Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Обломков, Безмонодромные операторы Шредингера с квадратично растущим потенциалом, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 3, 374–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:08:24

© 1999 г.

А. А. Обломков*

БЕЗМОНОДРОМНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА С КВАДРАТИЧНО РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Рассматриваются безмонодромные одномерные операторы Шредингера с рациональным квадратично растущим потенциалом. Показано, что все они могут быть получены из оператора $-\partial^2 + x^2$ конечным числом рациональных преобразований Дарбу. Получено явное выражение для соответствующих потенциалов в терминах полиномов Эрмита.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одномерный оператор Шредингера $L = -\partial^2 + U(x)$ с рациональным потенциалом $U(x)$ будем называть *безмонодромным*, если любое решение уравнения

$$L\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

является функцией, однозначной по x в $\mathbb{C}$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$.

Несмотря на естественность постановки задача описания таких операторов до сих пор не исследовалась и была решена лишь в случае убывающих потенциалов. Впервые, по-видимому, это было сделано Дюйстермаатом и Грюнбаумом [1] в связи с классификацией биспектральных операторов Шредингера.

ТЕОРЕМА [1]. *Любой оператор Шредингера с рациональным убывающим на бесконечности потенциалом, имеющий регулярные особые точки в $\mathbb{C}$, может быть получен из оператора $L_0 = -\partial^2$ конечным числом рациональных преобразований Дарбу.*

Чалых [2] было получено обобщение результата Дюйстермаата и Грюнбаума на многомерный случай (см. также [3]). Идеи работы [2] были использованы Веселовым и Гончаренко [4] для доказательства соответствующего результата в матричном случае.

В настоящей работе рассмотрен случай, когда рациональный потенциал не убывает, а имеет *квадратичный рост* на бесконечности, т. е.

$$U(x) = x^2 + R(x), \tag{1}$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: oblomkov@mccme.ru

где $R(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. В этом случае проблема описания всех безмонодромных операторов Шредингера также может быть решена явно. А именно, доказана основная теорема 3 (см. раздел 4), впервые высказанная в качестве гипотезы Веселовым:

Всякий безмонодромный оператор Шредингера L с рациональным квадратично растущим потенциалом и регулярными особыми точками в $\mathbb{C}$ имеет вид

$$L = -\partial^2 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(H_{n_1}(x), \dots, H_{n_k}(x)) + x^2,$$

где $n_1 < \dots < n_k$ – некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, $H_k(x)$ – k -й полином Эрмита, а $W(f_1, \dots, f_m)$ – вронскиан функций $f_1, \dots, f_m$. При этом различным последовательностям $n_1 < \dots < n_k$ отвечают различные безмонодромные операторы.

Иными словами, все безмонодромные операторы Шредингера с рациональным квадратично растущим потенциалом могут быть получены из гармонического осциллятора $-\partial^2 + x^2$ рациональными преобразованиями Дарбу на уровнях $\lambda = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ И СПЛЕТАЮЩИЙ ОПЕРАТОР

Пусть $L = -\partial^2 + U(x)$ – оператор Шредингера. Представим L в виде $L = D^*D + \lambda$, где D – некоторый дифференциальный оператор первого порядка, знак $*$ означает формальное сопряжение, а λ – некоторая константа. Более подробно:

$$D = -\partial + f(x), \quad D^* = \partial + f(x), \quad (2)$$

$$L - \lambda = (\partial + f)(-\partial + f) = -\partial^2 + f^2 + f', \quad (3)$$

т.е. $U - \lambda = f^2 + f'$. Если $f = \varphi'/\varphi$, то $D\varphi = 0$, следовательно, $L\varphi = \lambda\varphi$. Теперь построим оператор $L_1 = DD^* = (-\partial + f)(\partial + f)$, $L - L_1 = 2f' + \lambda = 2(\ln \varphi)'' + \lambda$. В этом случае говорят, что оператор L_1 получен из L преобразованием Дарбу на уровне λ , отвечающим собственной функции φ (см. [5]).

Нетрудно видеть, что $D(L - \lambda) = DD^*D = L_1D$, т.е. оператор D является сплетающим. Он переводит собственные функции оператора L в собственные функции оператора L_1 : если $L\psi = \mu\psi$, то $L_1D\psi = (\mu - \lambda)D\psi$. Отметим, что на уровне $\mu = \lambda$ оператор D является вырожденным: $D(\varphi) = 0$. В этом случае ядро оператора L_1 порождается функциями $D(\ker(L - \lambda))$ и $1/\varphi$. Преобразования Дарбу можно итерировать, получая при этом операторы L_k и соответствующие сплетающие операторы D_k порядка k , $D_k(L - c_k) = L_kD_k$. Явное выражение для оператора D_k и потенциала $U_k(x)$ оператора L_k может быть записано через вронскианы [6, 7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [6, 7]. *Если при k -м преобразовании Дарбу для факторизации оператора L_k используется его собственная функция вида $D_k\varphi_k$, где φ_k – собственная функция L с собственным значением λ_k , то в результате n преобразований Дарбу имеем*

$$D_n \left(L - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) = L_n D_n,$$

где сплетающий оператор D_n действует как

$$D_n g = \frac{W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, g)}{W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)},$$

потенциал U_n оператора L_n имеет вид

$$U_n = U - 2(\ln W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n))'' - \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Для операторов с рациональным потенциалом можно доказать следующее утверждение, уточняющее связь преобразования Дарбу с существованием сплетающего оператора.

ТЕОРЕМА 1. *Для операторов Шредингера L_1, L_2 с рациональными потенциалами следующие два утверждения эквивалентны:*

1. *Существует последовательность рациональных преобразований Дарбу, которая переводит оператор L_1 в оператор L_2 (под рациональным преобразованием Дарбу мы понимаем преобразование (2), (3) с рациональным f).*

2. *Существуют дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ с рациональными коэффициентами и константа c такие, что*

$$(L_2 - c)\mathcal{L} = \mathcal{L}L_1. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе утверждение следует из первого по определению преобразования Дарбу.

Доказательство обратного утверждения проведем индукцией по порядку дифференциального оператора $\mathcal{L}$. Обозначим этот порядок $\text{ord } \mathcal{L}$.

Если $\text{ord } \mathcal{L} = 0$, то утверждение очевидно.

Без ограничения общности можно предполагать, что оператор $\mathcal{L}$ нельзя представить в виде $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}(L_1 - \lambda)$ для некоторого оператора $\tilde{\mathcal{L}}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Действительно, в противном случае мы бы имели $(L_2 - c)\tilde{\mathcal{L}}(L_1 - \lambda) - \tilde{\mathcal{L}}(L_1 - \lambda)L_1 = ((L_2 - c)\tilde{\mathcal{L}} - \tilde{\mathcal{L}}L_1)(L_1 - \lambda) = 0$, т.е. оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ являлся бы сплетающим для операторов $L_2 - c$ и L_1 . При этом он имел бы меньший порядок и рациональные коэффициенты: если

$$\tilde{\mathcal{L}} = \sum_{i=0}^m \tilde{q}_i \partial^i, \quad \mathcal{L} = \sum_{i=0}^{m+2} q_i \partial^i, \quad L_1 = -\partial^2 + U_1,$$

то из формулы $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}(L_1 - \lambda)$ следует $q_i = -\tilde{q}_{i-2} + \tilde{q}_i(U_1 - \lambda)$, откуда видно, что $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1$ рациональны, а далее по индукции получаем, что все $\tilde{q}_i$ рациональны.

Из формулы (4) следует, что если $\mathcal{L}v = 0$, то $\mathcal{L}L_1v = (L_2 - c)\mathcal{L}v = 0$, т.е. $L_1(\ker \mathcal{L}) \subset \ker \mathcal{L}$, следовательно, в конечномерном пространстве $\ker \mathcal{L}$ содержится хотя бы одна собственная функция оператора L_1 . Пусть Φ_λ — одна из них: $L_1\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda$. Пользуясь тем, что $\Phi_\lambda'' = (-\lambda + U_1)\Phi_\lambda$, можно представить $\mathcal{L}\Phi_\lambda$ в виде $\mathcal{L}\Phi_\lambda(x) = R_1(\lambda, x)\Phi_\lambda(x) +$

$R_2(\lambda, x)(\Phi_\lambda(x))'$, функции $R_i(\lambda, x)$ полиномиальны по λ и рациональны по x . Если $R_2(\lambda, x) \equiv 0$, то, поскольку $\Phi_\lambda \in \ker \mathcal{L}$ и, следовательно, $R_1(\lambda, x) \equiv 0$, имеем $\ker(L_1 - \lambda) \subset \ker \mathcal{L}$. Нетрудно показать (см. [8]), что последнее включение влечет факторизацию $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}(L_1 - \lambda)$, что противоречит нашим предположениям относительно $\mathcal{L}$. Таким образом, выполняется $(\ln \Phi_\lambda(x))' = -R_1(\lambda, x)(R_2(\lambda, x))^{-1}$, т.е. $(\ln \Phi_\lambda(x))'$ рациональна по x . Сделаем с помощью функции Φ_λ преобразование Дарбу оператора L_1 , т.е. $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}D$, где $D = \partial - (\ln \Phi_\lambda)'$, тогда

$$(L_2 - c)\mathcal{L} - \mathcal{L}L_1 = (L_2 - c)\tilde{\mathcal{L}}D - \tilde{\mathcal{L}}DL_1 = ((L_2 - c)\tilde{\mathcal{L}} - \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{L}_1 - c'))D = 0.$$

Таким образом, $(L_2 - \tilde{c})\tilde{\mathcal{L}} - \tilde{\mathcal{L}}\tilde{L}_1 = 0$, причем $\text{ord } \tilde{\mathcal{L}} < \text{ord } \mathcal{L}$. Это дает нам шаг индукции. Теорема доказана.

3. БЕЗМОНОДРОМНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШРЕДИНГЕРА С КВАДРАТИЧНЫМ РОСТОМ

Напомним, что особая точка $x_0 \in \mathbb{C}$ уравнения Шредингера

$$-\psi'' + U\psi = \lambda\psi \quad (5)$$

называется *регулярной*, если любое его решение имеет не более чем степенной рост в окрестности точки x_0 . Для рациональных потенциалов U это означает, что соответствующий полюс имеет порядок не выше второго (см., например, [8]). Мы будем рассматривать уравнения только с регулярными особенностями.

Предположим теперь, что оператор L является безмонодромным, т.е. все решения уравнения (5) однозначны в $\mathbb{C}$. Простой локальный анализ в окрестности полюса $x = x_i$ потенциала $U(x)$ показывает (см., например, [1]), что $U(x)$ имеет вид $U(x) = m_i(m_i + 1)/(x - x_i)^2 + r(x)$, где $r(x)$ — регулярная в некоторой окрестности x_i функция, $m_i \in \mathbb{N}$. Таким образом, рациональный квадратично растущий потенциал безмонодромного оператора имеет вид

$$U(x) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i(m_i + 1)}{(x - x_i)^2} + P(x),$$

где $m_i \in \mathbb{N}$, а $P(x)$ — квадратный многочлен от x . Числа m_i мы будем называть *кратностями* точек x_i . Для того чтобы потенциал имел квадратичный рост (1), сделаем подходящую линейную замену координат и сдвиг.

Основное содержание данного раздела — доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого безмонодромного оператора Шредингера L с рациональным потенциалом, растущим на бесконечности как x^2 (т.е. вида (1)), существует ненулевой дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ с рациональными коэффициентами такой, что*

$$L\mathcal{L} = \mathcal{L}(-\partial^2 + x^2 + c),$$

где s – некоторое четное целое число.

Доказательству теоремы предположим два вспомогательных утверждения.

Для набора точек $x_i \in \mathbb{C}$ и кратностей $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, N$, обозначим через $Q_{x_1, \dots, x_N}^{m_1, \dots, m_N}$ пространство мероморфных функций f , удовлетворяющих следующим условиям:

- а) $f(x) \prod_{i=1}^N (x - x_i)^{m_i}$ – целая функция,
- б) $(f(x)(x - x_i)^{m_i})^{(2k-1)}|_{x=x_i} = 0$, $k = 1, \dots, m_i$.

В работе [1] были найдены локальные условия безмонодромности для оператора Шредингера. Комбинируя их с ключевым наблюдением работы [2], получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если L – безмонодромный оператор Шредингера с регулярными особыми точками $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{C}$ с кратностями $m_1, \dots, m_N$, соответственно, то $LQ_{x_1, \dots, x_N}^{m_1, \dots, m_N} \subset Q_{x_1, \dots, x_N}^{m_1, \dots, m_N}$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $R(x) = P_1(x)/P_2(x)$ – рациональная функция, а P_1, P_2 – полиномы, тогда степень функции $R(x)$ будем называть $\deg R = \deg P_1 - \deg P_2$. Пространство функций вида $R(x)e^{-x^2/2}$ будем обозначать через E^- , пространство функций вида $R(x)e^{x^2/2}$ – через E^+ , а степень таких функций будем называть степень $R(x)$. Пусть $L_0 = -\partial^2 + x^2$, а собственные функции оператора L_0 , имеющие рациональные логарифмические производные, будем обозначать Φ_λ , $L_0\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda$, $\lambda \in 2\mathbb{Z} + 1$. При $\lambda = 2n + 1$, $n \geq 0$, $\Phi_\lambda(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$, H_n – n -й полином Эрмита, $\Phi_\lambda(x) = \Phi_{-\lambda}(ix)$ при $\lambda < 0$. Отметим (нам это понадобится впоследствии), что любая функция $f \in Q_{x_1, \dots, x_N}^{m_1, \dots, m_N}$ имеет степень не меньше $-\sum_{i=1}^N m_i$.

ЛЕММА 1. Если $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор порядка k с рациональными коэффициентами, то для функций $\mathcal{L}\Phi_\lambda$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}\Phi_\lambda(x) = R_1(\lambda, x)\Phi_\lambda(x) + R_2(\lambda, x)(\Phi_\lambda(x))',$$

где $R_i(\lambda, x)$, $i = 1, 2$, – функции, рациональные по x и полиномиальные по λ , причем

$$\deg_\lambda R_i(\lambda, x) \leq \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor,$$

где $\deg_\lambda$ обозначает степень по λ .

Здесь и ниже $[\cdot]$ – целая часть числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. К указанному виду функции $\mathcal{L}\Phi_\lambda$ можно привести с помощью формулы

$$\Phi_\lambda^{(k)} = (x^2 - \lambda)\Phi_\lambda^{(k-2)} + 2(k-2)x\Phi_\lambda^{(k-3)} + (k-2)(k-3)\Phi_\lambda^{(k-4)}, \quad (6)$$

которая получена $(k-2)$ -кратным дифференцированием уравнения $\Phi_\lambda'' = (x^2 - \lambda)\Phi_\lambda$. Очевидно, что $R_i(\lambda, x)$ будут полиномами по λ и рациональными функциями по x . Их степень по λ легко оценить, пользуясь формулой (6). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Построим семейство дифференциальных операторов $\mathcal{L}_k(x, \partial)$ ($k = 0, 1, \dots$) такое, что:

- 1) порядок $\mathcal{L}_k$ не превосходит k ;
- 2) коэффициенты $\mathcal{L}_k$ – рациональные функции;
- 3) $\deg \mathcal{L}_k \Phi_\lambda \leq \deg \Phi_\lambda + \sum_{i=1}^N m_i - k$ при $\lambda \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$;
- 4) $\mathcal{L}_k \Phi_\lambda \in Q_{x_1, \dots, x_N}^{m_1, \dots, m_N} \cap E^-$ при $\lambda \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$.

Будем строить операторы $\mathcal{L}_k$ по индукции.

Для $k = 0$

$$\mathcal{L}_0 = \prod_{i=1}^N (x - x_i)^{m_i}.$$

Пусть мы уже построили $\mathcal{L}_{k-1}$ с требуемыми свойствами, тогда будем искать $\mathcal{L}_k$ в виде $\mathcal{L}_k = L\mathcal{L}_{k-1} - \mathcal{L}_{k-1}(L_0 - c_k)$. Условия 1, 2, очевидно, выполнены.

Заметим, что $\mathcal{L}_k \Phi_\lambda(x) = (L - (\lambda + c_k))\mathcal{L}_{k-1} \Phi_\lambda(x)$, следовательно, выполнение условия 4 следует из предложения 2. При $\lambda \in 2\mathbb{Z}_+ + 1$

$$\mathcal{L}_{k-1} \Phi_\lambda(x) = R_k^\lambda(x) e^{-x^2/2},$$

где $R_k^\lambda(x)$ – рациональная функция от x . Простое индуктивное рассуждение показывает, что условие 3 выполнено, если положить $c_k = 2(\sum_{i=1}^N m_i - k + 1)$. Заметим, что $c_k \in 2\mathbb{Z}$.

Так как $\Phi_\lambda(x) = H_{\frac{\lambda-1}{2}}(x) e^{-x^2/2}$, то из леммы 1 следует, что

$$\mathcal{L}_k \Phi_\lambda(x) = \tilde{R}_1^k(\lambda, x) H_{\frac{\lambda-1}{2}}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \tilde{R}_2^k(\lambda, x) (H_{\frac{\lambda-1}{2}}(x))' e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $\tilde{R}_i^k(\lambda, x)$ – рациональные по x и полиномиальные по λ функции степени не выше $[\frac{k+1}{2}]$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1^{k+1}(\lambda, x) &= -(\tilde{R}_1^k(\lambda, x))'' + 2x(\tilde{R}_1^k(\lambda, x))' + (U(x) - c_{k+1})\tilde{R}_1^k(\lambda, x) + \\ &\quad + 2(\lambda - 1)(\tilde{R}_2^k(\lambda, x))', \\ \tilde{R}_2^{k+1}(\lambda, x) &= -2(\tilde{R}_1^k(\lambda, x))' - (\tilde{R}_1^k(\lambda, x))'' + (U(x) - c_{k+1} - 2)\tilde{R}_2^k(\lambda, x). \end{aligned}$$

Из этих формул следует оценка $\deg \tilde{R}_i^k(\lambda, x) \leq \sum_{i=1}^N m_i$ (доказывается индукцией по k).

Заметим, что если $\lambda > 0$ и k таковы, что

$$2 \sum_{i=1}^N m_i < \frac{\lambda - 1}{2} < k - 2 \sum_{i=1}^N m_i,$$

то $\tilde{R}_i^k(\lambda, x) \equiv 0$, $i = 1, 2$. Действительно, $\mathcal{L}_k \Phi_\lambda \in E^- \cap Q_{x_1, \dots, x_N}^{m_1, \dots, m_N}$, и из условий на λ, k и условия 3 на семейства операторов $\mathcal{L}_k$ получаем, что $\deg \mathcal{L}_k \Phi_\lambda < -\sum_{i=1}^N m_i$, откуда следует, что $\mathcal{L}_k \Phi_\lambda = 0$. Таким образом,

$$\mathcal{L}_k \Phi_\lambda(x) = \tilde{R}_1^k(\lambda, x) H_{\frac{\lambda-1}{2}}(x) e^{-\frac{x^2}{2}} + \tilde{R}_2^k(\lambda, x) (H_{\frac{\lambda-1}{2}}(x))' e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Допустим, что $\widetilde{R}_2^k(\lambda, x) \neq 0$, тогда

$$(\ln H_{\frac{\lambda-1}{2}}(x))' = -\frac{\prod_{i=1}^N (x-x_i)^{m_i} \widetilde{R}_1^k(\lambda, x)}{\prod_{i=1}^N (x-x_i)^{m_i} \widetilde{R}_2^k(\lambda, x)}.$$

Из условий 2, 4 на операторы $\mathcal{L}_k$ следует, что коэффициенты оператора $\prod_{i=1}^N (x-x_i)^{m_i} \mathcal{L}_k$ регулярны, следовательно функции $\prod_{i=1}^N (x-x_i)^{m_i} \widetilde{R}_i^k(\lambda, x)$ являются полиномами по x , причем

$$\deg \prod_{i=1}^N (x-x_i)^{m_i} \widetilde{R}_1^k(\lambda, x) \leq 2 \sum_{i=1}^N m_i.$$

В результате получаем, что у функции $(\ln H_{\frac{\lambda-1}{2}})'$ не больше чем $2 \sum_{i=1}^N m_i$ полюсов с учетом кратности, но при $(\lambda-1)/2 > 2 \sum_{i=1}^N m_i$ это не так.

Таким образом, при $[\frac{k+1}{2}] < k-4 \sum_{i=1}^N m_i - 1$ функция $R_i^k(\lambda, x)$ как полином от λ имеет больше корней, чем его степень, а следовательно, $R_i^k(\lambda, x) \equiv 0$. Так как ядро оператора $\mathcal{L}_k$ конечномерно, то $\mathcal{L}_k = 0$, следовательно, существует $n < k$ такое, что $\mathcal{L}_n \neq 0$, а $\mathcal{L}_{n+1} = 0$, т.е. $\mathcal{L}_n$ является искомым сплетающим оператором. Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Из теорем 1 и 2 следует, что безмонодромные операторы Шредингера с рациональным квадратично растущим потенциалом могут быть получены из оператора $-\partial^2 + x^2$ конечным числом рациональных преобразований Дарбу. Нам осталось доказать, что ядро соответствующего сплетающего оператора является линейной оболочкой некоторого набора функций Φ_λ из E^- . Для этого нам потребуются несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. Пусть L – безмонодромный оператор Шредингера с рациональным квадратично растущим потенциалом, тогда любая собственная функция с рациональной логарифмической производной имеет вид $R(x)e^{\epsilon x^2/2}$, $\epsilon = \pm 1$, $R(x)$ – рациональная функция, причем

$$LR(x)e^{\epsilon \frac{x^2}{2}} = -\epsilon(2 \deg R(x) + 1)R(x)e^{\epsilon \frac{x^2}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения $-\partial^2 \psi(x) + (U(x) + x^2 - \lambda)\psi(x) = 0$, где $U(x) = \sum_{i=1}^N m_i(m_i+1)/(x-x_i)$, следует уравнение на логарифмическую производную $\varphi(x) = (\ln \psi(x))'$

$$\varphi'(x) + \varphi^2(x) = U(x) + x^2 - \lambda.$$

Так как φ – рациональная функция, а ψ – однозначная функция с регулярными особыми точками в $\mathbb{C}$, то функцию φ можно представить в виде

$$\varphi(x) = P(x) + \sum_{i=1}^L \frac{k_i}{(x-y_i)}, \quad (7)$$

где $k_i \in \mathbb{Z}$, $P(x)$ — некоторый полином. Тогда из уравнения (7) следует, что $2 \deg P \leq 2$, следовательно, $P(x) = \epsilon x + c$, $\epsilon = \pm 1$. Из уравнения (7) также следует, что $(P'(x) + P^2(x)) - x^2 = \text{const}$, а следовательно, $P(x) = \epsilon x$. Заметим, что $\varphi'(x) + \varphi^2(x) = x^2 + 2\epsilon x R(x) + R^2(x) + \epsilon + R'(x)$, где $R(x) = \sum_{i=1}^L k_i / (x - y_i)$. Следовательно, в окрестности бесконечности начальные члены разложения имеют вид $\varphi'(x) + \varphi^2(x) = x^2 + \epsilon(1 + 2 \sum_{i=1}^L k_i) + \dots$; подставляя это разложение в уравнение (7), имеем $\epsilon(1 + 2 \sum_{i=1}^L k_i) = -\lambda$. Окончательно получаем, что

$$\psi(x) = C e^{\epsilon \frac{x^2}{2}} \prod_{i=1}^L (x - y_i)^{k_i},$$

следовательно, утверждение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого безмонодромного оператора Шредингера L с мероморфным потенциалом, растущим на бесконечности как x^2 , существует такой набор нечетных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, что

$$L_0 - L = 2(\ln W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_n}))'' + 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует существование сплетающего оператора $\mathcal{L}$: $(L - c)\mathcal{L} - \mathcal{L}L_0 = 0$; предположим еще, что из оператора $\mathcal{L}$ нельзя выделить множитель вида $L_0 - c'$.

Построим семейство $L_0^{(k)}$ операторов Шредингера и семейство операторов $\mathcal{L}^{(k)}$ с рациональными коэффициентами, обладающие следующими свойствами: $L_0^{(k)}$ получается из L_0 k последовательными преобразованиями Дарбу, использующими собственные функции Φ_{λ_i} , $i = 1, \dots, k$, оператора L_0 , $L_0^{(k)} D_k = D_k (L_0 - 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i)$ (вид D_k см. в предложении 1), и при этом $\mathcal{L}^{(k)} D_k = \mathcal{L}$, $\operatorname{ord} \mathcal{L}^{(k)} = \operatorname{ord} \mathcal{L} - k$.

Для $k = 0$ $L_0^{(0)} = L_0$, $D_0 = \operatorname{id}$.

Построим теперь $\mathcal{L}^{(k+1)}$, $L_0^{(k+1)}$ при условии, что $\mathcal{L}^{(k)}$, $L_0^{(k)}$ уже имеются:

$$L_0 - L_0^{(k)} = 2(\ln W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_k}))'' + 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i, \quad (8)$$

$$D_k \left(L_0 - 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i \right) = L_0^{(k)} D_k, \quad (9)$$

$$\mathcal{L}^{(k)} L_0^{(k)} - (L - \widehat{c}_k) \mathcal{L}^{(k)} = 0. \quad (10)$$

Можно считать, что существуют такая функция f_k с рациональной логарифмической производной и такое собственное значение s_k оператора $L_0^{(k)}$, что $L_0^{(k)} f_k = s_k f_k$, $\mathcal{L}^{(k)} f_k = 0$. В противном случае рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве теоремы 1, можно доказать существование дифференциального оператора $\widehat{\mathcal{L}}^{(k)}$

такого, что $\mathcal{L}^{(k)} = \widehat{\mathcal{L}}^{(k)}(L_0^{(k)} - \hat{s})$, тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(k)}D_k = \widehat{\mathcal{L}}^{(k)}(L_0^{(k)} - \hat{s})D_k = \widehat{\mathcal{L}}^{(k)}D_k \times (L_0 - \hat{s}_1)$, но это противоречит начальному предположению об операторе $\mathcal{L}$.

Так как $\ker D_k \subset \ker \mathcal{L}$ и $\ker \mathcal{L}^{(k)} = D_k(\ker \mathcal{L})$, то мы можем считать, что $f_k = D_k g_k$, $\mathcal{L}g_k = 0$. Если $D_k^* f_k = D_k^* D_k g_k = 0$, то $D_k g_k = 0$. Действительно, нетрудно показать, что $D_k^* D_k = \prod_{i=1}^k (L_0 - \lambda_i)$. Так как $L_0 \ker \mathcal{L} \subset \ker \mathcal{L}$, то мы можем привести L_0 к жордановой нормальной форме и представить $\ker \mathcal{L}$ в виде $\ker \mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^l V_i$, где V_i – пространство, соответствующее i -й жордановой клетке оператора L_0 . Тогда очевидно, что $D_k^* D_k V_i \subset V_i$. Пусть $g_k = \sum_{i=1}^l v_i$, $v_i \in V_i$, тогда получаем, что $D_k^* D_k v_i = 0$. Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то существует j_i такое, что $(L_0 - \lambda_{j_i})v_i = 0$, если при этом $v_i \notin \ker D_k$, то пространство $\ker(L_0 - \lambda_{j_i}) \cap \ker \mathcal{L} = \langle v_i, \Phi_{\lambda_{j_i}} \rangle$ двумерно, а следовательно, из оператора $\mathcal{L}$ может быть выделен множитель вида $L_0 - c'$, что противоречит начальному предположению об операторе $\mathcal{L}$.

Из равенства (9) следует, что

$$L_0 D_k^* f_k = \left(s_k + 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i \right) D_k^* f_k.$$

Так как

$$D_k D_k^* = \prod_{i=1}^k \left(L_0^{(k)} - \lambda_i + 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i \right),$$

то $D_k D_k^* f_k = s f_k$. Если $s = 0$, то с учетом того, что $D_k^* f_k$ – собственная функция оператора L_0 с рациональной логарифмической производной,

$$D_k^* f_k(x) = c H_m(\sqrt{-\epsilon}x) e^{\epsilon \frac{x^2}{2}}$$

для некоторых $c, m \in \mathbb{Z}_+$, $\epsilon = \pm 1$, и верна следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{-\epsilon}\infty}^{-\sqrt{-\epsilon}\infty} (c H_m(\sqrt{-\epsilon}x) e^{\epsilon \frac{x^2}{2}})^2 dx &= \int_{\gamma} (D_k^* f_k(x))^2 dx = \\ &= \int_{\gamma} f_k(x) D_k D_k^* f_k(x) dx = 0, \end{aligned}$$

где γ – близкий к прямой $\sqrt{-\epsilon}\mathbb{R}$ путь, обходящий особенности дифференциальных операторов D_k^* , D_k . Тогда $D_k^* f_k(x) = 0$, но этого, как мы уже показали, не может быть, т.е. $s \neq 0$. Пусть $h_k = (1/s) D_k^* f_k$, тогда $D_k h_k = f_k$. Так как функция $f_k(x)$ имеет рациональную логарифмическую производную, а оператор D_k – рациональные коэффициенты, то и функция $h_k(x)$ тоже имеет рациональную логарифмическую производную. Из равенства (9) получаем $L_0 h_k = (r_k - 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i) h_k$, следовательно, $h_k = \Phi_{\lambda_{k+1}}$. Таким образом, сделав преобразование Дарбу оператора $L_0^{(k)}$ с помощью функции f_k , получим оператор $L_0^{(k+1)}$, обладающий нужными свойствами.

При $k = \operatorname{ord} \mathcal{L}$ получим утверждение предложения.

Теперь с помощью предложения 3 можно доказать полезное уточнение леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть L – безмонодромный оператор Шредингера с рациональным квадратично растущим потенциалом:

$$L_0 - L = 2(\ln W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_n}))'' + 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i. \quad (11)$$

Тогда при $\lambda \in 2\mathbb{Z} + 1$ имеем $(\ker L - \lambda) \cap (E^+ \cup E^-) = \langle \varphi_\lambda \rangle$, где либо

$$\varphi_\lambda = \frac{W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_{j-1}}, \Phi_{\lambda_{j+1}}, \dots, \Phi_{\lambda_n})}{W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_n})}, \quad (12)$$

если выполнено $\lambda = \lambda_j - 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i$ для некоторого $1 \leq j \leq n$, либо

$$\varphi_\lambda = \frac{W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_n}, \Phi_{\lambda+2 \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i})}{W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_n})} \quad (13)$$

в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из свойств преобразований Дарбу, для каждого $\lambda \in 2\mathbb{Z} + 1$ существует собственная функция оператора L с рациональной логарифмической производной, имеющая вид, описанный в формулировке леммы. Остается только доказать, что других собственных функций с рациональными логарифмическими производными нет. Допустим, что это не так, т.е. существуют $\lambda \in 2\mathbb{Z} + 1$ и функции $S_1(x) = R_1(x)e^{-x^2/2}$, $S_2(x) = R_2(x)e^{x^2/2}$, где $R_i(x)$ – рациональные функции, такие, что

$\ker(L - \lambda) = \langle S_1, S_2 \rangle$. Согласно лемме 2 одна из функций S_1 или S_2 пропорциональна φ_λ , где φ_λ определяется формулами (12), (13). Так как

$$\ker D^* = \langle \varphi_{\lambda_1-2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i}, \dots, \varphi_{\lambda_n-2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i} \rangle,$$

то существует $1 \leq j \leq n$ такое, что $\lambda = \lambda_j - 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i$, потому что в противном случае мы имели бы $\ker D^* \cap \ker(L - \lambda) = 0$ и, следовательно, с помощью соотношения $D^*(L + 2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i) = L_0 D^*$ получили бы, что у оператора L_0 есть собственное подпространство, содержащее две собственные функции с рациональными логарифмическими производными. Таким образом, с учетом свойства коммутативности преобразований Дарбу и того, что при преобразованиях Дарбу оператора L , производимых с помощью собственных функций $\varphi_{\lambda_k-2 \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} \lambda_i}$, $k \neq j$, пространство $\ker(L - \lambda)$ отображается изоморфно, достаточно рассмотреть случай, когда оператор L получается из L_0 одним преобразованием Дарбу (т.е. $n = 1$) с помощью функции Φ_λ . При этом в ядре оператора $(L - \lambda)$ кроме функции $1/\Phi_\mu = \varphi_\lambda$, $\mu = \lambda + \operatorname{sgn} \mu$, есть еще одна непропорциональная ей функция ψ с рациональной логарифмической производной. Но тогда при обратном преобразовании Дарбу оператора L , осуществляемом с помощью функции $1/\Phi_\mu$, функция ψ перейдет в функцию, пропорциональную Φ_μ , т.е.

$$C\Phi_\mu = \left(\psi' \frac{1}{\Phi_\mu} - \psi \left(\frac{1}{\Phi_\mu} \right)' \right) \left(\frac{1}{\Phi_\mu} \right)^{-1}, \quad C \neq 0.$$

Последнее уравнение можно разрешить явно относительно ψ :

$$\psi(x) = C \frac{\int_0^x \Phi_\mu^2(y) dy + C'}{\Phi_\mu(x)},$$

где C' – некоторая константа. Так как $\Phi_\mu(x) = R_1(x)e^{\epsilon x^2/2}$ и $\psi(x) = R_2(x)e^{-\epsilon x^2/2}$, где R_1, R_2 – рациональные функции, то

$$\int_0^x \Phi_\mu^2(y) dy + C' = P(x)e^{\epsilon x^2}$$

для некоторого полинома $P(x)$. Достаточно разобрать случай $\mu > 0$, так как случай $\mu < 0$ получается из него заменой x на ix . Таким образом, $\Phi_\mu^2(x) = (P(x)e^{-x^2})'$, где $\Phi_\mu(x) = H_{\frac{\mu-1}{2}}(x)e^{-x^2/2}$ для некоторого полинома Эрмита $H_{\frac{\mu-1}{2}}$, имеющего действительные коэффициенты; следовательно, для интеграла по действительной оси верно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\mu^2(y) dy > 0,$$

но

$$\int_{-\infty}^{\infty} (P(y)e^{-y^2})' dy = 0.$$

Утверждение леммы доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как в результате преобразования Дарбу оператора L_0 , осуществленного с помощью собственной функции $e^{\epsilon x^2/2}$, $\epsilon = \pm 1$, мы получим оператор L_0 , сдвинутый на некоторую константу, то для набора нечетных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, где $\lambda_i = \epsilon$, как легко понять, имеет место равенство

$$\frac{W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_{l-1}}, \Phi_{\lambda_l}, \Phi_{\lambda_{l+1}}, \dots, \Phi_{\lambda_k})}{W(\Phi_{\lambda_1-2\lambda_l}, \dots, \Phi_{\lambda_{l-1}-2\lambda_l}, \Phi_{\lambda_{l+1}-2\lambda_l}, \dots, \Phi_{\lambda_k-2\lambda_l})} = \Phi_{\lambda_l}.$$

Полученное в предложении 3 представление безмонодромного оператора Шредингера, вообще говоря, неоднозначно, но с его помощью может быть доказана следующая основная теорема о (однозначном) представлении безмонодромного оператора Шредингера с квадратично растущим потенциалом.

ТЕОРЕМА 3. *Всякий безмонодромный оператор Шредингера L с рациональным квадратично растущим потенциалом имеет вид*

$$L = L_0 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln W(H_{n_1}(x), \dots, H_{n_k}(x)), \quad (14)$$

где $n_1 < \dots < n_k$ – некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, $H_k(x)$ – k -й полином Эрмита, а $W(f_1, \dots, f_m)$ – вронскиан функций $f_1, \dots, f_m$. При этом различным последовательностям $n_1 < \dots < n_k$ отвечают различные безмонодромные операторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$W(e^{-\frac{x^2}{2}} P_1(x), \dots, e^{-\frac{x^2}{2}} P_n(x)) = W(P_1(x), \dots, P_n(x)) e^{-n \frac{x^2}{2}}$$

следует, что для доказательства существования представления оператора L в виде (14) достаточно доказать, что существует представление оператора L в виде, указанном в предложении 3, но обладающее свойством $\lambda_i > 0$. Будем доказывать существование такого представления индукцией по $M = \sum m_i$, где суммирование ведется по всем особым точкам потенциала оператора L , а m_i – кратность соответствующей особой точки.

Случай $M = 0$ очевиден.

Проведем теперь шаг индукции. Пусть оператор L определен формулой (11) и выполняются равенства

$$D(f) = \frac{W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_n}, f)}{W(\Phi_{\lambda_1}, \dots, \Phi_{\lambda_n})}, \quad \left(L + 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i \right) D = D L_0.$$

В силу замечания мы можем считать, что не существует $1 \leq l \leq n$ такого, что $\lambda_l = -1$. Обозначим через S^+ и S^- соответственно количество положительных и отрицательных $-\lambda_i$, $i = 1, \dots, n$. Если $S^+ = 0$, то шаг индукции доказан. Далее будем считать $S^+ > 0$. Докажем, что в этом случае существует собственная функция φ оператора L такая, что $\varphi \in E^+$ и $\deg \varphi < 0$. Действительно, если

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i < 0,$$

то $D e^{x^2/2} \in E^+$, и по лемме 3 имеем

$$\deg D e^{x^2/2} = \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i.$$

Если же

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i \geq 0,$$

то $S^- > 0$, и для $\mu = \max \lambda_i$ и функции φ такой, что

$$\langle \varphi \rangle = \ker D^* \cap \ker \left(L - \mu + 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i \right),$$

выполнено $\varphi \in E^+$. Согласно лемме 3 выполняется

$$\deg \varphi = -(\mu - 1)/2 + \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i - 1.$$

Учитывая, что $(\mu - 1)/2 \geq S^- - 1$ и

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i = S^- - S^+,$$

получаем

$$\deg \varphi \leq -S^- + 1 + \sum_{i=1}^n \operatorname{sgn} \lambda_i - 1 = -S^+ < 0.$$

Теперь, если сделать преобразование Дарбу оператора L с помощью собственной функции φ , то мы получим оператор L' . Рассуждением, аналогичным приведенному в [1], получаем $\sum m_i > \sum m'_i$, следовательно,

$$L_0 - L' = 2(\ln W(H_{s_1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \dots, H_{s_k}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}))'' + 2k,$$

но тогда по лемме 3

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{W(H_{s_1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \dots, H_{s_k}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, H_{s_{k+1}}(x)e^{-\frac{x^2}{2}})}{W(H_{s_1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \dots, H_{s_k}(x)e^{-\frac{x^2}{2}})}.$$

Так как $L - L' = 2(\ln \varphi)''$, то

$$L_0 - L = 2(\ln W(H_{s_1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \dots, H_{s_k}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, H_{s_{k+1}}(x)e^{-\frac{x^2}{2}}))'' + 2k + 2.$$

В силу замечания мы можем считать, что в представлении оператора L все s_i являются натуральными.

Теперь докажем единственность полученного представления. В силу леммы 3 существуют числа $m, n \in 2\mathbb{Z} + 1$ такие, что $\ker(L - m) \cap E^+ \neq 0$, $\ker(L - n) \cap E^- \neq 0$, но для любых $\mu > m$, $\nu < n$ имеем $\ker(L - \mu) \cap E^+ = 0$, $\ker(L - \nu) \cap E^- = 0$. Тогда для оператора вида (14) верно

$$\{2n_1 + 1, \dots, 2n_k + 1\} = \{s \in [m - n + 1, 1] \cap 2\mathbb{Z} + 1 \mid \ker(L - s - n + 1) \cap E^+ \neq 0\}.$$

Благодарности. В заключение я хочу поблагодарить А. П. Веселова за постановку задачи и О. А. Чалых, чьи идеи сыграли основную роль в ее решении. Я благодарен также А. В. Пенскому за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] J. J. Duistermaat, F. A. Grünbaum. Commun. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 177.
- [2] О. А. Чалых. УМН. 1998. Т. 53. № 2. С. 167.
- [3] Ю. Ю. Берест, А. П. Веселов. УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 211.
- [4] V. M. Goncharenko, A. P. Veselov. J. Phys. A. 1998. V. 31. № 26. P. 5315.
- [5] G. Darboux. Compt. Rend. Acad. Sci. 1882. V. 94. P. 1343.
- [6] J. L. Burchdall, T. W. Chaundy. Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1930. V. 21. P. 420.
- [7] M. M. Crum. Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1955. V. 6. P. 121.
- [8] Э. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1939.

Поступила в редакцию 23.III.1999 г.