Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Казаков, П. И. Пронин, Уравнения перенормировки в теории гравитации с высшими производными, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 3, 387–411

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf818>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:55:05

© 1999 г.

К. А. Казаков*, П. И. Пронин*

УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассмотрена структура уравнений перенормировки в теории гравитации с высшими производными. Найдена нетривиальная зависимость инвариантных расходимостей эффективного действия от калибровки. Построена последовательная процедура перенормировки функций Грина в методе дополнительного источника. Выполнены явные вычисления одно- и двухпетлевых расходимостей эффективного действия в произвольных параметризации и калибровке, подтверждающие общую структуру полученных уравнений перенормировки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование калибровочной и параметризационной зависимостей квантового эффективного действия и построенных с его помощью физических величин является одной из важнейших задач квантовой теории. Этот вопрос приобретает особую актуальность в связи с исследованиями спонтанного нарушения симметрии, образования глюонного конденсата, эволюции Вселенной и др. Поскольку может оказаться, что при изучении конфайнмента кварков в квантовой хромодинамике или при построении космологических моделей S -матричный подход вообще неприменим, единственным адекватным методом изучения проблемы останется исследование квантового эффективного действия.

Наиболее удобным методом исследования калибровочной зависимости эффективного действия является использование так называемых суперкалибровочных преобразований Бекки–Руэ–Стора–Тютиня (БРСТ) [1, 2], выражающих инвариантность квантового действия, остающуюся после фиксации калибровки. Вводя БРСТ-неинвариантные члены (источники определенных комбинаций калибровочных полей и полей духов) в квантовое действие, можно описать зависимость функций Грина от калибровки [3–11]. Стандартный метод получения тождеств Славнова в применении к производящему функционалу функций Грина, построенному с помощью модифицированного квантового действия, естественно приводит к уравнениям, связывающим производные эффективного действия по калибровочным параметрам с функциональными производными по полям.

* Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: kirill@theor.phys.msu.ru, petr@theor.phys.msu.ru

Впервые этот метод был применен для исследования перенормировки составных операторов в теориях Янга–Миллса [3, 4] и для определения калибровочной зависимости эффективного потенциала хиггсова поля в электрослабой теории [5]. В работе [12] этот метод был использован для доказательства калибровочной независимости расходящихся частей эффективного действия R^2 -гравитации на массовой поверхности. При изучении проблемы калибровочной зависимости масс скалярных частиц, взаимодействующих с гравитационным полем, метод дополнительного источника был применен в работе [6]. Сформулированный первоначально для описания зависимости функций Грина от калибровочного параметра, являющегося весовым множителем фиксирующего калибровку члена в квантовом действии, этот метод позже был распространен и на общий случай вариаций самого калибровочного условия [8–11].

Следует отметить, однако, что задача построения последовательной процедуры перенормировки функций Грина в методе дополнительного источника до сих пор не рассматривалась. А именно, при выводе уравнений, определяющих структуру расходимостей эффективного действия (уравнений перенормировки), подразумевалось, что они всегда могут быть получены простым отбрасыванием конечных членов в тождествах Славнова, имеющих один и тот же вид в каждом порядке петлевого разложения.

Целью нашего исследования являются подробный анализ процедуры перенормировки функций Грина в методе дополнительного источника и получение точных уравнений перенормировки. Мы покажем, что хотя перенормированные функции Грина удовлетворяют тождествам Славнова, имеющим тот же вид, что и формальные тождества для перенормированных функций, тем не менее уравнения перенормировки в выбранном порядке петлевого разложения не могут быть получены обычным выделением расходящихся частей тождеств Славнова для функций Грина, перенормированных во всех порядках ниже данного. Последовательная процедура состоит, во-первых, в определении возможных типов расходимостей, которые возникают в результате введения в действие дополнительного члена, и, во-вторых, в учете явной зависимости контрчленов от калибровки. Это приводит к тому, что для получения уравнения перенормировки в данном порядке разложения по петлям необходимо использовать уравнения перенормировки, полученные во всех предыдущих порядках. Отметим также, что в отличие от обычной ситуации, когда для полного определения структуры расходимостей достаточно (наряду с обычными соображениями размерности и сохранения духовых чисел) тождеств Славнова и квантовых уравнений движения полей антидухов, проведение описанной выше программы требует привлечения также и соответствующих уравнений для калибровочных полей и полей духов. В результате уравнения перенормировки не имеют такого простого вида, как, скажем, полученные в работе [12] и использованные для доказательства независимости контрчленов от калибровки на массовой оболочке.

Наиболее важное применение полученные результаты имеют в теории гравитации. Дело в том, что в отличие от теорий Янга–Миллса теории гравитации содержат несущественный (в терминологии Вейнберга [13]) заряд. Характерным свойством теорий гравитации (независимо от наличия членов с высшими производными) является несущественность эйнштейновской гравитационной постоянной, в силу чего ее перенормировка, вообще говоря, должна зависеть от выбора калибровки. Ясно, что при попытке

определить высокоэнергетическое поведение эйнштейновской постоянной мы столкнемся с проблемой возможной зависимости этого поведения от выбора способа квантования. Оказывается, что этот вопрос тесно связан с выбором параметризации гравитационного поля.

Другим важным вопросом, в котором характер калибровочной зависимости функций Грина имеет решающее значение, является проблема унитарности теорий гравитации с высшими производными. Как показано в работе [7], этот вопрос сводится к исследованию зависимости от калибровки мнимых полюсных масс, соответствующих духам спина два, которые обязательно присутствуют в таких теориях. Заметим, что доказательство калибровочной независимости духовых масс, данное в работе [9], проводилось без учета возможного влияния перенормировки.

В настоящей работе мы рассмотрим в качестве области применения метода R^2 -гравитацию. Однако описанный нами метод получения уравнений перенормировки может быть использован также и в теориях Янга–Миллса, где соображения размерности существенно упрощают рассмотрение.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы кратко напоминаем суть метода дополнительного источника, здесь также излагается общая теория построения уравнений перенормировки для функций Грина в первом и втором порядках и описанный метод применяется к гравитации с высшими производными. В разделе 3 явно вычислены калибровочно-инвариантные расходимости эффективного действия в квадратичной теории гравитации и показано, что эти результаты действительно удовлетворяют уравнениям перенормировки, полученным в предыдущем разделе. В разделе 4 коротко подводятся итоги работы и обсуждается соответствие наших результатов с полученными ранее другими авторами. Громоздкие формулы и вычисления вынесены в два приложения.

В работе используются “конденсированные” обозначения де Витта. Все производные по антикоммутирующим величинам считаются левыми. Для регуляризации расходимостей используется размерная техника.

2. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОРМИРОВКИ R^2 -ГРАВИТАЦИИ В МЕТОДЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ИСТОЧНИКА

2.1. Предварительные замечания. Естественным инструментом для определения калибровочной зависимости функций Грина в калибровочной теории являются суперкалибровочные преобразования эффективного действия. Нарушив его симметрию введением такой комбинации полей, что ее БРСТ-вариация представляет собой фиксирующий калибровку член можно получить уравнения, обобщающие обычные тождества Славнова и связывающие производные эффективного действия по калибровочному параметру с его вариационными производными по полям.

В теории чистой гравитации с высшими производными с помощью этого метода было показано [12], что калибровочно-инвариантные расходимости n -го порядка $\Omega_{[n-1]}^{\text{div}(n)}$ (укороченного) производящего функционала вершин $\Gamma_{[n-1]}$, перенормированного до $(n-1)$ -го порядка петлевого разложения включительно и удовлетворяющего уравне-

нию Зинн-Жустена [14] точно (т.е. во всех порядках), являются калибровочно-независимыми на массовой оболочке. Было получено следующее тождество [12]:

$$\hat{\xi}\Gamma_{[n-1]}^{\text{div}(n)} = \hat{g}\Upsilon^{(n)}, \quad (1)$$

где $\hat{\xi} \equiv 2\xi\partial/\partial\xi$, ξ – калибровочный параметр, $\hat{g} \cdot \equiv (\Sigma, \cdot)$ – оператор перенормировки, $\hat{g}^2 = 0$, $\Sigma = \Gamma^{(0)}$ – исходное укороченное эффективное действие, $(\cdot, \cdot)$ – антискобка Баталина–Вилковыского [15], $\Upsilon^{(n)}$ – некоторый (локальный) расходящийся функционал полей и источников БРСТ-преобразований.

Однако при получении уравнения перенормировки (1) не было учтено, что введение в квантовое действие дополнительного члена, позволяющего исследовать зависимость от калибровки, приводит, вообще говоря, к появлению новых типов расходящихся структур, учет которых необходим при последовательном проведении программы перенормировок. Кроме того, при выводе уравнения (1) в работе [12] не была учтена возможная неявная зависимость от калибровки обычных контрчленов, вводимых при перенормировке исходных функций Грина.

Поэтому вместо уравнения (1) мы запишем

$$\hat{\xi}\Gamma_{[n-1]}^{\text{div}(n)} - \hat{g}\Upsilon^{(n)} = \Xi^{(n)}, \quad (2)$$

где $\Xi^{(n)}$ – некоторый четный функционал полей и БРСТ-источников. Поскольку по предположению производящий функционал вершин $\Gamma_{[n-1]}$ не содержит расходимостей порядка ниже n , его расходимости n -го порядка локальны, как и расходимости функционала Υ . Поэтому $\Xi^{(n)}$ является локальным расходящимся функционалом порядка n . Из того факта, что $\Gamma_{[n-1]}^{\text{div}(n)}$ удовлетворяет уравнению перенормировки [12]

$$\hat{g}\Gamma_{[n-1]}^{\text{div}(n)} = 0 \quad (3)$$

и $\hat{g}$ не зависит от ξ , следует условие согласования для $\Xi^{(n)}$

$$\hat{g}\Xi^{(n)} = 0. \quad (4)$$

Как известно [16, 17], решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$\Xi^{(n)} = \omega^{(n)} + \hat{g}\theta^{(n)}, \quad (5)$$

где $\omega^{(n)}$ и $\theta^{(n)}$ – локальные функционалы полей и БРСТ-источников, причем $\omega^{(n)}$ зависит только от $\hbar$ и инвариантен относительно исходных калибровочных преобразований действия S .

Таким образом, в общем случае уравнение (1) заменяется на

$$\hat{\xi}\Gamma_{[n-1]}^{\text{div}(n)} - \hat{g}\tilde{\Upsilon}^{(n)} = \omega^{(n)}, \quad \tilde{\Upsilon}^{(n)} \equiv \Upsilon^{(n)} + \theta^{(n)}. \quad (6)$$

Теперь мы перейдем к последовательному получению уравнений перенормировки.

2.2. Действие, калибровка и БРСТ-преобразования. Рассмотрим теорию гравитации, описываемую лагранжианом, включающим наряду с эйнштейновским и космологическим членами минимальный набор слагаемых, содержащих высшие производные, который обеспечивает перенормируемость теории по индексу¹⁾:

$$S_0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\alpha_1 R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{k^2} (R - 2\Lambda) \right), \quad (7)$$

где α_1 и β – произвольные постоянные, удовлетворяющие лишь условиям $\beta \neq 0$ и $3\alpha_1 + \beta \neq 0$, в силу которых гравитационный пропагатор ведет себя при больших импульсах как p^{-4} (см. [12]); k и Λ – гравитационная и космологическая постоянные. Соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \alpha_1 R^2 g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \beta R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - 2\alpha_1 R R^{\alpha\beta} - \\ & - 2\beta R_{\mu\nu} R^{\mu\alpha\nu\beta} - \left(2\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta \right) \square R g^{\alpha\beta} - \beta \square R^{\alpha\beta} + \\ & + (2\alpha_1 + \beta) R^{;\alpha\beta} - \frac{1}{2k^2} R g^{\alpha\beta} + \frac{1}{k^2} \Lambda g^{\alpha\beta} + \frac{1}{k^2} R^{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Перенормируемость этой теории была доказана в работе [12] для случая гармонической калибровки (и специальной параметризации гравитационного поля), взвешенной функционалами определенного типа, а именно либо сингулярными, либо содержащими производные выше второго порядка. В случае обобщенной лоренцевой калибровки перенормируемость была установлена в предположении справедливости гипотезы локальности, доказанной позже в произвольной линейной перенормируемой по индексу калибровке (и произвольных параметризациях) [18].

Мы рассматриваем произвольные перенормируемые по индексу линейные по полям и их производным калибровки, для обозначения которых будем использовать символ F_σ . Функция F_σ предполагается (помимо упомянутой линейности) не зависящей от параметра ξ , взвешивающего калибровочное условие. Конкретная структура F_σ для нас не важна, но для определенности можно считать, что²⁾

$$F_\sigma \equiv F_\sigma^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \equiv \partial^\nu h_{\sigma\nu}, \quad (9)$$

где $h_{\mu\nu}$ обозначает набор динамических переменных, описывающих гравитационное поле. Ниже наряду с калибровочной зависимостью теории мы будем рассматривать также и зависимость от параметризации гравитационного поля. Условие (9) при этом всегда будет соответствовать набору переменных³⁾ $h_{\mu\nu}$, входящих в приведенное разложение метрики (см. ниже определение (68)). Для определенности в этом пункте под $h_{\mu\nu}$ мы будем подразумевать отклонения ковариантных компонент метрики от плоского фона:

¹⁾Мы принимаем следующие определения: $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \dots$, $R \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} = \text{sgn}(+, -, -, -)$.

²⁾Мы используем тензор Минковского $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ для поднимания индексов.

³⁾Называемых далее *стандартными*.

$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$. Обобщение на произвольные параметризации является формальным и будет сделано в п. 2.5.4.

Фиксируя калибровочную инвариантность действия S_0 путем введения дополнительного члена

$$S_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\xi} F^\alpha \square F_\alpha, \quad (10)$$

получаем для эффективного действия Фаддеева–Попова

$$S_{\phi\pi} = S_0 + S_{\text{gf}} + \overline{C}^\tau F_\tau^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha, \quad (11)$$

где C_α и $\overline{C}^\alpha$ – соответственно духи и антидухи Фаддеева–Попова, а $D_{\mu\nu}^\alpha$ – генераторы калибровочных преобразований полей $h_{\mu\nu}$, конкретный вид которых зависит от выбора параметризации поля метрики.

Соответствующие БРСТ-преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} &= D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha \lambda, \\ \delta C_\alpha &= -\partial^\beta C_\alpha C_\beta \lambda, \\ \delta \overline{C}^\tau &= -\xi^{-1} \square F^\tau \lambda, \end{aligned} \quad (12)$$

где λ – произвольный постоянный антикоммутирующий параметр.

2.3. Функции Грина. Производящий функционал несвязных функций Грина в форме Зинн-Жустена имеет вид

$$\begin{aligned} Z_{[0]}[T^{\mu\nu}, \bar{\beta}^\sigma, \beta_\tau, K^{\mu\nu}, L^\sigma] &= \int dh_{\mu\nu} dC_\sigma d\overline{C}^\tau \exp\{i(\tilde{\Sigma}(h_{\mu\nu}, C_\sigma, \overline{C}^\tau, K^{\mu\nu}, L^\sigma) + \\ &+ Y F_\sigma \overline{C}^\sigma + \bar{\beta}^\sigma C_\sigma + \overline{C}^\tau \beta_\tau + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu})\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\tilde{\Sigma} = S_0 - \frac{1}{2\xi} F^\alpha \square F_\alpha + \overline{C}^\tau F_\tau^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha + K^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha C_\alpha + L^\sigma \partial^\beta C_\sigma C_\beta;$$

$K^{\mu\nu}(x)$ (антикоммутирующие), $L^\sigma(x)$ (коммутирующие) – источники БРСТ-преобразований полей $h_{\mu\nu}$ и C_σ , соответственно, причем $\Sigma = \tilde{\Sigma} - S_{\text{gf}}$ удовлетворяет уравнению [14]

$$(\Sigma, \Sigma) = 0. \quad (14)$$

Эффективное действие, входящее в экспоненту подынтегрального выражения (13), модифицировано введением БРСТ-неинвариантного члена [3–5, 10]

$$Y F_\sigma \overline{C}^\sigma. \quad (15)$$

Начнем с определения возможных типов расходимостей, связанных с введением этого нового члена.

Простой подсчет дает для степени расходимости произвольной одночастично-неприводимой диаграммы

$$D = 4 - 2n_2 - 2n_K - n_L - 2n_Y - E_C - 2E_{\overline{C}}, \quad (16)$$

где n_2 означает число h -вершин с двумя производными (связанными с наличием линейного по кривизне члена в S_0), $n_{K,L,Y}$ — числа вершин, содержащих соответственно источники K, L, Y , E_C и $E_{\bar{C}}$ — числа внешних духовых и антидуховых линий.

Помимо этого из выражения (13) следует, что всем полям и источникам могут быть приписаны следующие духовые числа N_g :

$$\begin{aligned} N_g[h] &= 0, & N_g[C] &= +1, & N_g[\bar{C}] &= -1, \\ N_g[K] &= -1, & N_g[L] &= -2, & N_g[Y] &= +1. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь из выражений (16) и (17) следует, что имеется ровно три типа расходящихся структур, содержащих Y -вершину:

$$Y K^{\mu\nu} P_{\mu\nu}, \quad Y \bar{C}^{\tau} F_{\tau}^{\mu\nu} Q_{\mu\nu}, \quad Y L^{\sigma} C^{\tau} M_{\sigma\tau}, \quad (18)$$

где P, Q и M — некоторые полиномы по компонентам $h_{\mu\nu}$, не содержащие производных.

Таким образом, для того чтобы структура эффективного действия не менялась при перенормировке, нужно с самого начала⁴⁾ вместо (13) рассматривать производящий функционал вида [19]

$$\begin{aligned} Z_{[0]}[T^{\mu\nu}, \bar{\beta}^{\sigma}, \beta_{\tau}, K^{\mu\nu}, L^{\sigma}] &= \int dh_{\mu\nu} dC_{\sigma} d\bar{C}^{\tau} \exp\{i(\tilde{\Sigma}(h_{\mu\nu}, C_{\sigma}, \bar{C}^{\tau}, K^{\mu\nu}, L^{\sigma}) + \\ &+ Y K^{\mu\nu} P_{\mu\nu} + Y \bar{C}^{\tau} F_{\tau}^{\mu\nu} Q_{\mu\nu} + Y L^{\sigma} C^{\tau} M_{\sigma\tau} + \bar{\beta}^{\sigma} C_{\sigma} + \bar{C}^{\tau} \beta_{\tau} + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu})\}. \end{aligned} \quad (19)$$

2.4. Первый порядок.

2.4.1. Вывод тождеств Славнова первого порядка. Вывод тождеств Славнова в первом порядке, очевидно, тот же, что и в работе [12]: мы совершаем БРСТ-преобразование (12) переменных интегрирования в производящем функционале (19), причем для простоты опускаем члены нулевого порядка $Y K P^{(0)}$ и $Y L C M^{(0)}$, полагая также $Q^{(0)} = h$. В противном случае при определении укороченного действия $\tilde{\Gamma}$ (см. ниже (24)) удобно вычитать эти выражения вместе с членом S_{gf} — тогда окончательные уравнения сохраняют свой вид. Таким образом, мы имеем⁵⁾

$$\begin{aligned} \int dh_{\mu\nu} dC_{\sigma} d\bar{C}^{\tau} \left[T^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta K^{\mu\nu}} - \bar{\beta}_{\sigma} \frac{\delta}{\delta L^{\sigma}} + \frac{1}{\xi} \beta_{\tau} \square F^{\tau, \mu\nu} \frac{\delta}{\delta T^{\mu\nu}} - 2Y \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + iY \bar{C}^{\sigma} F_{\sigma}^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^{\alpha} C_{\alpha} \right] \exp\{i(\tilde{\Sigma} + Y F_{\sigma} \bar{C}^{\sigma} + \bar{\beta}^{\sigma} C_{\sigma} + \bar{C}^{\tau} \beta_{\tau} + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu})\} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя уравнения движения антидухов

$$\begin{aligned} \int dh_{\mu\nu} dC_{\sigma} d\bar{C}^{\tau} (F_{\tau}^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^{\alpha} C_{\alpha} - Y F_{\tau} + \beta_{\tau}) \times \\ \times \exp\{i(\tilde{\Sigma} + Y F_{\sigma} \bar{C}^{\sigma} + \bar{\beta}^{\sigma} C_{\sigma} + \bar{C}^{\tau} \beta_{\tau} + T^{\mu\nu} h_{\mu\nu})\} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

⁴⁾ Легко видеть, что введение дополнительных членов (18) в эффективное действие не меняет выражения (16).

⁵⁾ Якобиан БРСТ-замены переменных интегрирования равен единице в размерной регуляризации.

вводя производящий функционал вершин $\tilde{\Gamma}_{[0]}$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{[0]}[h_{\mu\nu}, C_\sigma, \overline{C}^\tau, K^{\mu\nu}, L^\sigma, Y] = & W_{[0]}[T^{\mu\nu}, \bar{\beta}^\sigma, \beta_\tau, K^{\mu\nu}, L^\sigma, Y] - \bar{\beta}^\sigma C_\sigma - \\ & - \overline{C}^\tau \beta_\tau - T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \\ W_{[0]} \equiv & -i \ln Z_{[0]}, \quad h_{\mu\nu} = \frac{\delta W_{[0]}}{\delta T^{\mu\nu}}, \quad C_\sigma = \frac{\delta W_{[0]}}{\delta \bar{\beta}^\sigma}, \quad \overline{C}^\tau = -\frac{\delta W_{[0]}}{\delta \beta_\tau}, \end{aligned} \quad (22)$$

и замечая, что

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{[0]}}{\partial \xi} = \frac{\partial W_{[0]}}{\partial \xi},$$

получим из уравнения (20) тождество для $\tilde{\Gamma}_{[0]}$

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_{[0]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{[0]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{[0]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{[0]}}{\delta L^\sigma} + \frac{1}{\xi} \square F_\tau \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{[0]}}{\delta \overline{C}_\tau} + Y \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{[0]}}{\delta \overline{C}_\tau} \overline{C}_\tau + 2Y\xi \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{[0]}}{\partial \xi} = 0. \quad (23)$$

Чтобы упростить выражение (23), введем укороченный производящий функционал

$$\check{\Gamma}_{[0]} = \tilde{\Gamma}_{[0]} + \frac{1}{2\xi} F_\alpha \square F^\alpha - Y F_\sigma \overline{C}^\sigma, \quad (24)$$

тогда оно сводится к виду

$$\frac{\delta \check{\Gamma}_{[0]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta \check{\Gamma}_{[0]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta \check{\Gamma}_{[0]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta \check{\Gamma}_{[0]}}{\delta L^\sigma} + 2Y\xi \frac{\partial \check{\Gamma}_{[0]}}{\partial \xi} = 0. \quad (25)$$

Уравнение движения антидухов, записанное в терминах $\check{\Gamma}_{[0]}$, есть

$$F_\tau^{\mu\nu} \frac{\delta \check{\Gamma}_{[0]}}{\delta K^{\mu\nu}} - \frac{\delta \check{\Gamma}_{[0]}}{\delta \overline{C}^\tau} = 0. \quad (26)$$

Отделим теперь линейную по Y часть $\check{\Gamma}_{[0]}$:

$$\check{\Gamma}_{[0]} = \Gamma_{[0]} + Y \Upsilon_{[0]}. \quad (27)$$

Тогда уравнение (25) дает обычное тождество Славнова для $\Gamma_{[0]}$

$$\frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta L^\sigma} = 0 \quad (28)$$

и уравнение, содержащее $\Upsilon_{[0]}$,

$$-\frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta \Upsilon_{[0]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta \Upsilon_{[0]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta K^{\mu\nu}} - \frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta \Upsilon_{[0]}}{\delta L^\sigma} - \frac{\delta \Upsilon_{[0]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta L^\sigma} + 2\xi \frac{\partial \Gamma_{[0]}}{\partial \xi} = 0, \quad (29)$$

тогда как из уравнения (26) следуют соотношения

$$F_\tau^{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta K^{\mu\nu}} - \frac{\delta \Gamma_{[0]}}{\delta \overline{C}^\tau} = 0 \quad (30)$$

и

$$F_{\tau}^{\mu\nu} \frac{\delta \Upsilon_{[0]}}{\delta K^{\mu\nu}} - \frac{\delta \Upsilon_{[0]}}{\delta \bar{C}^{\tau}} = 0. \quad (31)$$

Выражения (28), (29) дают в первом порядке следующие уравнения перенормировки:

$$\hat{g} \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)} = 0, \quad (32)$$

$$\hat{\xi} \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)} - \hat{g} \Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)} = 0, \quad (33)$$

где оператор перенормировки

$$\hat{g} \equiv \frac{\delta \Sigma}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta K^{\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta h_{\mu\nu}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta C_{\sigma}} \frac{\delta}{\delta L^{\sigma}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^{\sigma}} \frac{\delta}{\delta C_{\sigma}}.$$

Из уравнений (30), (31) получим соответственно

$$F_{\tau}^{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta K^{\mu\nu}} - \frac{\delta \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta \bar{C}^{\tau}} = 0 \quad (34)$$

и

$$F_{\tau}^{\mu\nu} \frac{\delta \Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta K^{\mu\nu}} - \frac{\delta \Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta \bar{C}^{\tau}} = 0. \quad (35)$$

2.4.2. Решение уравнений перенормировки первого порядка. Решение уравнений (32), (34), как известно [12, 17], имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)} = & \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)} + \frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}} \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)} + (K^{\rho\sigma} + \bar{C}^{\tau} F_{\tau}^{\rho\sigma}) \frac{\delta D_{\rho\sigma}^{\alpha}}{\delta h_{\mu\nu}} \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)} C_{\alpha} - \\ & - (K^{\rho\sigma} + \bar{C}^{\tau} F_{\tau}^{\rho\sigma}) \frac{\delta \tilde{P}_{\rho\sigma}^{(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} D_{\mu\nu}^{\alpha} C_{\alpha} - (K^{\mu\nu} + \bar{C}^{\tau} F_{\tau}^{\mu\nu}) D_{\mu\nu}^{\sigma} (\tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\varepsilon} C_{\varepsilon}) - \\ & - L^{\sigma} \partial^{\beta} (\tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau} C_{\tau}) C_{\beta} - L^{\sigma} \partial^{\beta} C_{\sigma} \tilde{Q}_{\beta}^{(1)\tau} C_{\tau} - L^{\sigma} \frac{\delta \tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau}}{\delta h_{\mu\nu}} C_{\tau} D_{\mu\nu}^{\alpha} C_{\alpha} + \\ & + L^{\sigma} \tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau} \partial^{\beta} C_{\tau} C_{\beta}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}$, $\tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau}$ — однопетлевые расходящиеся полиномы по компонентам $h_{\alpha\beta}$, не содержащие производных, с помощью которых производится построение перенормированного в первом порядке (укороченного) эффективного действия $\Sigma - \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}$ до $\Sigma_{[1]}$, удовлетворяющего уравнению Зинн-Жустена (14) точно. Для этого определяются перенормированные поля

$$h_{\mu\nu}^r \equiv h_{\mu\nu} - \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}, \quad C_{\sigma}^r \equiv C_{\sigma} + \tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau} C_{\tau}, \quad (37)$$

причем калибровочные преобразования полей $h_{\mu\nu}^r$ совпадают с исходными для $h_{\mu\nu}$. Согласно этой перенормировке следует также модифицировать члены с источниками БРСТ-преобразований.

Приведем, наконец, явное выражение $\Sigma_{[1]}$ [12], поскольку оно понадобится нам ниже при выводе уравнения перенормировки второго порядка:

$$\begin{aligned} \Sigma_{[1]}(h, C, \overline{C}, K, L) = & (S_0 - \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)})(h - \tilde{P}^{(1)}(h)) + (K^{\mu\nu} + \overline{C}^\tau F_\tau^{\mu\nu}) \times \\ & \times \left(D_{\mu\nu}^\sigma(h^r(h)) + \frac{\delta \tilde{P}_{\mu\nu}^*(h^r)}{\delta h_{\rho\tau}^r}(h^r(h)) D_{\rho\tau}^\sigma(h^r(h)) \right) (C_\sigma + \tilde{Q}_\sigma^{(1)\varepsilon}(h) C_\varepsilon) + \\ & + L^\sigma \partial^\tau (C_\sigma + \tilde{Q}_\sigma^{(1)\beta}(h) C_\beta) (C_\tau + \tilde{Q}_\tau^{(1)\alpha}(h) C_\alpha) + \\ & + L^\sigma \frac{\delta \tilde{Q}_\sigma^{*\tau}(h^r)}{\delta h_{\mu\nu}^r}(h^r(h)) (C_\tau + \tilde{Q}_\tau^{(1)\alpha}(h) C_\alpha) D_{\mu\nu}^\lambda(h^r(h)) (C_\lambda + \tilde{Q}_\lambda^{(1)\beta}(h) C_\beta) - \\ & - L^\sigma \tilde{Q}_\sigma^{*\tau}(h^r(h)) \partial^\lambda (C_\tau + \tilde{Q}_\tau^{(1)\alpha}(h) C_\alpha) (C_\lambda + \tilde{Q}_\lambda^{(1)\alpha}(h) C_\alpha), \end{aligned} \quad (38)$$

где полиномы $\tilde{P}^*$, $\tilde{Q}^*$ определяются из уравнений

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^r + \tilde{P}_{\mu\nu}^*(h^r), \quad C_\sigma = C_\sigma^r - \tilde{Q}_\sigma^{*\tau}(h^r) C_\tau^r. \quad (39)$$

Рассмотрим теперь уравнения, содержащие функционал Υ . Из (35) следует, что можно положить $Q_{\mu\nu}^{(1)} = P_{\mu\nu}^{(1)}$, тогда как уравнение (33) устанавливает определенные соотношения между полиномами $\tilde{P}^{(1)}$, $\tilde{Q}^{(1)}$, $P^{(1)}$ и $M^{(1)}$, а именно: подставляя решение (36) в уравнение (33) и выделяя члены, зависящие только от поля h , получаем

$$\hat{\xi} \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)} + \frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}} \hat{\xi} \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}} P_{\mu\nu}^{(1)} = 0, \quad (40)$$

откуда следует, что между $\tilde{P}^{(1)}$ и $P^{(1)}$ существует следующее соотношение:

$$P_{\mu\nu}^{(1)} - \hat{\xi} \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)} = a^{(1)}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \quad (41)$$

где $a^{(1)}$ — некоторая расходящаяся постоянная (первого порядка). Таким образом, зависимость $\Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}$ от калибровки определяется уравнением

$$\hat{\xi} \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)} = a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}}. \quad (42)$$

Далее, выделяя в уравнении (33) члены, содержащие источник K и поле C , и подставляя найденное решение (41), получаем уравнение

$$K^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha (M_\alpha^{(1)\tau} C_\tau) - \hat{\xi} K^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha (\tilde{Q}_\alpha^{(1)\tau} C_\tau) = 0, \quad (43)$$

откуда следует, что

$$M_\alpha^{(1)\tau} = \hat{\xi} \tilde{Q}_\alpha^{(1)\tau}. \quad (44)$$

Оставшиеся члены уравнения (33) при подстановке решений (41) и (44) тождественно обращаются в нуль.

Таким образом, требование калибровочной инвариантности совместно с подсчетом степеней определяет калибровочно-зависимую часть инвариантных расходимостей эффективного действия с точностью до числового коэффициента $a^{(1)}$ (см. (42)). Не фиксируемый этими требованиями, этот коэффициент, как будет показано ниже, ответствен за появление нетривиальной калибровочной зависимости двухпетлевых расходимостей.

2.5. Второй порядок.

2.5.1. *Общая структура уравнений перенормировки второго порядка.* Прежде чем переходить к выводу тождеств Славнова во втором порядке, определим их общую структуру без учета достроения действия $\Sigma - \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}$ до $\Sigma_{[1]}$. В этом случае расходимости второго порядка $\Gamma_{[1]}^{\text{div}(2)}$ (укороченного) производящего функционала вершин $\Gamma'_{[1]}$, построенного исходя из действия $\tilde{\Sigma}' \equiv \tilde{\Sigma} - \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}$, удовлетворяют уравнению

$$\hat{g}\Gamma_{[1]}^{\text{div}(2)} = \frac{1}{2}(\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}, \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}). \quad (45)$$

Действительно, действие $\Sigma' \equiv \Sigma - \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$(\Sigma', \Sigma') = (\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}, \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}).$$

Этому же уравнению, очевидно, удовлетворяет и функционал $\Gamma'_{[1]}$:

$$(\Gamma'_{[1]}, \Gamma'_{[1]}) = (\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}, \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}). \quad (46)$$

Выделяя в (46) расходимости второго порядка, мы приходим к (45).

Запишем теперь уравнение, которым определяется ξ -зависимость величины $\Gamma_{[1]}^{\text{div}(2)}$:

$$\hat{\xi}\Gamma_{[1]}^{\text{div}(2)} - \hat{g}\Upsilon_{[1]}^{\text{div}(2)} = \Xi'^{(2)} \quad (47)$$

с некоторым локальным функционалом $\Xi'^{(2)}$. В уравнении (47) функционал $\Upsilon_{[1]}^{\text{div}(2)}$ тот же, что и в тождестве (1), поскольку часть производящего функционала вершин, включающая фактор Y , по определению не подлежит достроению.

Структура функционала $\Xi'^{(2)}$ может быть определена следующим образом. Действуя на обе части уравнения (47) оператором $\hat{g}$ и учитывая соотношения (45) и (33), получаем

$$(\hat{g}\Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)}, \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}) = \hat{g}\Xi'^{(2)}. \quad (48)$$

Левая часть уравнения (48) может быть преобразована с помощью тождества Якоби для антискобки Баталина–Вилкововского

$$(\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}, (\Sigma, \Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)})) - (\Sigma, (\Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)}, \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)})) + (\Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)}, (\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}, \Sigma)) = 0.$$

Учитывая определение оператора $\hat{g}$, из уравнений (32) и (48) получаем

$$\hat{g}\{(\Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)}, \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}) - \Xi'^{(2)}\} = 0.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\Xi'^{(2)} = (\Upsilon_{[0]}^{\text{div}(1)}, \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}) + \alpha + \hat{g}\beta, \quad (49)$$

где α – калибровочно-инвариантный функционал полей h , а β – некоторый функционал всех полей и источников БРСТ-преобразований.

Два уравнения (45) и (47) с учетом (49) можно переписать в виде одного:

$$(\hat{g} + Y\hat{\xi})\tilde{\Gamma}_{[1]}^{\text{div}(2)} = \frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}_{[0]}^{\text{div}(1)}, \tilde{\Gamma}_{[0]}^{\text{div}(1)}) + \alpha + \hat{g}\beta. \quad (50)$$

Перейдем теперь к определению величин α и β .

2.5.2. Вывод тождеств Славнова второго порядка. Вывод уравнения перенормировки во втором порядке оказывается достаточно громоздким, поэтому удобно разбить его на два этапа: сначала получить тождества Славнова без учета достроения действия членами второго порядка, попутно проверив вычисления сравнением с результатом (49), и затем учесть достроение.

Для получения упомянутых тождеств мы совершаем в перенормированном производящем функционале

$$Z'_{[1]}[T^{\mu\nu}, \bar{\beta}^\sigma, \beta_\tau, K^{\mu\nu}, L^\sigma] = \int dh_{\mu\nu} dC_\sigma d\bar{C}^\tau \exp\{i(\tilde{\Sigma} - \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)} - YK^{\mu\nu}P_{\mu\nu}^{(1)} - Y\bar{C}^\tau F_\tau^{\mu\nu}P_{\mu\nu}^{(1)} - YL^\sigma C_\tau M_{\sigma\tau}^{(1)} + \bar{\beta}^\sigma C_\sigma + \bar{C}^\tau \beta_\tau + T^{\mu\nu}h_{\mu\nu})\} \quad (51)$$

перенормированное в первом порядке (но не достроенное) БРСТ-преобразование переменных интегрирования континуального интеграла. Поскольку соответствующий результат для не зависящей от Y части искомых уравнений заранее известен – он дается соотношением (45), то действие $\tilde{\Sigma} - \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}$ при этом можно формально считать строго инвариантным относительно такой замены и в конце к результату вычислений добавить правую часть уравнения (45). Чтобы отметить факт временного отсутствия в уравнениях соответствующего члена, мы ниже вместо знака “=” ставим “ $\approx$ ”. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} & \int dh_{\mu\nu} dC_\sigma d\bar{C}^\tau \left[\left\{ T^{\mu\nu} + Y \left(\bar{C}^\sigma F_\sigma^{\mu\nu} - (K^{\alpha\beta} + \bar{C}^\sigma F_\sigma^{\alpha\beta}) \frac{\delta P_{\alpha\beta}^{(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} - L^\sigma C_\tau \frac{\delta M_\sigma^{(1)\tau}}{\delta h_{\mu\nu}} \right) \right\} \times \right. \\ & \times \left\{ \frac{\delta}{\delta K^{\mu\nu}} - iY P_{\mu\nu}^{(1)} \right\} + \left\{ -\beta_\sigma + Y F_\sigma - Y F_\sigma^{\mu\nu} P_{\mu\nu}^{(1)} \right\} \left\{ -\frac{i}{\xi} \square F^\sigma \right\} + \\ & \left. + \left\{ \bar{\beta}^\sigma - Y L^\tau M_\tau^{(1)\sigma} \right\} \left\{ -\frac{\delta}{\delta L^\sigma} - iY M_\sigma^{(1)\tau} C_\tau \right\} \right] \exp\{\dots\} \approx 0 \quad (52) \end{aligned}$$

(для сокращения записи здесь и далее многоточием под знаком экспоненты мы обозначаем показатель экспоненты из формулы (51)).

Далее в подынтегральном выражении (52) сделаем подстановку

$$-\frac{iY}{\xi} F_\sigma \square F^\sigma \rightarrow -2Y\xi \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\partial \xi} \right) \quad (53)$$

и используем для $\hat{\xi} \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}$ уравнение (33). В последнее входят члены с вариационными производными по полям h и C , которые мы преобразуем, используя квантовые уравне-

ния движения этих полей, полученные с помощью функционала (51):

$$\begin{aligned} \int dh_{\mu\nu} dC_\sigma d\bar{C}^\tau \exp\{\dots\} & \left[\frac{\delta\Sigma}{\delta h_{\mu\nu}} - \frac{1}{\xi} F^\alpha{}_\square F_\alpha^{\mu\nu} - \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + T^{\mu\nu} + \right. \\ & \left. + Y \left(\bar{C}^\sigma F_\sigma^{\mu\nu} - (K^{\alpha\beta} + \bar{C}^\sigma F_\sigma^{\alpha\beta}) \frac{\delta P_{\alpha\beta}^{(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} - L^\sigma C_\tau \frac{\delta M_\sigma^{(1)\tau}}{\delta h_{\mu\nu}} \right) \right] = 0, \\ \int dh_{\mu\nu} dC_\sigma d\bar{C}^\tau \exp\{\dots\} & \left[(K^{\mu\nu} + \bar{C}^\tau F_\tau^{\mu\nu}) D_{\mu\nu}^\sigma + L^\tau \partial^\sigma C_\tau - \right. \\ & \left. - L^\sigma C_\tau \partial^\tau + \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta C_\sigma} - Y L^\tau M_\tau^{(1)\sigma} + \bar{\beta}^\sigma \right] = 0. \end{aligned}$$

Наконец, член $Y \bar{C}^\sigma F_\sigma^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\tau C_\tau$ мы преобразуем с помощью квантовых уравнений движения поля $\bar{C}$:

$$\begin{aligned} \int dh_{\mu\nu} dC_\sigma d\bar{C}^\tau & \left[F_\sigma^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\tau C_\tau - F_\sigma^{\mu\nu} \frac{\delta D_{\mu\nu}^\tau}{\delta h_{\alpha\beta}} \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)} C_\tau + F_\sigma^{\rho\tau} \frac{\delta \tilde{P}_{\rho\tau}^{(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} D_{\mu\nu}^\varepsilon C_\varepsilon + \right. \\ & \left. + F_\sigma^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\tau (\tilde{Q}_\tau^{(1)\varepsilon} C_\varepsilon) - Y F_\sigma + Y F_\sigma^{\mu\nu} P_{\mu\nu}^{(1)} + \beta_\sigma \right] \exp\{\dots\} = 0. \end{aligned}$$

В результате приходим к следующему тождеству:

$$\begin{aligned} \int dh_{\mu\nu} dC_\sigma d\bar{C}^\tau \exp\{\dots\} & \left[T^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta K^{\mu\nu}} - \bar{\beta}^\sigma \frac{\delta}{\delta L^\sigma} - iY \bar{C}^\sigma \beta_\sigma - \right. \\ & - iY \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} P_{\mu\nu}^{(1)} - iY \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta C_\tau} M_\tau^{(1)\sigma} C_\sigma - L^\tau M_\tau^{(1)\sigma} \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta L^\sigma} + \\ & \left. + iY \left((K^{\alpha\beta} + \bar{C}^\sigma F_\sigma^{\alpha\beta}) \frac{\delta P_{\alpha\beta}^{(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + L^\sigma C_\tau \frac{\delta M_\sigma^{(1)\tau}}{\delta h_{\mu\nu}} \right) \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta K^{\mu\nu}} \right] \approx 0. \quad (54) \end{aligned}$$

Члены во второй и третьей строках формулы (54) – второго порядка, поэтому их усреднение тривиально (оно соответствует древесному приближению). Преобразуя оставшиеся члены так же, как и при выводе тождеств Славнова в первом порядке, мы приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\check{\Gamma}'_{[1]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta\check{\Gamma}'_{[1]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta\check{\Gamma}'_{[1]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta\check{\Gamma}'_{[1]}}{\delta L^\sigma} + 2Y\xi \frac{\partial\check{\Gamma}'_{[1]}}{\partial\xi} + \\ + Y \left\{ \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} P_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta C_\tau} M_\tau^{(1)\sigma} C_\sigma + L^\tau M_\tau^{(1)\sigma} \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta L^\sigma} - \right. \\ \left. - \left((K^{\alpha\beta} + \bar{C}^\sigma F_\sigma^{\alpha\beta}) \frac{\delta P_{\alpha\beta}^{(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + L^\sigma C_\tau \frac{\delta M_\sigma^{(1)\tau}}{\delta h_{\mu\nu}} \right) \frac{\delta\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta K^{\mu\nu}} \right\} \approx 0, \quad (55) \end{aligned}$$

где $\check{\Gamma}'_{[1]}$ – укороченный (аналогично определению (24)) производящий функционал вершин, конечный в однопетлевом приближении. Окончательно, заменяя знак “ $\approx$ ” на “ $=$ ”, последнее уравнение можно переписать в компактном виде:

$$\frac{\delta \check{\Gamma}'_{[1]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta \check{\Gamma}'_{[1]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta \check{\Gamma}'_{[1]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta \check{\Gamma}'_{[1]}}{\delta L^\sigma} + 2Y\xi \frac{\partial \check{\Gamma}'_{[1]}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} (\check{\Gamma}_{[0]}^{\text{div}(1)}, \check{\Gamma}_{[0]}^{\text{div}(1)}). \quad (56)$$

Из (56) легко следует, что уравнение перенормировки для расходящихся частей недостроенного производящего функционала вершин $\check{\Gamma}_{[1]}$ действительно имеет структуру (50), причем $\alpha = \beta = 0$.

2.5.3. Вычисление вклада достроения. Для вывода уравнения перенормировки для расходимостей второго порядка функционала $\check{\Gamma}_{[1]}$ соответствующие члены в достроении $\Sigma - \Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}$ до $\Sigma_{[1]}$ также требуется определить в этом же порядке. Из определений (37), (39) легко получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\mu\nu}^*(h^r) &= \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}(h^r) + \frac{\delta \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}(h^r)}{\delta h_{\alpha\beta}^r} \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)}(h^r), \\ \frac{\delta \tilde{P}_{\mu\nu}^*(h^r)}{\delta h_{\rho\sigma}^r}(h^r(h)) &= \frac{\delta \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}(h)}{\delta h_{\rho\sigma}} + \frac{\delta \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}(h)}{\delta h_{\alpha\beta}} \frac{\delta \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)}(h)}{\delta h_{\rho\sigma}}, \\ \tilde{Q}_{\sigma\tau}^{*\tau}(h^r) &= \tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau}(h^r) - \tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\rho}(h^r) \tilde{Q}_{\rho}^{(1)\tau}(h^r) + \frac{\delta \tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau}(h^r)}{\delta h_{\mu\nu}^r} \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}(h^r), \\ \frac{\delta \tilde{Q}_{\sigma\tau}^{*\tau}(h^r)}{\delta h_{\mu\nu}^r}(h^r(h)) &= \frac{\delta \tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau}(h)}{\delta h_{\mu\nu}} - \frac{\delta (\tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\rho}(h) \tilde{Q}_{\rho}^{(1)\tau}(h))}{\delta h_{\mu\nu}} + \frac{\delta \tilde{Q}_{\sigma}^{(1)\tau}(h)}{\delta h_{\alpha\beta}} \frac{\delta \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)}(h)}{\delta h_{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Подставляя (57) в (38) и сохраняя лишь члены второго порядка, имеем для искомого достроения

$$\begin{aligned} \Delta \Sigma_{[1]} &= \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_0}{\delta h_{\mu\nu} \delta h_{\alpha\beta}} \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)} \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{\delta \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)} + (K^{\mu\nu} + \overline{C}^\gamma F_\gamma^{\mu\nu}) \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{\delta \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}}{\delta h_{\rho\tau}} D_{\rho\tau}^\sigma - \frac{\delta D_{\mu\nu}^\sigma}{\delta h_{\alpha\beta}} \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)} \right] (\tilde{Q}_\sigma^{(1)\varepsilon} C_\varepsilon) + \right. \\ &+ \left[\frac{\delta \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}}{\delta h_{\alpha\beta}} \frac{\delta \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)}}{\delta h_{\rho\tau}} D_{\rho\tau}^\sigma - \frac{\delta \tilde{P}_{\mu\nu}^{(1)}}{\delta h_{\rho\tau}} \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)} \frac{\delta D_{\rho\tau}^\sigma}{\delta h_{\alpha\beta}} \right] C_\sigma \Big\} + \\ &+ L^\sigma \left[\frac{\delta \tilde{Q}_\sigma^{(1)\tau}}{\delta h_{\mu\nu}} \left(\tilde{Q}_\tau^{(1)\rho} C_\rho D_{\mu\nu}^\lambda C_\lambda + C_\tau D_{\mu\nu}^\lambda (\tilde{Q}_\lambda^{(1)\rho} C_\rho) - C_\tau \frac{\delta D_{\mu\nu}^\lambda}{\delta h_{\alpha\beta}} \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)} C_\lambda \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\delta \tilde{Q}_\sigma^{(1)\tau}}{\delta h_{\alpha\beta}} \frac{\delta \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} - \frac{\delta (\tilde{Q}_\sigma^{(1)\rho} \tilde{Q}_\rho^{(1)\tau})}{\delta h_{\mu\nu}} \right) C_\tau D_{\mu\nu}^\lambda C_\lambda \right] + L^\sigma \partial^\tau (\tilde{Q}_\sigma^{(1)\beta} C_\beta) \tilde{Q}_\tau^{(1)\alpha} C_\alpha - \\ &- L^\sigma [\tilde{Q}_\sigma^{(1)\tau} (\partial^\lambda (\tilde{Q}_\tau^{(1)\rho} C_\rho) C_\lambda + \partial^\lambda C_\tau \tilde{Q}_\lambda^{(1)\rho} C_\rho) - \tilde{Q}_\sigma^{(1)\rho} \tilde{Q}_\rho^{(1)\tau} \partial^\lambda C_\tau C_\lambda]. \quad (58) \end{aligned}$$

Теперь чтобы получить уравнение перенормировки второго порядка для $\check{\Gamma}_{[1]}^{\text{div}(2)}$, необходимо добавить выражение (58) к эффективному действию в подынтегральном выражении (51). Совершая затем замену переменных континуального интегрирования, соответствующую построенному перенормированному БРСТ-преобразованию, мы получим тождество, аналогичное (55), в котором теперь следует заменить знак “ $\approx$ ” на “ $=$ ” и добавить дополнительные члены, связанные с переходом (53)⁶. Применяя поэтому оператор $\hat{\xi}$ к выражению (58), используя тождества Славнова первого порядка (41), (44) и прибавляя полученный результат к правой части уравнения (55), получаем для $\check{\Gamma}_{[1]}$ следующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \check{\Gamma}_{[1]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta \check{\Gamma}_{[1]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta \check{\Gamma}_{[1]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta \check{\Gamma}_{[1]}}{\delta L^\sigma} + 2Y\xi \frac{\delta \check{\Gamma}_{[1]}}{\partial \xi} = Y \left\{ -a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}} \Pi_{\mu\nu}^{(2)} + \right. \\ + \tilde{K}^{\alpha\beta} \frac{\delta D_{\alpha\beta}^\sigma}{\delta h_{\mu\nu}} C_\sigma \Pi_{\mu\nu}^{(2)} - \tilde{K}^{\alpha\beta} \frac{\delta \Pi_{\alpha\beta}^{(2)}}{\delta h_{\mu\nu}} D_{\mu\nu}^\sigma C_\sigma - \\ - \tilde{K}^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\sigma (\Lambda_\sigma^{(2)\tau} C_\tau) - L^\sigma \frac{\delta \Lambda_\sigma^{(2)\tau}}{\delta h_{\mu\nu}} C_\tau D_{\mu\nu}^\lambda C_\lambda - \\ \left. - L^\sigma \partial^\lambda C_\sigma \Lambda_\lambda^{(2)\tau} C_\tau - L^\sigma \partial^\lambda (\Lambda_\sigma^{(2)\tau} C_\tau) C_\lambda + L^\sigma \Lambda_\sigma^{(2)\tau} \partial^\lambda C_\tau C_\lambda \right\}, \end{aligned} \quad (59)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^{(2)} &\equiv a^{(1)} \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{\delta \tilde{P}_{\alpha\beta}^{(1)}}{\delta h_{\gamma\delta}} P_{\gamma\delta}^{(1)}, \quad \Lambda_\sigma^{(2)\tau} \equiv \tilde{Q}_\sigma^{(1)\varepsilon} M_\varepsilon^{(1)\tau} - \frac{\delta \tilde{Q}_\sigma^{(1)\tau}}{\delta h_{\alpha\beta}} P_{\alpha\beta}^{(1)}, \\ \tilde{K}^{\mu\nu} &\equiv K^{\mu\nu} + \overline{C}^\sigma F_\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Правая часть (59) может быть переписана компактно как

$$Y \left\{ -a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + \hat{g}(\tilde{K}^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}^{(2)} + L^\sigma \Lambda_\sigma^{(2)\tau} C_\tau) \right\}.$$

Далее, разбивая $\check{\Gamma}_{[1]}$, как в п. 2.4,

$$\check{\Gamma}_{[1]} = \Gamma_{[1]} + Y\Upsilon_{[1]}, \quad (60)$$

получаем обычное тождество Славнова для $\Gamma_{[1]}$

$$\frac{\delta \Gamma_{[1]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta \Gamma_{[1]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta \Gamma_{[1]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta \Gamma_{[1]}}{\delta L^\sigma} = 0 \quad (61)$$

⁶) Соответствующие члены второго порядка должны быть учтены также при преобразовании члена нулевого порядка $Y \overline{C}^\sigma F_\sigma^{\mu\nu} \delta / \delta K^{\mu\nu}$. Однако в силу того что поле $\overline{C}$ входит в эффективное действие Σ и в расходящиеся части $\Gamma_{[0]}^{\text{div}(1)}$ только в комбинации $K^{\mu\nu} + \overline{C}^\sigma F_\sigma^{\mu\nu}$ и построение не меняет этого факта, преобразование упомянутого члена с помощью квантовых уравнений движения поля $\overline{C}$ сводится просто к замене его членом $-iY \overline{C}^\tau \beta_\tau$.

и содержащее $\Upsilon_{[1]}$ уравнение

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta\Gamma_{[1]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta\Upsilon_{[1]}}{\delta K^{\mu\nu}} + \frac{\delta\Upsilon_{[1]}}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma_{[1]}}{\delta K^{\mu\nu}} - \frac{\delta\Gamma_{[1]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta\Upsilon_{[1]}}{\delta L^\sigma} - \frac{\delta\Upsilon_{[1]}}{\delta C_\sigma} \frac{\delta\Gamma_{[1]}}{\delta L^\sigma} + 2\xi \frac{\partial\Gamma_{[1]}}{\partial\xi} = \\ & = -a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta\Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + \hat{g}(\tilde{K}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{(2)} + L^\sigma \Lambda_\sigma^{(2)\tau} C_\tau). \end{aligned} \quad (62)$$

Тождества (61), (62) дают во втором порядке соответственно

$$\hat{g}\Gamma_{[1]}^{\text{div}(2)} = 0, \quad (63)$$

$$\hat{\xi}\Gamma_{[1]}^{\text{div}(2)} - \hat{g}\Upsilon_{[1]}^{\text{div}(2)} = -a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta\Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + \hat{g}(\tilde{K}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{(2)} + L^\sigma \Lambda_\sigma^{(2)\tau} C_\tau). \quad (64)$$

Мы видим, таким образом, что уравнение, определяющее ξ -зависимость расходящихся частей функционала $\Gamma_{[1]}$, действительно имеет структуру (6), где

$$\omega^{(2)} = -a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta\Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}}, \quad \theta^{(2)} = \tilde{K}^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}^{(2)} + L^\sigma \Lambda_\sigma^{(2)\tau} C_\tau.$$

2.5.4. Решение уравнений перенормировки второго порядка. Как и при решении тождеств Славнова в первом порядке, уравнение (63) и соответствующее уравнение движения антидухового поля дают для структуры расходимости $\Gamma_{[1]}^{\text{div}(2)}$ выражение (36) с переобозначением $\Omega_{[0]}^{\text{div}(1)} \rightarrow \Omega_{[1]}^{\text{div}(2)}$, $\tilde{P}^{(1)} \rightarrow \tilde{P}^{(2)}$, $\tilde{Q}^{(1)} \rightarrow \tilde{Q}^{(2)}$. Далее, выделяя в уравнении (64) члены, зависящие только от $h_{\mu\nu}$, получаем

$$\hat{\xi}\Omega_{[1]}^{\text{div}(2)} + \frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}} \hat{\xi}\tilde{P}_{\mu\nu}^{(2)} = -a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta\Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}} (P_{\mu\nu}^{(2)} + \Pi_{\mu\nu}^{(2)}),$$

откуда следует, как и в п. 2.4.2, что

$$P_{\mu\nu}^{(2)} + \Pi_{\mu\nu}^{(2)} - \hat{\xi}\tilde{P}_{\mu\nu}^{(2)} = a^{(2)}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \quad (65)$$

где $a^{(2)}$ – некоторая расходящаяся постоянная второго порядка. Для калибровочно-инвариантных расходимостей $\Omega_{[1]}^{\text{div}(2)}$ мы имеем, таким образом, следующее уравнение:

$$\hat{\xi}\Omega_{[1]}^{\text{div}(2)} = -a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta\Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}}{\delta h_{\mu\nu}} + a^{(2)} g_{\mu\nu} \frac{\delta S_0}{\delta h_{\mu\nu}}. \quad (66)$$

Выделяя затем члены, содержащие источник K и поле C , и используя уравнение (65), находим

$$K^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha (M_\alpha^{(2)\tau} C_\tau) - \hat{\xi} K^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\alpha (\tilde{Q}_\alpha^{(2)\tau} C_\tau) + K^{\mu\nu} D_{\mu\nu}^\sigma \Lambda_\sigma^{(2)\tau} C_\tau = 0,$$

откуда следует, что

$$M_{\sigma}^{(2)\tau} - \xi \tilde{Q}_{\sigma}^{(2)\tau} + \Lambda_{\sigma}^{(2)\tau} = 0. \quad (67)$$

Оставшиеся уравнения выполняются тождественно при подстановке решений (65) и (67).

Таким образом, общая схема получения уравнений перенормировки для модифицированных функций Грина ясна. Основным ее моментом является вычисление с заданной точностью квантовых средних от классических уравнений движения полей, для чего необходимо использовать уравнения перенормировки, полученные в низших порядках, а также квантовые уравнения движения гравитационного поля и полей духов.

До сих пор мы предполагали определенный выбор параметризации гравитационного поля, а именно динамические переменные выбирались в виде $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$. Если же метрика параметризована произвольно, т.е. $g = f(g^*)$, где f — любая несингулярная функция полей $g_{\mu\nu}^*$, то во всех полученных формулах следует просто заменить $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}^*$, $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}^* = g_{\mu\nu}^* - \eta_{\mu\nu}$.

Теперь мы переходим к явному вычислению расходимостей эффективного действия и прямой проверке полученных уравнений.

3. ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ

3.1. Произвольные параметризации. В метрических теориях гравитации существует естественный произвол в выборе динамических переменных, параметризующих гравитационное поле, а именно любая комбинация метрического тензора (его ко- или контравариантных компонент) и его определителя в произвольной степени (при условии невырожденности соответствующего выражения) имеет линейный по полям и их производным закон калибровочного преобразования. Оказывается, что коэффициенты $a^{(n)}$, определяющие зависимость от калибровки калибровочно-инвариантных расходимостей эффективного действия (см. уравнения (42), (66)), существенно зависят от выбора параметризации.

Ниже для вычисления однопетлевых расходимостей эффективного действия используется метод внешнего поля [20–22]. Соответственно мы должны найти фоновые разложения всех рассматриваемых величин по степеням динамических переменных с точностью до второго порядка. Гравитационный пропагатор при этом, разумеется, существенно зависит от выбора параметризации, что сильно усложняет все вычисления. Однако эта зависимость в значительной мере фиктивна, так как всегда может быть устранена *линейной* заменой переменных континуального интегрирования. Такая замена не перемешивает различные порядки петлевого разложения и, следовательно, не меняет величины искомых расходимостей⁷⁾. Мы покажем ниже, что вычисления в произвольной параметризации сильно упрощаются, если линейную часть разложения метрики выбрать в простейшем виде $h_{\mu\nu}$:

$$\underline{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + ah_{\mu\nu} + bh_{\mu\alpha}h_{\nu}^{\alpha} + ch^2g_{\mu\nu} + dh_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + O(h^3), \quad (68)$$

⁷⁾ Соответствующий якобиан $\exp(\delta(0) \dots) = 1$ в размерной регуляризации.

где a, b, c, d – постоянные, определяемые выбором параметризации; $\underline{g}_{\mu\nu}$ обозначает полное поле метрики; поднимание индексов производится с помощью контравариантных компонент фоновой метрики $g^{\mu\nu}$: $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$; $h \equiv h_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$. Любая параметризация $g_{\mu\nu}^*$, каким-либо образом построенная с помощью тензора $g_{\mu\nu}$ (или $g^{\mu\nu}$) и его определителя $\det g_{\mu\nu}$, имеет фоновое разложение, которое всегда может быть однозначно приведено к виду (68) простой линейной заменой полей $h_{\mu\nu}$.

Чтобы показать преимущества такого выбора разложения метрики, мы замечаем, что в разложение тензора кривизны $R_{\nu\alpha\beta}^{\mu}$ по динамическим переменным фактически дает вклад только линейная часть разложения метрики. Действительно, тензор кривизны имеет следующую структуру:

$$\underline{R} = \partial\underline{\Gamma} - \partial\underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}\underline{\Gamma} - \underline{\Gamma}\underline{\Gamma}. \quad (69)$$

Здесь $\underline{\Gamma}$ и Γ построены из $\underline{g}_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$, соответственно.

Предположим, что мы выбрали систему отсчета таким образом, что $\Gamma = 0$ в некоторой заданной точке пространства-времени. Тогда

$$\underline{R} = \partial\Gamma - \partial\Gamma + \partial(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \partial(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \Gamma_1\Gamma_1 - \Gamma_1\Gamma_1 + O(h^3), \quad (70)$$

где индексы 1 и 2 обозначают части соответствующих степеней по h разложения $\underline{\Gamma}$. Это выражение может быть переписано в явно ковариантном виде⁸⁾

$$\underline{R} = R + \nabla(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \nabla(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \Gamma_1\Gamma_1 - \Gamma_1\Gamma_1 + O(h^3), \quad (71)$$

справедливом, таким образом, в любой системе координат.

В членах лагранжиана (7), линейных по кривизне, полные производные второго порядка могут быть отброшены. В квадратичных членах при вычислении второй вариации действия эти производные домножаются на члены нулевого порядка $R_{\mu\nu}$, R и т.д. Интегрируя по частям, с помощью простого подсчета степеней можно показать, что соответствующие вклады в однопетлевую расходящуюся часть эффективного действия отсутствуют.

Из сказанного следует, что если при вычислении второй вариации действия использовать приведенное разложение метрики (68), зависимость от параметризации появляется только в членах, не содержащих производных от $h_{\mu\nu}$.

При использовании приведенного разложения метрики (68) также отпадает необходимость в формальном обобщении уравнений (42), (66) на произвольные параметризации: поскольку ниже вычисляется лишь фоновый вклад в расходящиеся части эффективного действия, то эти уравнения, очевидно, вообще не меняются, причем под $h_{\mu\nu}$ следует по-прежнему понимать отклонения ковариантных компонент метрики от фона.

⁸⁾Заметим, что $\Gamma_{1,2}$ – тензоры.

3.2. Однопетлевая независимость на массовой оболочке. Ниже для дальнейшего упрощения вычисления однопетлевых расходимостей мы воспользуемся фактом их независимости от калибровки и параметризации на массовой оболочке, т.е. от чисел ξ, a, b, c, d . Независимость от ξ следует непосредственно из уравнения (42).

Чтобы доказать независимость от a, b, c, d , заметим, во-первых, что эти параметры входят во вторую вариацию действия в виде

$$\int \frac{\delta S_{[0]}}{\delta g_{\mu\nu}} [g_{\mu\nu}]_2,$$

где $[g_{\mu\nu}]_2$ обозначает квадратичную по $h_{\mu\nu}$ часть приведенного разложения метрики (68). Во-вторых, вычисляя генераторы калибровочных преобразований динамических переменных и переходя опять к стандартному набору, видим, что эти генераторы в точности совпадают с обычными, соответствующими преобразованиям (ковариантной) метрики, т.е. они независимы от чисел a, b, c, d . Отсюда следует, что и вклад духов⁹ также не зависит от этих параметров.

Таким образом, однопетлевые расходимости действительно не зависят от чисел ξ, a, b, c, d на массовой оболочке.

3.3. Вычисление $\Omega^{\text{div}(1)}$. Начнем с выявления некоторых свойств “существенности” зарядов теории.

Поскольку R^2 -гравитация перенормируема, мы можем записать $\Omega^{\text{div}(1)}$ в общем виде как

$$\Omega^{\text{div}(1)} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} (c_1 R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + c_2 R^2 + c_3 R + c_4 \Lambda + c_5), \quad (72)$$

где $c_i, i = 1, \dots, 5$, — некоторые функции калибровки, параметризации и зарядов α_1, β, k .

Как было показано в п. 3.2, $\Omega^{\text{div}(1)}$ калибровочно- и параметризационно-независим на массовой оболочке. С другой стороны, очевидно, что единственным пригодным для преобразований выражения (72) скаляром, который может быть составлен из уравнений (8), является скаляр

$$\frac{1}{k^2} (R - 4\Lambda) = -2(3\alpha_1 + \beta) \nabla^2 R. \quad (73)$$

Поэтому коэффициенты $c_i, i = 1, 2, 5$, и комбинация $4c_3 + c_4$ в действительности не зависят от ξ, a, b, c, d .

Этот факт можно использовать для того, чтобы упростить вычисление $\Omega^{\text{div}(1)}$ в произвольной калибровке и параметризации, а именно разделить эту задачу на две:

1. Вычисление $\Omega^{\text{div}(1)}$ при каком-либо простом выборе калибровки и параметризации. Мы выбираем минимальную калибровку и параметризуем гравитационное поле с помощью ковариантных компонент метрики: $g_{\mu\nu}^* = g_{\mu\nu}$.

2. Вычисление одного лишь коэффициента c_4 в произвольной калибровке и параметризации. При этом, очевидно, можно рассматривать пространство-время плоским.

⁹ Напомним, что калибровочное условие (9) налагается на стандартный набор $h_{\mu\nu}$.

Выражение для расходимостей в произвольной калибровке и параметризации в искривленном пространстве-времени затем получается простым сравнением существенных параметров теории.

Правильный результат вычисления коэффициентов c_i , $i = 1, \dots, 5$, в случае минимальной калибровки (первый этап нашей программы) впервые был получен в [23]:

$$c_1 = \frac{133}{10}, \quad c_2 = \frac{10\alpha_1^2}{\beta^2} + \frac{10\alpha_1}{6\beta} - \frac{291}{60}, \quad c_3 = -\frac{1}{(3\alpha_1 + \beta)k^2} \left[\frac{30\alpha_1^2}{\beta^2} + \frac{53\alpha_1}{2\beta} + \frac{21}{4} \right],$$

$$c_4 = \frac{1}{(3\alpha_1 + \beta)k^2} \left[\frac{28\alpha_1}{\beta} + 9 \right], \quad c_5 = \frac{3}{(3\alpha_1 + \beta)^2 k^4} \left[\frac{15\alpha_1^2}{2\beta^2} + \frac{5\alpha_1}{\beta} + \frac{7}{8} \right].$$

Вычисление коэффициента c_4 в плоском пространстве представлено в приложении А.

Сравнение этих двух результатов дает окончательно

$$\Omega^{\text{div}(1)} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} (c_1 R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + c_2 R^2 + c_3 R + c_4 \Lambda + c_5), \quad (74)$$

где

$$c_1 = \frac{133}{10}, \quad c_2 = \frac{10}{9}\alpha^2 - \frac{5}{3}\alpha - \frac{773}{180}, \quad c_5 = \frac{1}{\beta^2 k^4} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{8\alpha^2} \right),$$

$$c_4 = -\frac{1}{\beta k^2} \left[u \left(2\delta + \frac{3}{\alpha} \right) + v \left(14\delta + \frac{1}{\alpha} + 20 \right) \right],$$

$$4c_3 + c_4 = \frac{1}{\beta k^2} \left[\frac{1}{3\alpha} + 10 - \frac{40\alpha}{3} \right],$$

$$\alpha \equiv \frac{3\alpha_1}{\beta} + 1, \quad u \equiv a + 4c + \frac{1}{4}, \quad v \equiv b + 4d - \frac{1}{2}, \quad \delta \equiv \xi\beta.$$

Сравнивая выражения (74) и (72), находим выражение для коэффициента $a^{(1)}$:

$$a^{(1)} = -\frac{\xi(u + 7v)}{32\pi^2\varepsilon}. \quad (75)$$

3.4. Вычисление двухпетлевого вклада. Для того чтобы проверить уравнение (66) явно, точнее показать, что калибровочная зависимость двухпетлевого вклада в расходимость эффективного действия порядка $1/\varepsilon^2$ не исчезает на уравнениях движения, мы применяем метод ренормализационной группы. Удобно применить обобщенный вариант этого метода [24], дающий следующее *функциональное* выражение для искомого вклада $\Omega_{1/\varepsilon^2}^{[1]\text{div}(2)}$:

$$-\varepsilon^2 \Omega_{1/\varepsilon^2}^{[1]\text{div}(2)}(L_0) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \varepsilon \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}(L_0 + x\varepsilon \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}(L_0)) \Big|_{x=0}.$$

Для того чтобы применить эту формулу, мы замечаем, что при использовании линейных калибровок член, фиксирующий калибровку, не перенормируется (см., например, [18, 12]), поэтому мы переписываем тождественно

$$L_0 + x\varepsilon \Omega_{[0]}^{\text{div}(1)}(L_0) \equiv \sqrt{-g} \left\{ (\alpha_1 + xc_2) R^2 + (\beta + xc_1) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\left(\frac{1}{k^2} - xc_3\right)^{-1}} \left(R - 2 \left[\left(\frac{1}{k^2} - xc_3\right)^{-1} \left(\frac{\Lambda}{k^2} + \frac{xc_4\Lambda + xc_5}{2} \right) \right] \right) \right\},$$

применяем однопетлевой результат (74), дифференцируем его по x и полагаем $x = 0$. Результат этого вычисления приведен в приложении Б.

Теперь мы готовы проверить тождество (66). Из (76) (см. ниже) следует, что на массовой оболочке левая часть (66) может быть записана в виде

$$2\xi \frac{\partial \Omega_{1/\varepsilon^2}^{[1]\text{div}(2)}}{\partial \xi} = \frac{1}{(32\pi^2\varepsilon)^2} \int d^4x \sqrt{-g} (A\Lambda + B),$$

$$A = \frac{-1}{\beta^2 k^2} \left\{ 2\delta^2 w^2 + \delta w \left(-20v\alpha^{-1} + 20v + 3w\alpha^{-1} + \frac{40}{3}\alpha - \frac{1}{3}\alpha^{-1} - 10 \right) \right\},$$

$$B = \frac{\delta w}{\beta^3 k^4} \left(\frac{1}{4}\alpha^{-2} + 5 \right), \quad w \equiv u + 7v,$$

тогда как с учетом (74) для правой части (66) получается

$$-a^{(1)} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Omega^{\text{div}(1)}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{a^{(1)}}{32\pi^2\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} (\tilde{A}\Lambda + \tilde{B}),$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{\beta k^2} \left\{ 2\delta w - 20v\alpha^{-1} + 20v + 3w\alpha^{-1} + \frac{40}{3}\alpha - \frac{1}{3}\alpha^{-1} - 10 \right\},$$

$$\tilde{B} = -\frac{1}{\beta^2 k^4} \left\{ \frac{1}{4}\alpha^{-2} + 5 \right\}.$$

В этих выражениях коэффициент $a^{(1)}$ определен в (75). Мы видим, таким образом, что тождество (66) действительно справедливо на массовой оболочке. Далее, подставляя (74) и (76) в уравнение (66) вне массовой оболочки, нетрудно убедиться в том, что коэффициент $a^{(2)}$ не содержит полюса второго порядка по ε .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что в общем случае расходящиеся части эффективного действия R^2 -гравитации нетривиально зависят от калибровки – эта зависимость не исчезает для полей, удовлетворяющих классическим уравнениям движения гравитационного поля, в отличие от результатов, полученных в работе [12]. Явные вычисления расходимостей первого и второго порядка, выполненные в настоящей работе, демонстрируют, что появление указанной зависимости от калибровки тесно связано с выбором параметризации гравитационного поля. В частности, можно указать такой класс параметризаций, в котором зависимость от калибровки полностью исчезает [25, 26]. Отметим здесь, что анализ зависимости теории от выбора параметризации может быть полезен при определении “истинных” β -функций теории [27].

Построенная в работе процедура перенормировки функций Грина при наличии нового антикоммутирующего источника Y оказывается существенно отличной от обычной. Уравнения перенормировки, соответствующие модифицированному производящему функционалу вершин, не могут быть получены простым выделением расходящихся членов в тождествах Славнова. Последовательная процедура включает учет, во-первых, контрчленных структур, связанных с введением нового источника, и, во-вторых,

возможной явной зависимости от калибровки контрчленов, вводимых при перенормировке обычных функций Грина. Последнее сводится к вычислению квантовых средних от классических уравнений движения гравитационного поля и полей духов. При этом для того чтобы получить уравнения перенормировки n -го порядка для расходимостей функций Грина, перенормированных до $(n - 1)$ -го порядка включительно, необходимо использовать уравнения перенормировки, полученные на предыдущих шагах от 1-го до $(n - 1)$ -го.

Мы также хотели бы подчеркнуть, что найденная нетривиальная зависимость от калибровки появляется лишь в членах, не содержащих четвертые производные. Перенормировка квадратичных по кривизне членов вообще не зависит от наличия эйнштейновского и космологического членов и является калибровочно-независимой не только на, но и вне массовой оболочки.

Благодарности. Авторы считают приятным долгом поблагодарить сотрудников кафедры теоретической физики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за многочисленные дискуссии, участников семинара отдела квантовой теории поля МИАН им. В. А. Стеклова за обсуждение результатов работы, а также В. В. Асадова за финансовую поддержку наших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычислим однопетлевые расходимости эффективного действия R^2 -гравитации в плоском пространстве-времени.

В соответствии с алгоритмом, полученным в работе [28], мы должны сначала вычислить часть $\delta^2(S_0 + S_{\text{gf}})$, содержащую четвертые производные:

$$\begin{aligned} \delta^2(S_0 + S_{\text{gf}})|_4 = & \left(\alpha_1 + \frac{\beta}{4}\right) h \square^2 h + \frac{\beta}{4} h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2\xi}\right) A_\nu \square A^\nu - \\ & - 2 \left(\alpha_1 + \frac{\beta}{4}\right) (\nabla A) \square h + \left(\alpha_1 + \frac{\beta}{2}\right) (\nabla A)^2, \quad A_\nu \equiv \nabla^\mu h_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Затем, подставляя $\nabla_\mu \rightarrow n_\mu$, где n_μ — единичный вектор, вычисляем “пропагатор” $(Kn^{-1})^{\alpha\beta, \gamma\delta}$, обратный оператору $(Kn)_{\mu\nu, \alpha\beta} = \delta^2(S_0 + S_{\text{gf}})/\delta h_{\mu\nu} \delta h_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} (Kn)_{\mu\nu, \alpha\beta} (Kn^{-1})^{\alpha\beta, \gamma\delta} &= \delta_{\mu\nu}^{\gamma\delta}, \\ (Kn^{-1})^{\alpha\beta, \gamma\delta} = & \frac{1}{2} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) + A_1 g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + \\ & + B_1 (g^{\alpha\gamma} n^\beta n^\delta + g^{\alpha\delta} n^\beta n^\gamma + g^{\beta\gamma} n^\alpha n^\delta + g^{\beta\delta} n^\alpha n^\gamma) + \\ & + C_1 (g^{\alpha\beta} n^\gamma n^\delta + g^{\gamma\delta} n^\alpha n^\beta) + D_1 n^\alpha n^\beta n^\gamma n^\delta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{A + 4AB + AD - C^2}{Z}, & B_1 &= -\frac{B}{1 + 2B}, \\ C_1 &= \frac{4AB + AD - C - C^2}{Z}, \\ D_1 &= -\frac{16AB + 4AD + D + 4B - 4C^2}{Z} + 4\frac{B}{1 + 2B}, \\ Z &= 1 + 4A + 4B + 2C + D + 3(4AB + AD - C^2), \end{aligned}$$

причем коэффициенты A, B, C, D определяются из лагранжиана $L_0 + L_{\text{gf}}$:

$$A = 1 + \frac{4\alpha_1}{\beta}, \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta\xi} - 1 \right), \quad C = -1 - \frac{4\alpha_1}{\beta}, \quad D = 2 + \frac{4\alpha_1}{\beta}.$$

Здесь для удобства мы умножили исходный лагранжиан на $4/\beta$.

Далее мы вычисляем часть $\delta^2(S_0 + S_{\text{gf}})$, содержащую вторые производные (опять заменяя $\nabla_\mu \rightarrow n_\mu$),

$$\begin{aligned} (Wn)_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv \delta^2(S_0 + S_{\text{gf}})|_2 &= \frac{1}{k^2\beta} \{ g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - (g_{\mu\nu}n_\alpha n_\beta + g_{\alpha\beta}n_\mu n_\nu) - \\ &\quad - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + (g_{\mu\beta}n_\nu n_\alpha + g_{\nu\alpha}n_\mu n_\beta) \} \end{aligned}$$

и часть $\delta^2(S_0 + S_{\text{gf}})$ без производных

$$M_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv \delta^2(S_0 + S_{\text{gf}})|_0 = \frac{4\Lambda u}{\beta k^2} g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \frac{4\Lambda v}{\beta k^2} g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta},$$

где $u \equiv a + 4c + 1/4$, $v \equiv b + 4d - 1/2$.

Однопетлевая расходящаяся часть эффективного действия имеет вид¹⁰⁾

$$\Omega^{\text{div}(1)} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon} \text{tr} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} (Kn^{-1})(Wn)(Kn^{-1})(Wn) - (Kn^{-1})(M) \right),$$

где подразумевается матричное умножение $(Kn^{-1})_{\mu\nu,\alpha\beta}$, $(Wn)_{\mu\nu,\alpha\beta}$, $M_{\mu\nu,\alpha\beta}$.

Простое вычисление дает

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{flat}}^{\text{div}(1)} &= \frac{1}{32\pi^2\varepsilon} \int d^4x \sqrt{-g} (c_4\Lambda + c_5), \\ c_4 &= -\frac{1}{\beta k^2} \left[u \left(2\delta + \frac{3}{\alpha} \right) + v \left(14\delta + \frac{1}{\alpha} + 20 \right) \right], \\ c_5 &= \frac{1}{\beta^2 k^4} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{8\alpha^2} \right), \quad \delta \equiv \xi\beta. \end{aligned}$$

¹⁰⁾Поскольку пространство-время является плоским, то вклады духов Фаддеева–Попова и “третьего” духа равны нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Здесь приведен результат вычисления двухпетлевого вклада в расходящуюся как $1/\varepsilon^2$ часть эффективного действия.

Следуя алгоритму, описанному в п. 3.4, получаем

$$-\Omega_{1/\varepsilon^2}^{[1]\text{div}(2)} = \frac{1}{2(32\pi^2\varepsilon)^2} \int d^4x \sqrt{-g} (c_{22}R^2 + c_{32}R + c_{42}\Lambda + c_{52}), \quad (76)$$

где

$$\begin{aligned} c_{22} &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{200}{27} \alpha^3 - \frac{416}{9} \alpha^2 + \frac{1697}{54} \alpha - \frac{25}{36} \right), \\ c_{32} &= \frac{1}{\beta^2 k^2} \left\{ \delta^2 \left(-\frac{1}{4} u^2 - \frac{7}{2} uv - \frac{49}{4} v^2 \right) + \delta \left(-\frac{3}{4} u^2 \alpha^{-1} - \frac{11}{2} uv \alpha^{-1} - \right. \right. \\ &\quad \left. - 5uv + \frac{10}{3} u\alpha - \frac{1}{12} u\alpha^{-1} - \frac{5}{2} u - \frac{7}{4} v^2 \alpha^{-1} - 35v^2 + \frac{70}{3} v\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \frac{7}{12} v\alpha^{-1} - \frac{35}{2} v \right) - \frac{9}{16} u^2 \alpha^{-2} - \frac{15}{2} uv \alpha^{-1} - \frac{3}{8} uv \alpha^{-2} - \frac{7}{16} u \alpha^{-2} + \\ &\quad + \frac{5}{2} u - \frac{5}{2} v^2 \alpha^{-1} - \frac{1}{16} v^2 \alpha^{-2} - 25v^2 + \frac{100}{3} v\alpha - \frac{5}{6} v\alpha^{-1} - \frac{7}{48} v\alpha^{-2} - \\ &\quad \left. - \frac{272}{3} v - \frac{200}{9} \alpha^2 + 122\alpha - \frac{1}{24} \alpha^{-2} - \frac{731}{18} \right\}, \\ c_{42} &= \frac{1}{\beta^2 k^2} \left\{ 2\delta^2 (u^2 + 14uv + 49v^2) + \right. \\ &\quad + \delta (6u^2 \alpha^{-1} + 44uv \alpha^{-1} + 40uv + 14v^2 \alpha^{-1} + 280v^2) + \\ &\quad + \frac{9}{2} u^2 \alpha^{-2} + 60uv \alpha^{-1} + 3uv \alpha^{-2} - 15u \alpha^{-1} + \frac{5}{4} u \alpha^{-2} + 10u + \\ &\quad \left. + 20v^2 \alpha^{-1} + \frac{1}{2} v^2 \alpha^{-2} + 200v^2 - 5v \alpha^{-1} + \frac{5}{12} v \alpha^{-2} + \frac{808}{3} v \right\}, \\ c_{52} &= \frac{1}{\beta^3 k^4} \left\{ \delta \left(-\frac{1}{4} u \alpha^{-2} - 5u - \frac{7}{4} v \alpha^{-2} - 35v \right) - \frac{15}{2} u \alpha^{-1} - \frac{3}{8} u \alpha^{-3} - 50v - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2} v \alpha^{-1} - \frac{5}{2} v \alpha^{-2} - \frac{1}{8} v \alpha^{-3} + \frac{50}{3} \alpha - \frac{5}{12} \alpha^{-1} + \frac{5}{8} \alpha^{-2} - \frac{1}{8} \alpha^{-3} - 79 \right\}. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora.* Ann. Phys. 1976. V. 98. P. 287; Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127.
- [2] *И. В. Тютин.* Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторной формулировке. Препринт ФИАН. 1975. № 39.
- [3] *H. Kluberg-Stern, J. B. Zuber.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 467.
- [4] *H. Kluberg-Stern, J. B. Zuber.* Phys. Rev. D. 1975. V. 12. P. 3159.
- [5] *N. K. Nielsen.* Nucl. Phys. B. 1975. V. 101. P. 173.
- [6] *I. Antoniadis, J. Iliopoulos, T. N. Tomaras.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 267. P. 497.
- [7] *I. Antoniadis, E. T. Tomboulis.* Phys. Rev. D. 1986. V. 33. № 10. P. 2756.

- [8] *D. Johnston*. Nucl. Phys. B. 1987. V. 293. P. 229.
- [9] *D. Johnston*. Nucl. Phys. B. 1988. V. 297. P. 721.
- [10] *C. M. Fraser, I. J. R. Aitchison*. Ann. Phys. (N. Y.). 1984. V. 156. P. 1.
- [11] *O. Piguet, K. Sibold*. Nucl. Phys. B. 1985. V. 253. P. 517.
- [12] *K. S. Stelle*. Phys. Rev. D. 1977. V. 16. № 4. P. 953.
- [13] *S. Weinberg*. Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. In: General Relativity. Eds. S. W. Hawking, W. Israel. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979. P. 790.
- [14] *J. Zinn-Justin*. Renormalization of gauge theories. In: Trends in Elementary Particle Physics. Eds. H. Rollnik, K. Dietz. Berlin: Springer-Verlag, 1975. P. 2.
- [15] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky*. Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27.
- [16] *J. A. Dixon, J. C. Taylor*. Renormalization of Wilson operators. 2. Preprint TP-74-74. Oxford: Oxford Univ., 1975.
- [17] *S. Joglekar, B. Lee*. Ann. Phys. 1976. V. 97. № 1. P. 160.
- [18] *И. В. Тютин, Б. Л. Воронов*. ЯФ. 1984. Т. 39. Вып. 4. С. 998.
- [19] *K. A. Kazakov, P. I. Pronin*. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. № 6. P. 064012.
- [20] *B. S. DeWitt*. Phys. Rev. 1967. V. 162. P. 1195.
- [21] *G. 't Hooft*. Nucl. Phys. B. 1973. V. 62. P. 444.
- [22] *G. 't Hooft, M. Veltman*. Ann. Inst. H. Poincare. 1974. V. 20. P. 69.
- [23] *I. G. Avramidy, A. O. Barvinsky*. Phys. Lett. B. 1985. V. 159. P. 269.
- [24] *Д. И. Казаков*. ТМФ. 1988. Т. 75. № 1. С. 157.
- [25] *K. A. Kazakov, P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz*. Gravit. Cosmology. 1998. № 1. P. 17.
- [26] *K. A. Казаков, М. Ю. Калмыков, П. И. Пронин*. Параметризационная и калибровочная зависимость β -функций в теориях гравитации. В сб.: Труды первой открытой конференции молодых ученых и специалистов. Дубна: ОИЯИ, 1997. С. 65.
- [27] *M. Yu. Kalmykov, K. A. Kazakov, P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz*. Class. Q. Grav. 1998. V. 15. P. 3777.
- [28] *P. I. Pronin, K. V. Stepanyantz*. Nucl. Phys. B. 1997. V. 485. P. 517.

Поступила в редакцию 12.IV.1999 г.