Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Новиков, Алгебро-геометрические решения уравнения Кричевера–Новикова, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 3, 367–373

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf816>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:15:03

© 1999 г.

Д. П. Новиков*

АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КРИЧЕВЕРА–НОВИКОВА

Получено представление нулевой кривизны уравнения Кричевера–Новикова с постоянными полюсами на эллиптической кривой. Построены алгебро-геометрические решения этого уравнения. При этом существенно использована формула редукции тэта-функции двулистного накрытия эллиптической кривой к тэта-функциям Прима ко-размерности 1.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кричевера–Новикова (КН)

$$\frac{u_t}{u_x} = \frac{1}{4} \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{8} \frac{u_{xx}^2}{u_x^2} + \frac{3}{2} \frac{p(u)}{u_x^2}, \quad p(u) = \frac{1}{4}(4u^3 - g_2u - g_3), \quad (1)$$

появилось впервые при исследовании совместности уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) и условия коммутации пары дифференциальных операторов ранга 2, связанной с эллиптической кривой $\mu^2 = p(\lambda)$ [1–3]. В статье [4] было выяснено, что (1) в частных случаях $p(u) = (u - e_1)^2(u - e_2)$ или $p(u) = u^3$ заменой неизвестной сводится к уравнению Кортевега–де Фриза. В обзорах [2, 5] получено представление нулевой кривизны для уравнения (1) с матрицами из sl_2 . В работах [6, 7] исследована гамильтонова структура уравнения (1) и дан обзор возможных приложений. В [6] использовалось лаксово представление для доказательства наличия законов сохранения у уравнения (1).

В данной работе, исходя из результатов статьи [8], выведено представление нулевой кривизны для уравнения (1) в классе матриц из sl_2 с постоянными полюсами. Построенные по этому представлению алгебро-геометрические (в смысле [5]) решения уравнения (1) дают по формулам из [2] подкласс решений ранга 2 уравнения КП. Существование таких решений было ранее отмечено в [2] (см. также [9]). Эти решения относятся к числу конечнозонных ранга 1 и получаются по формуле редукции тэта-функции [10] соответствующей алгебраической кривой, накрывающей кривую $\mu^2 = p(\lambda)$. Используя эту редукцию, из билинейного представления КП (в смысле Хироты [11]) получено билинейное представление для (1). В конце статьи затронуты вопросы о сходстве представлений нулевой кривизны для уравнения (1) и уравнения Ландау–Лифшица.

* Омский государственный технический университет, Омск, Россия

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ УРАВНЕНИЯ КН С ПОСТОЯННЫМИ ПОЛЮСАМИ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Конечнозонные решения ранга 2 и рода 1 уравнения КП [2]

$$\frac{3}{4}\mathcal{U}_y + \mathcal{W}_x = 0, \quad \mathcal{W}_y + \mathcal{U}_t - \frac{1}{4}\mathcal{U}_{xxx} + \frac{3}{2}\mathcal{U}\mathcal{U}_x = 0$$

определяются из условия совместности системы Захарова–Шабата

$$\begin{aligned} \psi_t &= \psi_{xxx} - \frac{3}{2}\mathcal{U}\psi_x + \left(-\frac{3}{4}\mathcal{U}_x + \mathcal{W}\right)\psi, \\ \psi_y &= \psi_{xx} - \mathcal{U}\psi \end{aligned} \quad (2)$$

и еще двух уравнений:

$$L_4\psi = \lambda\psi, \quad L_6\psi = \mu\psi, \quad (3)$$

где $L_4 = (D^2 - \mathcal{U})^2 + a_1D + Da_1 + a_0$, $L_6 = D^6 + \dots$ — дифференциальные по x операторы, $D = \partial/\partial x$.

Из уравнений (2), (3) следует [2], что

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= -2(A + [\ln(u - \alpha)]_{xx}), & \mathcal{W} &= \frac{3}{2}[\ln(u - \alpha)]_{xy}, \\ A &= -\frac{1}{4}\frac{u_{xxx}}{u_x} + \frac{1}{8}\frac{u_{xx}^2}{u_x^2} - \frac{1}{2}\frac{p(u)}{u_x^2}, & a_1 &= [\ln(u - \alpha)]_{xy}, \\ a_0 &= -2u + \frac{2p'(u)}{u - \alpha} - \frac{4p(u)}{(u - \alpha)^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha \equiv \wp(y - y_0)$.

Здесь $u = u(x, t)$ — решение уравнения (1), $\wp(z)$ — функция Вейерштрасса, $\wp_z^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4p(\wp)$.

Условие коммутации пары ранга 2 $[L_4, L_6] = 0$ означает [12], что линейное пространство решений ψ системы (3) двумерно. При этом коэффициенты операторов выражаются через производные функции $u(x)$, но (3) не налагает на $u(x)$ никаких ограничений, а λ, μ связаны соотношением

$$\mu^2 = p(\lambda) = (\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3), \quad (5)$$

задающим эллиптическую кривую Γ_0 .

В работе [8], использующей результаты работ [2, 13], показано, что (3) сводится к уравнению на ψ

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + \left(\frac{u_x}{u - \alpha} - \frac{u_x}{u - \beta}\right)\psi_x + \left(2A + \frac{3}{2}\frac{u_{xx}}{u - \alpha} + \frac{1}{2}\frac{u_{xx}}{u - \beta} - \right. \\ \left. - \frac{u_x^2}{u - \alpha}\left(\frac{1}{u - \alpha} + \frac{1}{u - \beta}\right) - \frac{1}{2}\frac{\alpha_y}{u - \alpha} + \frac{1}{2}\frac{\beta_y}{u - \beta} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_y + \beta_y}{\alpha - \beta}\right)\psi = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$\beta = \wp(y - y_0 + \rho)$, $\lambda = \wp(\rho)$. Более подробно алгоритм получения (6) описан в [12, §3]. Используя (6), получаем из (2) явную зависимость ψ от y :

$$\psi = u_x^{1/2}(u - \alpha)^{-1} \exp\left\{\int \frac{1}{2}\frac{\alpha_y + \beta_y}{\alpha - \beta} dy\right\} \left(\Psi_1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha_y + \beta_y}{\alpha - \beta}\Psi\right),$$

где Ψ, Ψ_1 — функции от x, t, λ . С помощью этих функций система (2), (6) записывается

в виде

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi_1 \end{pmatrix}_x = U \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi_1 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{u_x} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & -U_{11} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi_1 \end{pmatrix}_t = V \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi_1 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{u_x} \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & -V_{11} \end{pmatrix} + AU, \quad (8)$$

где A – функция из (4), U_{ij} , V_{ij} задаются формулами

$$\begin{aligned} U_{11} &= \mu, & U_{12} &= \lambda - u, & U_{21} &= -\lambda^2 - u\lambda - u^2 + \frac{g_2}{4}, & V_{12} &= \mu - \frac{1}{2}u_{xx}, \\ V_{11} &= \lambda^2 + u\lambda - \frac{u^2}{2} - \frac{g_2}{8}, & V_{21} &= -\left(\mu + \frac{1}{2}u_{xx}\right)(\lambda + 2u) + u_x^2. \end{aligned}$$

Матрицы U и V определяют представление для (1) в виде уравнения нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (9)$$

в классе матриц из алгебры Ли sl_2 . При этом U имеет один полюс 4-го порядка, V – один полюс 5-го порядка в точке $\lambda = \infty$.

Отметим также соотношения, получаемые из представления Лакса для уравнения КН [6],

$$((D^2 + 2A)^2 - 2u)\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi_t = \left(D^3 + 3AD + \frac{3}{2}A_x\right)\varphi, \quad \varphi = u_x^{1/2}\Psi.$$

Например, (1) можно считать редукцией (A определено в (4)) системы

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}u_{xxx} + 3u_x A &= 0, \\ A_t - \frac{1}{4}A_{xxx} - 3AA_x + \frac{3}{2}u_x &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Пара Лакса для уравнения КН получается из уравнения $L_4\psi = \lambda\psi$ и первого уравнения (2) в пределе $\alpha \rightarrow \infty$.

3. РЕДУКЦИЯ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КП РАНГА 1 И УРАВНЕНИЕ КН

Класс алгебро-геометрических решений U , V уравнения (9) выделяется требованием [5] существования рациональной по (λ, μ) на кривой (5) матрицы $W(x, t, \lambda, \mu)$ такой, что тождественно по (λ, μ) выполняются соотношения

$$W_x = [U, W], \quad W_t = [V, W]. \quad (11)$$

В случае постоянных полюсов матриц U , V можно считать матрицу W полиномом по (λ, μ) . Тогда схема построения алгебро-геометрических решений (U, V, W) системы (9), (11), изложенная в [5], дает для уравнения кривой Γ в случае матриц (7), (8)

$$\begin{aligned} 4\mu^2 &= 4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3, \\ \nu^2 = -\det W &= \sum_{k=0}^n I_k \lambda^k + \mu \sum_{k=0}^n \mathcal{J}_k \lambda^k, \quad n \geq 0, \quad \mathcal{J}_n = 1, \end{aligned} \quad (12)$$

где n определяется из разложения W в окрестности $\lambda = \infty$:

$$W = \frac{1}{u_x} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^{(n+5)/2} + O(\lambda^{(n+4)/2}). \quad (12')$$

В случае общего положения кривая Γ имеет род $g = n + 3$, накрытие $\Gamma \rightarrow \Gamma_0$ двулистно и разветвлено в $2n + 4$ точках кривой (5).

Та же самая кривая (12) получается и по схеме Берчналла–Чонди–Кричевера [14, § 5.51; 15], примененной к паре коммутирующих операторов (L_4, L_{2n+3}) , где L_4 – оператор (3), (4), а оператор $L_{2n+3} = D^{2n+3} + \dots$ вычисляется из условия $[L_4, L_{2n+3}] = 0$. Система уравнений (2), $L_4\psi = \lambda\psi$, $L_{2n+3}\psi = \nu\psi$, после интегрирования по этой схеме дает конечнозонные решения ранга 1 для уравнения КП, а функция Бейкера–Ахиезера ψ даст решение уравнения $L_6\psi = \mu\psi$ (вследствие того что λ, μ, ν – рациональные функции на Γ , см. [16, с. 45, 46]).

Покажем, как из известной формулы для решений ранга 1 уравнения КП

$$\mathcal{U}(x, y, t) = -2(\ln F)_{xx}, \quad F = \theta(v_1x + v_2y + v_3t + z_0) \quad (13)$$

(вектор z_0 произволен, формулы для v_k приведены в [15]) получаются в силу связей (4) все алгебро-геометрические решения уравнения КН. Выбирая на кривой Γ базис циклов способом, указанным в [10, с. 20], построим отображение Абеля $\mathcal{A}: \Gamma^g \rightarrow J(\Gamma)$ и поставим задачу обращения Якоби $\mathcal{A}(P) - \mathcal{A}(P_0) = v_1x + v_2y + v_3t + z_0$, где P_0 – канонический дивизор. Из леммы 3.1.2 работы [16] следует, что $\mathcal{U}$ в (13) – симметрическая функция P . Используя теорему 3.3 из [10], получим для функции F представление

$$\begin{aligned} F &= f(x, t)\theta_3\left(\frac{y - y_0}{\omega} \middle| 2\tau\right) + g(x, t)\theta_2\left(\frac{y - y_0}{\omega} \middle| 2\tau\right), \\ f &= \theta(v'_1x + v'_3t + z'_0|2\Pi), \\ g &= \theta\left[\frac{1}{2} \middle| 0; 0\right](v'_1x + v'_3t + z'_0|2\Pi), \end{aligned} \quad (14)$$

где θ_2, θ_3 – тэта-функции Якоби, τ, ω – периоды эллиптической кривой (5) (см. [17, гл. 13]); векторы $v'_k \in \mathbb{C}^{n+2}$ вычисляются в обозначениях той же теоремы при $(z_1|z_2|z_3) = v_1x + v_2y + v_3t + z_0$, матрица Прима Π вычисляется по формуле (3.10) там же; y_0, z'_0 произвольны.

Подставляя в первое равенство (4) функцию (13), (14) и переходя к пределу при $y \rightarrow y_0$, найдем

$$A = [\ln(f\hat{\theta}_3 + g\hat{\theta}_2)]_{xx}, \quad (15)$$

где $\hat{\theta}_i = \theta_i(0|2\tau)$. Подстановка полученного выражения для A и функции (13), (14) в то же равенство приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. *Алгебро-геометрические решения уравнения (1) даются формулой*

$$u(x, t) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{6}(\hat{\theta}_2^4 + \hat{\theta}_3^4) + \frac{1}{4}(\hat{\theta}_2^4 - \hat{\theta}_3^4) \frac{f\hat{\theta}_3 - g\hat{\theta}_2}{f\hat{\theta}_3 + g\hat{\theta}_2} \right], \quad (16)$$

где f, g – функции (14).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что интегрирование системы (9), (11) с матрицами (7), (8), (12') может быть выполнено по схеме из статьи [18], сводящей (9), (11) к системе уравнений на функцию $w = w_{12}u_{12}^{-1}$, где u_{12}, w_{12} – элементы матриц U, W . Выполняя калибровочное преобразование с матрицей

$$h(x, t, \lambda) = u_{12}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_{11} - \frac{1}{2}r & u_{12} \end{pmatrix}, \quad r = \frac{u_{12x}}{u_{12}},$$

получим систему

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ww_{xx} - \frac{1}{4}w_x^2 - \left(\frac{\mu}{\lambda - u} - 2A + \frac{u_{xx}}{\lambda - u} + \frac{3}{4} \frac{u_x^2}{(\lambda - u)^2} \right) w^2 + \nu^2 &= 0, \\ w_t &= \left(\frac{\mu - \frac{1}{2}u_{xx}}{\lambda - u} + A \right) w_x - \left(\frac{\mu - \frac{1}{2}u_{xx}}{\lambda - u} + A \right)_x w, \end{aligned}$$

здесь $(\lambda, \mu, \nu) \in \Gamma$. Интегрирование этой системы сводится к задаче обращения Абеля–Якоби для нулей w на кривой (5). Такой подход наиболее конструктивен при построении стационарных решений уравнения (1).

4. БИЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КН

ТЕОРЕМА 2.

1. *Функции f, g в (14) удовлетворяют системе билинейных (в смысле Хироты [11]) уравнений*

$$\begin{aligned} (-4D_x D_t + D_x^4 + a') f \cdot f &= 2bg^2, \\ (-4D_x D_t + D_x^4 + a') g \cdot g &= 2bf^2, \\ (-4D_x D_t + D_x^4 + a') f \cdot g &= cfg, \\ (2D_t + D_x^3) f \cdot g &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

где $a' = \text{const}$,

$$b = 3 \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 \widehat{\theta}_2^2 \widehat{\theta}_3^2 = 3(e_2 - e_3), \quad c = 3 \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 (\widehat{\theta}_2^4 + \widehat{\theta}_3^4) = 18e_1.$$

2. *Если f, g удовлетворяют системе (17), то функция (16) – решение уравнения (1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Подставляя функции (14) в уравнение КП, записанное в форме Хироты

$$(3D_y^2 - 4D_x D_t + D_x^4 + a) F \cdot F = 0, \quad a = \text{const},$$

после вычислений с эллиптическими тэта-функциями по формулам из [17] получаем первые три соотношения (17); подстановка (15), (16) в первое уравнение (10) дает четвертое соотношение (17).

2. Переходя в (17) от пары (f, g) к паре $(f, z = g/f)$ и исключая из полученных равенств f , получим уравнение для z

$$\frac{z_t}{z_x} = \frac{1}{4} \frac{z_{xxx}}{z_x} - \frac{3}{8} \frac{z_{xx}^2}{z_x^2} + \frac{bz^4 - cz^2 + b}{8z_x^2}, \tag{18}$$

которое дробно-линейным преобразованием (16) над z связано с (1). Теорема 2 доказана.

Представление (17) может быть использовано с целью эффективизации параметров v'_k в формулах (14), (16) для алгебро-геометрических решений уравнения КН.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $e_2 = e_3$ в (5) имеем $b = 0$ и первые два уравнения (17) дают билинейное представление уравнения Кортевега–де Фриза.

5. ДРУГОЕ КОММУТАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КН

Известно [5, с. 223], что уравнение нулевой кривизны (9) с матрицами

$$\begin{aligned}\widehat{U} &= w_1 S_1 \sigma_1 + w_2 S_2 \sigma_2 + w_3 S_3 \sigma_3, \\ \widehat{V} &= w_1 v_1 \sigma_1 + w_2 v_2 \sigma_2 + w_3 v_3 \sigma_3 + w_2 w_3 S_1 \sigma_1 + w_3 w_1 S_2 \sigma_2 + w_1 w_2 S_3 \sigma_3,\end{aligned}\quad (19)$$

где σ_i – матрицы Паули, $w_i = \sqrt{\lambda - e_i}$ (λ – спектральный параметр; $S_i(x, t)$, $v_i(x, t)$ вычисляются из (9)), в случае $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ дает коммутационное представление уравнения Ландау–Лифшица. Пусть теперь в (19)

$$S_1 = \frac{z}{z_x}, \quad S_2 = i \frac{z^2 + 1}{2z_x}, \quad S_3 = \frac{z^2 - 1}{2z_x}. \quad (20)$$

Подставляя полученные выражения для $\widehat{U}$, $\widehat{V}$ в (9), после вычислений получим уравнение (18). Таким образом, пара матриц (19) в случае (20) дает (с точностью до дробно-линейного преобразования (16)) коммутационное представление уравнения (1). Отметим, что в этом случае $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 0$. Подробные вычисления показывают, что матрицы (7), (8) и (19), (20) связаны преобразованием подобия

$$(U, V) = G(\widehat{U}, \widehat{V})G^{-1}, \quad G = G(\lambda). \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим преобразование (21) матрицы $\widehat{U}$, не делая специальных предположений о функциях $S_i(x, t)$. Вычисления дают

$$U = G\widehat{U}G^{-1} = \frac{1}{\Delta^{1/4}} \begin{pmatrix} -\mu T & -\lambda T + H \\ \lambda^2 T + \lambda H + K & \mu T \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2, \quad \begin{pmatrix} T \\ H \\ -\frac{K}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{e_2 - e_3} S_1 \\ \sqrt{e_3 - e_1} S_2 \\ \sqrt{e_1 - e_2} S_3 \end{pmatrix}, \quad \mu = w_1 w_2 w_3.$$

Известно [19], что в иерархию матрицы $\widehat{U}$ в (19) входит, помимо уравнения Ландау–Лифшица, система уравнений анизотропного кирального $O(3)$ -поля. Выполняя калибровку (21) и подставляя (22) в (9), нетрудно получить, что соответствующая матрица V в случае уравнения Ландау–Лифшица имеет разложение $V = \lambda \mu M_1 + \lambda^2 M_2 + \mu M_3 + \lambda M_4 + M_5$, а в случае кирального поля – разложение

$$V = \mu M_1 + \lambda M_2 + \frac{\mu - \sqrt{p(\alpha)}}{\lambda - \alpha} M_3 + M_4,$$

где α – любая постоянная.

Известно, что при $w_1 = w_2 = w_3$ в (19) иерархия Ландау–Лифшица заменой неизвестных сводится к иерархии нелинейного уравнения Шредингера, которая согласно работе [20] входит в иерархию уравнения КП. Вполне возможно, что уравнение Ландау–Лифшица относится к иерархии КП в любом случае.

В работе [21] были выписаны билинейные уравнения иерархии Ландау–Лифшица для второго и третьего времен. Уравнения по времени t_3 аналогичны системе (17); это свойство уравнения КН говорит о том, что оно является редукцией указанных уравнений. Можно также заключить, что система (17) допускает многосолитонные решения.

Благодарности. Автор выражает благодарность проф. И. А. Тайманову, Р. К. Романовскому за обсуждение содержания статьи.

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 1. С. 33–37.
- [2] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 47–68.
- [3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [4] С. И. Свинолунов, В. В. Соколов, Р. И. Ямилов. ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 802–805.
- [5] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Интегрируемые системы. I. В сб.: Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. Динамические системы-4. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179–284.
- [6] В. В. Соколов. ДАН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 48–50.
- [7] О. И. Мохов. Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 3. С. 87–96.
- [8] G. Latham, E. Previato. Acta Appl. Math. 1995. V. 39. P. 405–433.
- [9] С. П. Новиков, П. Г. Гриневич. Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 1. С. 25–26.
- [10] Е. Д. Белокопос, А. И. Бобенко, В. Б. Матвеев, В. З. Энольский. УМН. 1986. Т. 41. № 2. С. 3–42.
- [11] Р. Хирота. Прямые методы в теории солитонов. В сб.: Солитоны. Ред. Р. Булаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
- [12] И. М. Кричевер. Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 3. С. 20–31.
- [13] П. Г. Гриневич. Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 1. С. 19–24.
- [14] Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИ Украины, 1939.
- [15] И. М. Кричевер. Функц. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. № 3. С. 15–31.
- [16] Б. А. Дубровин. УМН. 1981. Т. 36. № 2. С. 11–80.
- [17] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе. М.: Наука, 1967.
- [18] Д. П. Новиков, Р. К. Романовский. ТМФ. 1997. Т. 110. № 1. С. 61–72.
- [19] И. В. Чередник. ЯФ. 1981. Т. 33. № 1. С. 278–281.
- [20] И. М. Кричевер. Функц. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 2. С. 1–8.
- [21] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa. J. Phys. A: Math. Gen. 1983. V. 16. P. 221–236.

Поступила в редакцию 11.XII.1998 г.,
после доработки 22.IV.1999 г.