Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Джалилов, Гельдеровость сингулярных мер гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 3, 355–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:57:09

© 1999 г.

А. А. Джалилов*

ГЕЛЬДЕРОВСТЬ СИНГУЛЯРНЫХ МЕР ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ИЗЛОМА

Гомеоморфизмы окружности с особенностью типа излома имеют инвариантную меру, сингулярную относительно меры Лебега. Доказывается, что сингулярность инвариантной меры является гельдеровской.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе изучаются инвариантные меры гомеоморфизмов окружности с особенностями типа излома. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям [1]:

- а) $f(x)$ — непрерывная, строго возрастающая функция на $\mathbb{R}^1$ и $0 < f(0) < 1$;
- б) $f(x+1) = f(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$;
- в) существует точка $x_c \in [0, 1)$ такая, что $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([x_c, x_c + 1])$ при некотором $\varepsilon > 0$, $f'(x) > \text{const} > 0 \quad \forall x \in [x_c, x_c + 1]$;
- г) односторонние производные $f'(x_c - 0)$ и $f'(x_c + 0)$ удовлетворяют соотношению

$$\sqrt{\frac{f'(x_c - 0)}{f'(x_c + 0)}} = c \neq 1.$$

Всякий сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности с одной точкой излома однозначно определяется функцией $f(x)$ и задается формулой

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1 = [0, 1),$$

где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Гомеоморфизмы с одной точкой излома занимают промежуточное место между диффеоморфизмами, отвечающими $c = 1$, и критическими отображениями окружности [1]. С одной стороны, для однопараметрических семейств гомеоморфизмов с особенностью типа излома множество значений параметра, отвечающих иррациональным числам вращения, имеет лебегову меру нуль, а сама

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: info@mchmat.samuni.silk.org

динамика характеризуется нетривиальными скейлингами. С другой стороны, как и в случае диффеоморфизмов окружности, ренормгрупповое поведение для подобных отображений выглядит достаточно просто. В перенормированных координатах итерации отображений асимптотически приближаются к дробно-линейным преобразованиям, зависящим лишь от двух параметров. Обозначим через $\rho = \rho(f)$ число вращения, отвечающее гомеоморфизму T_f . Всюду в дальнейшем будем предполагать, что число вращения ρ иррационально. Хорошо известно, что в этом случае гомеоморфизм T_f строго эргодический, т.е. обладает единственной нормированной инвариантной мерой ν [2]. Отсюда следует, что T_f является эргодическим относительно меры ν .

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма T_f удовлетворяет условиям “a”–“g” и число вращения ρ иррационально. Тогда T_f является эргодическим относительно меры Лебега λ .*

В отличие от типичных гладких диффеоморфизмов [3–7], инвариантные меры гомеоморфизмов с одним изломом сингулярны относительно меры Лебега [8]. Описание многих физических явлений может быть сведено к изучению статистических свойств сингулярных инвариантных мер [9, 10]. Математически строгие результаты, относящиеся к сингулярным мерам гомеоморфизмов окружности, были получены в работе [11] для критических гомеоморфизмов из класса C^3 с иррациональным числом вращения ограниченного типа. Последнее означает, что элементы разложения ρ в непрерывную дробь равномерно ограничены.

Классическая теорема Данжуа легко переносится на случай гомеоморфизмов с особенностью типа излома [1]. Согласно этой теореме, если $\text{var}_{[x_c, x_{c+1}]} \ln f'(x) < \infty$, то существует гомеоморфизм окружности φ такой, что

$$\varphi(T_f x) = T_\rho \varphi(x), \quad x \in S^1, \quad (1.1)$$

где $T_\rho x = \{x + \rho\}$ – поворот окружности на угол ρ . С другой стороны, гомеоморфизм φ можно выразить через инвариантную меру ν :

$$\varphi(x) = \nu([0, x]), \quad x \in S^1.$$

Определим две важные функции на окружности, характеризующие инвариантную меру ν ,

$$\underline{\tau}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln |\varphi(x + \varepsilon) - \varphi(x)|}{\ln |\varepsilon|}, \quad \overline{\tau}(x) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln |\varphi(x + \varepsilon) - \varphi(x)|}{\ln |\varepsilon|}.$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ называются соответственно нижним и верхним показателями сингулярности для меры ν .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Сингулярная инвариантная мера μ называется *гельдеровской*, если существуют константы C_1 и C_2 , $0 < C_1 < C_2 < 1$, такие, что на множестве “полной” меры μ справедливы неравенства

$$C_1 \leq \underline{\tau}(x) \leq \overline{\tau}(x) \leq C_2.$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ — инвариантные функции относительно T_f . Отсюда, а также из эргодичности T_f относительно мер ν и λ следует, что обе эти функции являются почти постоянными по мере ν и по мере λ . Эти постоянные обозначим соответственно $\underline{\tau}(\nu)$, $\overline{\tau}(\nu)$ и $\underline{\tau}(\lambda)$, $\overline{\tau}(\lambda)$.

Сформулируем теперь основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть определяющая функция $f(x)$ гомеоморфизма T_f удовлетворяет условиям “а”–“г”, а число вращения $\rho(f)$ иррациональное ограниченного типа. Тогда справедливы следующие неравенства:

- 1) $0 < \underline{\tau}(\nu) \leq \overline{\tau}(\nu) < 1$;
- 2) $1 < \underline{\tau}(\lambda) \leq \overline{\tau}(\lambda) < +\infty$.

Из первого утверждения непосредственно следует гельдеровость инвариантной меры ν .

Другой важной характеристикой сингулярной инвариантной меры ν является хаусдорфова размерность $HD(\nu)$ (точная нижняя грань размерностей множеств “полной” меры ν).

ЛЕММА ФРОСТМАНА. Пусть μ — борелевская вероятностная мера на интервале I для почти всех x (по мере μ)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \mu([x, x + \varepsilon])}{\ln |\varepsilon|} = \chi.$$

Тогда хаусдорфова размерность $HD(\mu)$ совпадает с χ , т.е. $HD(\mu) = \chi$.

Из этой леммы следует, что $HD(\nu) = \underline{\tau}(\nu)$. Отсюда, используя первое утверждение теоремы 1.2, получаем оценку для хаусдорфовой размерности

$$0 < HD(\nu) < 1.$$

2. ДИНАМИЧЕСКИЕ РАЗБИЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T_f с определяющей функцией $f(x)$, т.е.

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1.$$

Пусть число вращения $\rho(f)$ иррационально и его разложение в непрерывную дробь имеет вид $\rho(f) = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$. Обозначим через $p_n/q_n = [k_1, k_2, \dots, k_n]$, $n \geq 1$, конечные дроби числа $\rho(f)$. Числа p_n и q_n удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= k_{n+1}p_n + p_{n-1}, & p_0 &= 0, & p_1 &= 1, \\ q_{n+1} &= k_{n+1}q_n + q_{n-1}, & q_0 &= 1, & q_1 &= k_1. \end{aligned}$$

Возьмем произвольную точку $x_0 \in S^1$ и при помощи траектории этой точки построим последовательность разбиений окружности. Обозначим через $\Delta_0^{(n)} x_0$ замкнутую дугу, концами которой служат точки x_0 и $x_{q_n} = T_f^{q_n} x_0$. Заметим, что при нечетном n точка x_{q_n} лежит слева от x_0 , а при четном n — справа. Обозначим

$$\Delta_i^{(n)}(x_0) = T_f^i \Delta_0^{(n)}(x_0), \quad i \geq 1.$$

ЛЕММА 2.1 [12]. Точки $\{x_i, 0 \leq i < q_n + q_{n-1}\}$ разбивают окружность на непесекающиеся (за исключением концевых точек) дуги: $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$, $0 \leq i < q_n$, и $\Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq j < q_{n-1}$.

Полученное разбиение обозначим через $\xi_n(x_0)$ и назовем динамическим разбиением n -го порядка.

Опишем теперь процесс перехода от $\xi_n(x_0)$ к $\xi_{n+1}(x_0)$. Все дуги $\Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \leq j \leq q_{n-1} - 1$, сохраняются, а каждая дуга $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$, $0 \leq i \leq q_n - 1$, разбивается на $k_{n+1} + 1$ дуг:

$$\Delta_i^{(n-1)}(x_0) = \Delta_i^{(n+1)}(x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{k_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0). \quad (2.1)$$

ЛЕММА ДАНЖУА [1]. Пусть в точке $x_c \in S^1$ существуют конечные односторонние производные $f'(x_c \pm 0)$:

$$f'(x_c \pm 0) > 0, \quad f(x) \in C^1[x_c, x_c + 1] \quad \text{и} \quad \text{var}_{[x_c, x_c+1]} \ln f'(x) = \bar{v} < \infty.$$

Положим

$$v = \bar{v} + |\ln f'(x_c - 0) - \ln f'(x_c + 0)|.$$

Тогда для любого y_0 такого, что $y_j \neq x_c$, $0 \leq j \leq q_k - 1$, $k \in N$, справедливы неравенства

$$e^{-v} \leq \prod_{j=0}^{q_k-1} f'(y_j) \leq e^v. \quad (2.2)$$

Из леммы Данжуа следует, что длины дуг, составляющих динамическое разбиение $\xi_n(x_0)$, экспоненциально убывают. Более точно справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.2 [1]. Пусть выполнены условия леммы Данжуа. Тогда для любого $y_0 \in S^1$

$$|\Delta_0^{(n)}(y_0)| \leq \text{const } \lambda^{2k} |\Delta_0^{(n-2k)}(y_0)|, \quad 0 \leq 2k < n,$$

где $\lambda = (1 + e^{-v})^{-1/2} < 1$, а $|\cdot|$ обозначает длину дуги.

В случае, когда число вращения ρ является иррациональным типа константы, утверждение леммы 2.2 можно усилить.

ЛЕММА 2.3. Пусть выполнены условия леммы Данжуа и число вращения является иррациональным типа константы.

1. Тогда для любого $y_0 \in S^1$ справедливы неравенства

$$\text{const } \lambda_1^{2k} |\Delta_0^{(n-2k)}(y_0)| \leq |\Delta_0^{(n)}(y_0)| \leq \text{Const } \lambda^{2k} |\Delta_0^{(n-2k)}(y_0)|,$$

где λ_1 , $0 < \lambda_1 < \lambda$, не зависит от n, k и y_0 .

2. Пусть $\Delta_s^{(n)}(y_0) \in \xi_n(y_0)$, $\Delta_t^{(n+1)}(y_0) \in \xi_{n+1}(y_0)$ и $\Delta_t^{(n+1)}(y_0) \subset \Delta_s^{(n)}(y_0)$. Тогда существуют константы C_i , $0 < C_i < 1$, $i = 3, 4$, такие, что,

$$C_3 \leq \frac{|\Delta_t^{(n+1)}(y_0)|}{|\Delta_s^{(n)}(y_0)|} \leq C_4.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

В этом разделе мы докажем эргодичность T_f относительно меры Лебега λ .

Предположим, что множество $A \subset S^1$ является инвариантным и $\lambda(A) > 0$. Тогда A имеет точку плотности $z_0 \in S^1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению точки плотности найдется такое $\delta > 0$, что для любой дуги $[a, b]$, удовлетворяющей условиям $z_0 \in [a, b]$ и $[a, b] \subset (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$, будет выполнено $\lambda(A \cap [a, b]) \geq (1 - \varepsilon)\lambda[a, b]$ или иначе $\lambda(B \cap [a, b]) < \varepsilon\lambda[a, b]$, где $B = S^1 \setminus A$. Обозначим $V_0^{(n)}(z_0) = \Delta_0^{(n-1)}(z_0) \cup \Delta_0^{(n)}(z_0)$. При достаточно больших n имеем $V_0^{(n)}(z_0) \subset (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$. Поэтому $\lambda(B \cap V_0^{(n)}(z_0)) < \varepsilon\lambda(V_0^{(n)}(z_0))$. Система дуг $\{V_i^{(n)}(z_0), i = \overline{0, (q_n - 1)}\}$ покрывает окружность, и каждая точка окружности принадлежит не более чем двум дугам $V_i^{(n)}(z_0)$, $i = \overline{0, (q_n - 1)}$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} |V_i^{(n)}(z_0)| \leq 2.$$

Фиксируем теперь $y_0 \in V_0^{(n)}(z_0) \setminus \{T^{(m)}x_c, m \in Z'\}$. Пусть $x_c \in V_i^{(n)}(z_0)$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{|V_k^{(n)}(z_0)|}{|V_0^{(n)}(z_0)|} &= \frac{1}{|V_0^{(n)}(z_0)|} \int \frac{\frac{d}{dx}f^{(i)}(x)}{\prod_{m=0}^{i-1} f'(y_m)} dx \frac{1}{|V_i^{(n)}(z_0)|} \int_{V_i^{(n)}(z_0)} \frac{f'(x)}{f'(y_i)} dx \times \\ &\times \frac{1}{|V_{i+1}^{(n)}(z_0)|} \int_{V_{i+1}^{(n)}(z_0)} \frac{\frac{d}{dx}f^{(k-i)}(x)}{\prod_{m=i+1}^{k-1} f'(y_m)} dx = I_1 \times I_2 \times I_3. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из условия $f'(x) \geq \text{const} > 0 \quad \forall x \in [x_c, x_c + 1]$ следует, что

$$\frac{m}{M} \leq I_2 \leq \frac{M}{m},$$

где $m = \min_{[x_c, x_c+1]} f'(x)$, $M = \max_{[x_c, x_c+1]} f'(x)$. Теперь оценим $I_1 \times I_3$. Пусть $x \in V_0^{(n)}(z_0)$, тогда

$$\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{k-1} \frac{f'(T^m x)}{f'(T^m y_0)} = \exp \left\{ \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{k-1} \ln \left[1 + \frac{f''(\theta_m)(T^m x - T^m y_0)}{f'(T^m y_0)} \right] \right\}. \quad (3.2)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{k-1} \ln \left[1 + \frac{f''(\theta_m)(T^m x - T^m y_0)}{f'(T^m y_0)} \right] \right| &\leq \text{const} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{k-1} |T^m x - T^m y_0| \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{k-1} |V_m^{(n)}(z_0)| \leq \text{Const}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Используя (3.2) и (3.3), получаем

$$\text{const} \leq I_1 \times I_3 \leq \text{Const}.$$

Из полученных выше оценок следует, что

$$0 < \text{const} \leq \frac{\frac{|V_k^{(n)}(z_0)|}{|V_0^{(n)}(z_0)|}}{\prod_{m=0}^{k-1} f'(y_m)} \leq \text{Const}, \quad 0 \leq k \leq q_n - 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \lambda(B \cap V_k^{(n)}(z_0)) &= \lambda(T^k B \cap T^k V_0^{(n)}(z_0)) = \lambda(T^k(B \cap V_0^{(n)}(z_0))) = \\ &= \int_{B \cap V_0^{(n)}(z_0)} \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) dx = \\ &= \prod_{m=0}^{k-1} f'(y_m) \int_{B \cap V_0^{(n)}(z_0)} \frac{\frac{d}{dx} f^{(k)}(x)}{\prod_{m=0}^{k-1} f'(y_m)} dx \leq \\ &\leq \text{const} \frac{|V_k^{(n)}(z_0)|}{|V_0^{(n)}(z_0)|} \lambda(B \cap V_0^{(n)}(z_0)) \leq \text{const} \varepsilon |V_k^{(n)}(z_0)|. \end{aligned}$$

Просуммируем по k от 0 до $q_n - 1$:

$$\lambda(B) = \sum_{k=0}^{q_n-1} \lambda(B \cap V_k^{(n)}(z_0)) \leq \text{const} \varepsilon \sum_{k=0}^{q_n-1} |V_k^{(n)}(z_0)| \leq \text{const} \varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем $\lambda(B) = 0$. Отсюда следует, что $\lambda(A) = 1$. Теорема 1.1 доказана.

4. РАСХОЖДЕНИЕ МЕЖДУ РАЗБИЕНИЯМИ

Здесь вводится величина, являющаяся мерой нелинейного поведения отображений с особенностями, и показывается, что гомеоморфизмы окружности с одной точкой излома лежат на некотором равномерном расстоянии от типичных диффеоморфизмов.

Пусть I – замкнутая дуга единичной окружности. В дальнейшем будем рассматривать конечные или счетные разбиения ξ дуги I со следующими свойствами:

1. Каждый элемент ω разбиения ξ есть замкнутая дуга, и любые две дуги ξ могут пересекаться только в концевых точках.
2. Энтропия $H(\xi)$ конечна.

Определим вероятностную меру μ на ξ по формуле

$$\mu(X) = \sum_{\omega \in X} \frac{|\omega|}{|I|}, \quad (4.1)$$

где $X \subset \xi$ и $|\cdot|$ обозначает длину дуги.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Разбиения ξ_1 и ξ_2 дуг I_1 и I_2 называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: I_1 \rightarrow I_2$, взаимно однозначно переводящий каждый элемент из ξ_1 в элемент из ξ_2 .

Обозначим через μ_i , $i = 1, 2$, вероятностные меры на ξ_i , $i = 1, 2$, определенные по формуле (4.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. *Величиной расхождения* между изоморфными разбиениями ξ_1 и ξ_2 называется число

$$\sum_{\omega \in \xi_1}^+ \ln \frac{\mu_2(h(\omega))}{\mu_1(\omega)} \mu(\omega), \quad (4.2)$$

где $\sum^+$ означает суммирование по всем таким ω , при которых $\mu_2(h(\omega)) > \mu_1(\omega)$. Значение суммы (4.2) обозначим через $\delta(\xi_1, \xi_2)$.

Из конечности $H(\xi_i)$, $i = 1, 2$, следует, что ряд (4.2) сходится, т.е. $\delta(\xi_1, \xi_2)$ — конечное число.

Возьмем два экземпляра единичной окружности. Предположим, что на первой окружности действует гомеоморфизм T_f , а на второй — линейный поворот T_ρ . Пусть начальная точка совпадает с точкой излома, т.е. $x_0 = x_c$. Для каждого n и r ($n, r \in \mathbb{N}$) обозначим через ξ_{nr} и η_{nr} динамические разбиения, полученные при помощи траекторий x_0 соответственно на первой и второй окружностях.

Рассмотрим дуги $\Delta^{(nr)}(f) \in \xi_{nr}$ и $\Delta^{(nr)}(\rho) \in \eta_{nr}$, $\Delta^{(nr)}(\rho) = \varphi(\Delta^{(nr)}(f))$. Ограничения $\xi_{(n+1)r}$ на $\Delta^{(nr)}(f)$ и $\eta_{(n+1)r}$ на $\Delta^{(nr)}(\rho)$ обозначим соответственно через $\xi_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(f))$ и $\eta_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(\rho))$. Сужение сопрягающего гомеоморфизма φ на дугу $\Delta^{(nr)}(\rho)$ является изоморфизмом разбиений $\xi_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(f))$ и $\eta_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(\rho))$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Существует некоторое натуральное число r такое, что при достаточно больших n справедливо неравенство*

$$\delta(\xi_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(f)), \eta_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(\rho))) \geq \text{const} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства будем использовать ренормгрупповое поведение гомеоморфизма T_f [1]. Для определенности предположим, что $\Delta^{(nr)}(f) = \Delta_0^{(nr-1)}(f)$ и nr — четное число. Тогда

$$\Delta_0^{(nr-1)}(f) = [x_{q_{nr-1}}, x_0], \quad \Delta_0^{(nr)}(f) = [x_0, x_{q_{nr}}].$$

В методе ренормгруппы важное место занимает изучение поведения следующих отображений при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} T_f^{q_{nr}}: [x_{q_{nr-1}}, x_0] &\longrightarrow [x_{q_{nr-1}+q_{nr}}, x_{q_{nr}}], \\ T_f^{q_{nr-1}}: [x_0, x_{q_{nr}}] &\longrightarrow [x_{q_{nr-1}}, x_{q_{nr-1}+q_{nr}}]. \end{aligned}$$

В окрестности $[x_{q_{nr-1}}, x_{q_{nr}}]$ введем перенормированную переменную

$$z = \frac{x - x_0}{x_0 - x_{q_{nr-1}}}.$$

Очевидно, что $x_0 \rightarrow 0$ и $x_{q_{nr-1}} \rightarrow -1$ в новых координатах. Обозначим через a_{nr} и $-b_{nr}$ перенормированные координаты соответствующих точек $x_{q_{nr}}$ и $x_{q_{nr-1}+q_{nr}}$, т.е.

$$a_{nr} = \frac{x_{q_{nr}} - x_0}{x_0 - x_{q_{nr-1}}}, \quad b_{nr} = \frac{x_0 - x_{q_{nr-1}+q_{nr}}}{x_0 - x_{q_{nr-1}}}.$$

Положим

$$M_{nr} = \exp \left\{ \sum_{i=0}^{q_{nr}-1} \int_{x_i+q_{nr-1}}^{x_i} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy \right\}.$$

Заметим, что $0 < -a_{nr} \leq b_{nr} < 1$ и $\exp(-1/2v) \leq M_{nr} \leq \exp(1/2v)$. В новых координатах дугам $[x_{q_{nr-1}}, x_0]$ и $[x_0, x_{q_{nr}}]$ соответствуют дуги $[-1, 0]$ и $[0, a_{nr}]$, а $T_f^{q_{nr}}$ и $T_f^{q_{nr-1}}$ соответствуют следующие функции:

$$f_{nr}(z) = \frac{T_f^{q_{nr}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_{nr-1}})) - x_0}{x_0 - x_{q_{nr-1}}}, \quad z \in [-1, 0],$$

$$g_{nr}(z) = \frac{T_f^{q_{nr-1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_{nr-1}})) - x_0}{x_0 - x_{q_{nr-1}}}, \quad z \in [0, a_{nr}].$$

Обозначим

$$F_{nr}(z) = \frac{a_{nr} + (a_{nr} + b_{nr}M_{nr})z}{1 + (1 - M_{nr})z},$$

$$G_{nr}(z) = \frac{-a_{nr}c + (c - b_{nr}M_{nr})z}{a_{nr}c + (M_{nr} - c)z}.$$

В работе [1] доказано, что для всех $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \|f_{nr}(z) - F_{nr}(z)\|_{C^2[-1,0]} &\leq \text{const } \lambda^{nr\varepsilon}, \\ \|g_{nr}(z) - G_{nr}(z)\|_{C^2[0,a_{nr}]} &\leq \text{const } \lambda^{nr\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Дробно-линейные функции F_{nr} и G_{nr} являются строго возрастающими, и, кроме того, существует некоторая константа $\chi < 0$ такая, что $\max_{[-1,0]} F_{nr}''(z)$ и $\max_{[0,a_{nr}]} G_{nr}''(z)$ меньше χ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если рассмотреть ренормгрупповое поведение функций $T_f^{q_{nr}}x$ и $T_f^{q_{nr}-1}x$ в окрестности $[x_{i+q_{nr-1}}, x_{i+q_{nr}}]$, то окажется, что функция $f_{nr}(z)$ близка (в смысле нормы C^2) на дуге $[-1, d_{nr}]$ к одной, а на дуге $[d_{nr}, 0]$ к другой дробно-линейной функции (d_{nr} – перенормированная координата точки $x_{i-q_{nr}}$). В то же время функция $g_{nr}(z)$ близка к соответствующей дробно-линейной функции $G_{nr}(z)$. Все эти дробно-линейные функции являются строго возрастающими и строго выпуклыми.

Продолжим доказательство теоремы 4.1. Заметим, что для каждой дуги $[\alpha, \beta] \in \xi_{(n+1)r}(\Delta_0^{nr-1})$

$$\mu([\alpha, \beta]) = z(\beta) - z(\alpha),$$

где $z(\alpha)$ и $z(\beta)$ – перенормированные координаты точек α и β .

Выберем r настолько большим, что при этом можно найти три последовательных (по расположению) дуги $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ разбиения $\xi_{(n+1)r}(\Delta_0^{(nr-1)}(f))$ со следующими свойствами:

- 1) дуга $\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3$ примыкает к точке $x_{q_{nr-1}}$;
- 2) дуги $T_f^{q_{nr}}\omega_i$, $i = \overline{1, 3}$, тоже принадлежат разбиению $\xi_{(n+1)r}(\Delta_0^{(nr-1)}(f))$.

Заметим, что при фиксированном r перенормированные длины дуг разбиения $\xi_{(n+1)r}(\Delta_0^{(nr-1)}(f))$ равномерно отделены от нуля, т.е.

$$\frac{|\omega|}{|\Delta_0^{(nr-1)}(f)|} \geq \text{const} > 0 \quad \forall \omega \in \xi_{(n+1)r}(\Delta_0^{(nr-1)}(f)).$$

Используя (4.3), получаем, что

$$\frac{\mu(T_f^{q_{nr}}\omega_i)}{\mu(\omega_i)} = F_{nr}'(\theta_i) + O(\lambda^{nr}), \quad i = \overline{1, 3},$$

где

$$\theta_i \in \frac{1}{|\Delta_0^{(nr-1)}(f)|}\omega_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\frac{\mu(T_f^{q_{nr}}\omega_1)}{\mu(\omega_1)}}{\frac{\mu(T_f^{q_{nr}}\omega_3)}{\mu(\omega_3)}} = \frac{F_{nr}'(\theta_1)}{F_{nr}'(\theta_3)} + O(\lambda^{nr}) = 1 - \frac{F_{nr}''(\theta_2)}{F_{nr}'(\theta_3)}(\theta_3 - \theta_1) + O(\lambda^{nr}),$$

где $\theta_2 \in (\theta_1, \theta_3)$. Учитывая неравенства $\max_{[-1, 0]} F_{nr}''(z) < \chi < 0$ и

$$\theta_3 - \theta_1 \geq \frac{|\omega_2|}{|\Delta_0^{(nr-1)}(f)|},$$

получаем

$$\frac{\frac{\mu(T_f^{q_{nr}}\omega_1)}{\mu(\omega_1)}}{\frac{\mu(T_f^{q_{nr}}\omega_3)}{\mu(\omega_3)}} \geq \text{const} > 1.$$

Используя изометричность T_ρ , находим, что

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{\frac{\mu(T_f^{q_{nr}} \omega_1)}{\mu(\omega_1)}}{\frac{\mu(T_f^{q_{nr}} \omega_2)}{\mu(\omega_2)}} \right) &= \ln \frac{\mu(T_f^{q_{nr}} \omega_1)}{\mu(\varphi(T_f^{q_{nr}} \omega_1))} + \ln \frac{\mu(\omega_3)}{\mu(\varphi(\omega_3))} + \\ &+ \ln \frac{\mu(\varphi(\omega_1))}{\mu(\omega_1)} + \ln \frac{\mu(\varphi(T_f^{q_{nr}} \omega_3))}{\mu(T_f^{q_{nr}} \omega_3)} > \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из равномерной ограниченности вероятностей $\mu(\omega)$, $\omega \in \xi_{(n+1)r}(\Delta_0^{(nr-1)}(f))$, легко следует утверждение теоремы 4.1. Теорема 4.1 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Теорема 1.2 с небольшими изменениями доказывается так же, как и аналогичное утверждение для критических гомеоморфизмов из класса C^3 [11].

Введем удобные с технической точки зрения новые показатели сингулярности. Положим

$$\overline{\gamma}(x) = \frac{1}{\underline{\tau}(\varphi^{-1}(x))}, \quad \underline{\gamma}(x) = \frac{1}{\overline{\tau}(\varphi^{-1}(x))}.$$

Для доказательства первого утверждения теоремы 1.2 достаточно показать, что на множестве “полной” лебеговой меры имеют место неравенства

$$K < \underline{\gamma}(x) \leq \overline{\gamma}(x) < \infty,$$

где $K > 1$ не зависит от x .

ЛЕММА 5.1. *Существует некоторая константа $K_1 > 1$ такая, что на множестве “полной” лебеговой меры выполнено неравенство*

$$K_1 \leq \overline{\gamma}(x).$$

Для доказательства леммы 5.1 потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 5.2 [11]. *Пусть гомеоморфизм h дуги I на J является изоморфизмом разбиений $P(I)$, $P(J)$ и удовлетворяет следующему условию:*

$$\sum_{\omega \in P(I)} \frac{|\ln \mu(h(\omega))|}{|\ln |J||} |\ln \mu(\omega)| \mu(\omega) \leq \text{const } \delta^2(P(I), P(J)). \quad (5.1)$$

Если для некоторой положительной константы K_2 выполняется неравенство

$$\frac{\ln |J|}{\ln |I|} \leq \min \left\{ 2, 1 + \frac{K_2}{H(P(I))} \delta^2(P(I), P(J)) \right\}, \quad (5.2)$$

то существует константа $K_3 > 0$ такая, что

$$\sum_{\omega \in P(I)} \frac{\ln |h(\omega)|}{\ln |\omega|} \mu(\omega) > \frac{\ln |J|}{\ln |I|} \left(1 + K_3 \frac{\delta^2(P(I), P(J))}{\ln |I|} \right). \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Рассмотрим последовательности динамических разбиений $\{\eta_{nr}, n \geq 1\}$ и $\{\xi_{nr}, n \geq 1\}$. Пусть $\Delta^{(nr)}(\rho) \in \eta_{nr}$ и $\Delta^{(nr)}(f) = \varphi^{-1}(\Delta^{(nr)}(\rho)) \in \xi_{nr}$. Рассмотрим лемму 5.2 в применении к разбиениям $\eta_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(\rho))$ и $\xi_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(f))$. Поскольку $\rho(f)$ – иррациональное число типа константы, с помощью леммы 2.3 получаем:

- 1) $\ln \mu(\varphi^{-1}(\omega))$ и $\ln \mu(\omega)$ равномерно ограничены снизу и сверху;
- 2) для всех $n \geq 1$ имеет место неравенство

$$\ln |\Delta^{(nr)}(f)| \leq \text{const} \frac{1}{n}.$$

В соответствии с теоремой 4.1 имеем

$$\delta(\eta_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(\rho)), \xi_{(n+1)r}(\Delta^{(nr)}(f))) \geq \text{const} > 0.$$

Из вышесказанного следует, что существует $n_0 = n_0(f)$ такое, что при $n \geq n_0$ выполняется (5.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Отрезок $\Delta^{(nr)}(\rho)$ разбиения η_{nr} назовем “хорошим”, если он удовлетворяет условию (5.2) леммы 5.2. В противном случае он называется “плохим” и обозначается через I^{nr} .

Используя определение 5.1, предложим схему выбора элементов η_{nr} , $n \geq n_0$. Берем все “хорошие” элементы. Если η_{nr} содержит “плохой” элемент I^{nr} , то переходим к разбиению $\eta_{(n+1)r}(I^{nr})$ и т.д.

Обозначим через M подмножество окружности S^1 , каждая точка которого бесконечно много раз покрывается “плохими” дугами разбиений η_{nr} , $n \geq n_0$. Покажем, что $\lambda(M) = 0$. Заметим сначала, что для каждого n объединение всех “плохих” дуг I^{nr} из η_{nr} покрывает M . Используя лемму 2.3, получаем для всех $m \geq 1$

$$\text{const} \frac{1}{m} \leq \max_{I^{mr} \in \eta_{mr}} \frac{\ln \varphi^{-1}(I^{mr})}{\ln^2 |I^{mr}|} \leq \text{const} \frac{1}{m}. \quad (5.4)$$

Повторно используя лемму 5.2, а также неравенства (5.3) и (5.4), получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{I^{nr} \in \eta_{nr}} \frac{\ln |\varphi^{-1}(I^{nr})|}{\ln |I^{nr}|} |I^{nr}| &> \sum_{I^{n_0 r} \in \eta_{n_0 r}} \frac{\ln |\varphi^{-1}(I^{n_0 r})|}{\ln |I^{n_0 r}|} |I^{n_0 r}| + K_4 \lambda(M) \sum_{m=n_0}^{n-1} \frac{1}{m} - \\ &- \sum_{m=n_0}^n \sum_{\omega_g^{mr} \in \eta_{mr}} \frac{\ln |\varphi^{-1}(\omega_g^{mr})|}{\ln |\omega_g^{mr}|} |\omega_g^{mr}|, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где через ω_g^{mr} обозначена “хорошая” дуга разбиения η_{mr} и $K_4 > 0$ не зависит от n . Легко видеть, что все суммы (5.5), кроме второй в правой части, ограничены сверху. Если $\lambda(M) > 0$, то правая часть (5.5) при $n \rightarrow +\infty$ стремится к $+\infty$, что невозможно. Значит, $\lambda(M) = 0$. Следовательно, лебегова мера всех “хороших” дуг равна 1.

Полученные “хорошие” дуги мы назовем “хорошими” дугами первого поколения. Далее, применяя к каждой “хорошей” дуге первого поколения вышеуказанную процедуру выбора, получаем “хорошие” дуги второго поколения и т.д. В итоге получим систему “хороших” дуг разных поколений. Из конструкции видно, что каждая “хорошая” дуга n -го поколения мельче, чем любой элемент разбиения $\eta_{(n-1)r}$. Возьмем $x \in S^1$ и обозначим через G_x^{nr} “хорошую” дугу из η_{nr} , содержащую точку x . Обозначим через B множество, состоящее из таких точек окружности, которые бесконечно много раз покрываются “хорошими” дугами. Ясно, что $\lambda(B) = 1$. Если $x \in B$, то $x \in G_x^{n_i r}$, $n_1 < n_2 < \dots < n_i < n_{i+1} < \dots$ и

$$\overline{\gamma}(x) \geq \min \left\{ 2, 1 + \frac{K_5}{H(\eta_{(n_i+1)r}(G_x^{n_i r}))} \right\}, \quad (5.6)$$

где $K_5 > 0$ не зависит от n . Учитывая, что энтропия $H(\eta_{(n_i+1)r}(G_x^{n_i r}))$ равномерно ограничена сверху, получим

$$\overline{\gamma}(x) \geq 1 + K_6,$$

где $K_6 > 0$ не зависит от x . Лемма 5.1 доказана.

Так же, как и в работе [11], на основании леммы 5.1 можно показать справедливость неравенства

$$K_7 < \underline{\gamma}(x)$$

на множестве “полной” лебеговой меры, где $K_7 > 1$ не зависит от x . Тем самым первое утверждение теоремы 1.2 доказано. Повторяя доказательство первого утверждения, поменяв ролями T_ρ и T_f , получаем второе утверждение теоремы 1.2. Теорема 1.2 доказана.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую благодарность Я.Г. Синаю, К.М. Ханину и Дж. Грачеку за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *K. M. Khanin, E. B. Vul.* Adv. Sov. Math. 1991. V. 3. P. 57.
- [2] *И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [3] *J. C. Yoccoz.* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Ser. 4. 1984. V. 17. P. 333.
- [4] *K. M. Khanin, Ya. G. Sinai.* Commun. Math. Phys. 1987. V. 112. P. 89.
- [5] *Я. Г. Синай, К. М. Ханин.* УМН. 1989. Т. 44. № 1. С. 57.
- [6] *Y. Katznelson, D. Ornstein.* Ergodic Theory and Dyn. Systems. 1989. V. 9. № 4. P. 643.
- [7] *J. Stark.* Nonlinearity. 1988. V. 1. P. 541.
- [8] *А. А. Джалилов, К. М. Ханин.* Функциональный анализ и его приложения. 1998. Т. 32. № 3. С. 11.
- [9] *A. Chhabra, R. V. Jensen.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 1327.
- [10] *T. S. Halsey, M. N. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, B. I. Shraiman.* Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 1141.
- [11] *J. Graczyk, G. Swiatek.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 157. № 2. P. 213.
- [12] *Я. Г. Синай.* Современные проблемы эргодической теории. М.: Изд. фирма “Физико-математическая литература”, 1995.

Поступила в редакцию 19.II.1999 г.