^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) - \mu \hat{N} \right) \right\} &= \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} \exp \left\{ -\beta H_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) + \beta H_I \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ясно, что оператор $H_I|_{\mathcal{H}_B^{N,L}}$ положителен.

Введем в рассмотрение так называемое обобщенное неравенство Голдена–Томпсона. Пусть $-A$ и $-B$ – положительные, самосопряженные операторы и пусть оператор $A+B$ существенно самосопряжен на $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Тогда

$$\text{Tr} e^{A+B} \leq \text{Tr}(e^A e^B).$$

Соотношение (5) и неравенство Голдена–Томпсона ведут к неравенству

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} \exp \left\{ -\beta \left[H_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) + H_I \right] \right\} &\leq \\ &\leq \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} \left(\exp \left\{ -\beta H_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) \right\} e^{-\beta H_I} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

которое можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \text{Tr} \exp \left\{ -\beta \left(H^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) - \mu \hat{N} \right) \right\} &\leq \\ &\leq \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} \left(\exp \left\{ -\beta H_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) \right\} e^{-\beta H_I} \right) = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta V \mu n} \text{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} \left(\exp \left\{ -\beta H_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) \right\} e^{-\beta H_I} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Для каждого N существует унитарный оператор U_N такой, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} \left(\exp \left\{ -\beta H_0 \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) \right\} e^{-\beta H_I} \right) &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} (U_N^+ e^{-\beta H_0} U_N e^{-\beta H_I}) \leq \\ &\leq \|U_N^+\|_{\mathcal{H}_B^{N,L}} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} (e^{-\beta H_0} U_N e^{-\beta H_I}). \end{aligned} \quad (8)$$

Из цикличности следа вытекает, что

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} (e^{-\beta H_0} U_N e^{-\beta H_I}) \leq \|U_N\|_{\mathcal{H}_B^{N,L}} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} (e^{-\beta H_0} e^{-\beta H_I}),$$

где $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_B^{N,L}}$ есть обычная норма в $\mathcal{H}^{N,L}$. Учитывая, что $\|U_N^+\|_{\mathcal{H}_B^{N,L}} = 1$, $\hat{N}$ коммутирует с H^L и H_0 коммутирует с H_I , из уравнения (5) и неравенства (8) получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} \exp \left\{ -\beta \left(H^L \left(\left\{ \frac{h_j}{\sqrt{V}} \right\} \right) - \mu \hat{N} \right) \right\} &\leq \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta V \mu n} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B^{N,L}} e^{-\beta H^{N,L}} = \\ &= \mathrm{Tr} e^{-\beta (H^L - \mu \hat{N})}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Для модельной системы с гамильтонианом (1) выполняется неравенство для следов*

$$Z_{\beta, \mu} [H^L(\{h_j\})] \leq Z_{\beta, \mu} [H^L]. \quad (9)$$

3. БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ

3.1. Вероятностная интерпретация. В вероятностном подходе, развитом в работах [2–4], можно считать числа заполнения случайными переменными, а не операторами. Следуя методу работы [3], будем рассматривать вероятностное пространство, в котором случайные переменные являются элементами счетного множества Ω ограниченных последовательностей неотрицательных целых чисел, т.е. элемент $\omega \in \Omega$ есть последовательность $\{\omega(j) \in N : j = 1, 2, \dots\}$ такая, что

$$\sum_{j \geq 1} \omega(j) < \infty.$$

Основными случайными переменными являются числа заполнения $\{n_j : j = 1, 2, \dots\}$. При этом отображение $n_j : \Omega \rightarrow N$ определено так, что $n_j(\omega) = \omega(j)$ для всех $\omega \in \Omega$.

В таком подходе гамильтониан модели Хуанга–Янга–Латтинжера представляется в виде

$$H^L(\omega) = \sum_{j \geq 1} \lambda_L(j) n_j(\omega) + \frac{a}{2V} \left[2N^2(\omega) - \sum_{j \geq 1} n_j^2(\omega) \right] \equiv H_0(\omega) + H_I(\omega). \quad (10)$$

Давление $p_L(\alpha)$ идеального бозе-газа в объеме Λ_L при химическом потенциале α можно записать для $\alpha < 0$ как

$$P_L(\alpha) = (\beta V)^{-1} \sum_{j \geq 1} \ln [1 - e^{\beta(\alpha - \lambda_L(j))}]^{-1}. \quad (11)$$

Определим парциальное давление

$$P(\alpha | \lambda) = \beta^{-1} \ln[1 - e^{\beta(\alpha - \lambda)}]^{-1}$$

и функцию распределения

$$F_L(\lambda) = V^{-1} \max\{j : \lambda_L(j) \leq \lambda\}.$$

Тогда формула (11) переписывается в виде

$$P_L(\alpha) = \int_{[0, \infty)} P(\alpha | \lambda) dF_L(\lambda).$$

Для обеспечения сходимости последовательности $\{P_L(\alpha)\}$ в работе [3] определяется функция

$$\Phi_L(\beta) = \int_{[0, \infty)} e^{-\beta\lambda} dF_L(\lambda)$$

и вводятся следующие условия:

- 1) $\Phi(\beta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \Phi_L(\beta)$ существует для всех β из интервала $[0, \infty)$,
- 2) $\Phi(\beta)$ отлична от нуля, по крайней мере для одного значения β из $(0, \infty)$ при выполнении условия 1.

При выполнении условия 1 существует единственное распределение F такое, что

$$\Phi(\beta) = \int_{[0, \infty)} e^{-\beta\lambda} dF(\lambda)$$

и $F_L(\lambda) \rightarrow F(\lambda)$, по крайней мере в точках непрерывности функции F . Функция F является интегральной плотностью состояний.

Если условия 1 и 2 выполнены, то предел

$$P(\alpha) = \lim_{L \rightarrow \infty} P_L(\alpha)$$

существует для $\alpha < 0$ и задается формулой

$$P(\alpha) = \int_{[0, \infty)} P(\alpha | \lambda) dF(\lambda).$$

Критическая плотность ρ_c определяется следующим образом: если функция $\lambda \rightarrow P'(0 | \lambda)$ интегрируема на $[0, \infty)$ по отношению к F , то

$$\rho_c = \int_{[0, \infty)} P'(0 | \lambda) dF(\lambda).$$

Пусть $E_\mu(Y)$ обозначает математическое ожидание случайной переменной Y в большом каноническом ансамбле со средней плотностью ρ . Будем говорить, что происходит макроскопическое заполнение основного состояния, если предел

$$\lim_{V \rightarrow \infty} E_\mu[V^{-1}n(1)]$$

существует и строго положителен.

3.2. Верхняя и нижняя оценки для $E_\mu(n_j)$. Используя стандартную процедуру [5] и полученную в разделе 2 оценку, можно написать следующие неравенства для $E_\mu(n_j)$ в объеме V :

$$E_\mu(n_j) \leq \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{R_L(j, \mu)}{\lambda(j)}} \operatorname{ch} \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\lambda(j)(R_L(j, \mu))} \right) - 1 \right], \quad (12)$$

$$E_\mu(n_j) \geq \frac{1}{e^{R_L(j, \mu)} - 1}, \quad (13)$$

где

$$R_L(j, \mu) = \lambda_L(j) - \mu + 2a \left(E_\mu \left(\frac{N}{V} \right) + E_\mu \left(\frac{n_j}{V} \right) + \frac{1}{V} \right).$$

Предполагая интегрируемость функции $P'(0|\mu)$ по отношению к мере $dF_L(\lambda)$, с учетом приведенных оценок имеем в пределе $V \rightarrow \infty$ равенство

$$\lim_{V \rightarrow \infty} E_\mu \left(\frac{N}{V} \right) - \lim_{V \rightarrow \infty} E_\mu \left(\frac{n(1)}{V} \right) = \int_{[0, \infty)} \frac{dF(\lambda)}{e^{\beta\lambda} - 1}, \quad (14)$$

где $\mu = 2a\rho = \lim_{V \rightarrow \infty} E_\mu(N/V)$.

Иными словами, модель Хуанга–Янга–Латтинжера допускает наличие бозе-конденсации для обратных температур $\beta > \beta_c$, где β_c определяется единственным решением уравнения

$$\rho_c = \int_{[0, \infty)} \frac{dF(\lambda)}{e^{\beta_c\lambda} - 1} \quad (15)$$

и $\mu_c = 2a\rho_c$.

Полученный результат для значения химического потенциала $\mu_c = 2a\rho_c$ совпадает с результатом статьи [3], где использован метод больших уклонений для доказательства существования бозе-конденсации. Однако в отличие от метода больших уклонений работы [3] наш подход не дает информации о поведении системы для значений химического потенциала, меньших критического.

Благодарности. Данная работа частично финансировалась Президентской кафедрой стохастического анализа (Чили) (Cátedra Presidencial en Análisis Estocástico, Chile).

Список литературы

- [1] K. Huang, C. N. Yang, J. M. Luttinger. Phys. Rev. 1957. V. 105. P. 776.
- [2] M. van den Berg, J. T. Lewis. Helv. Phys. Acta. 1986. V. 59. P. 1271.
- [3] M. van den Berg, J. T. Lewis, J. V. Pulé. Commun. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 61.
- [4] M. van den Berg, J. T. Lewis, P. de Smedt. J. Stat. Phys. 1984. V. 37. P. 697.
- [5] M. Corgini, D. P. Sankovich. Int. J. Mod. Phys. B. 1997. V. 11. № 28. P. 3329.

Поступила в редакцию 3.III.1999 г.