Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Радиационные эффекты в $KЭД_{2+1}$ в сильном магнитном поле,
ТМФ, 1999, том 121, номер 3, 412–423

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 09:56:25

© 1999 г.

В. Р. Халилов*

РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В KED_{2+1} В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Развивается метод собственных функций дираковского оператора во внешнем магнитном поле в $(2+1)$ -мерной квантовой электродинамике (KED_{2+1}). В представлении собственных функций найдены точные решения и функция Грина уравнения Дирака в сильном постоянном однородном магнитном поле в $2+1$ измерениях. Получены выражения для эффективного лагранжиана, плотности вакуумных фермионов, индуцированных полем, а также массового оператора электрона во внешнем однородном магнитном поле в однопетлевом приближении KED_{2+1} .

Ряд эффектов в конденсированных средах указывает на существование квантовых систем, которые можно хорошо описать с помощью уравнения Дирака в $2 + 1$ измерениях [1]. Нерелятивистские электроны во внешнем электромагнитном поле, движение которых ограничено в плоскости, интересны в связи с возможностью применения описывающих их теоретико-полевых моделей для изучения таких квантовых макроскопических явлений, как квантовый эффект Холла [2, 3]. Вопросы неустойчивости вакуума в $(2+1)$ -мерной квантовой электродинамике (KED_{2+1}) в сильном кулоновском поле и эффект рождения пар заряженных фермионов из вакуума кулоновским полем протяженного источника в $2+1$ измерениях обсуждались недавно в работах [4]. Значительный интерес могут представить эффекты, возникающие в KED_{2+1} в присутствии постоянного однородного магнитного поля.

В этой работе развивается метод собственных функций дираковского оператора во внешнем магнитном поле в KED_{2+1} . В представлении собственных функций найдены точные решения и функция Грина для уравнения Дирака в сильном постоянном однородном магнитном поле в $2+1$ измерениях. Получены выражения для эффективного лагранжиана, плотности вакуумных фермионов, индуцированных полем, а также массового оператора электрона во внешнем однородном магнитном поле в однопетлевом приближении KED_{2+1} . Обсуждается проблема учета конечной плотности фермионов, важная для задач физики конденсированных сред.

Напомним, что знание массового оператора необходимо для построения точного электронного пропагатора. Существенно, что полюсы точного электронного пропагатора определяют уровни энергии электрона в рассматриваемом внешнем поле с учетом

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: khalilov@thc.phys.msu.su

радиационных эффектов. Матричные элементы массового оператора определяют амплитуду упругого рассеяния электрона, обусловленного его взаимодействием с вакуумом КЭД во внешнем поле, т.е. радиационную поправку к энергии электрона. Часть этой поправки обусловлена взаимодействием магнитного момента электрона с вакуумом КЭД во внешнем поле. Эта часть пропорциональна аномальному магнитному моменту электрона и может быть наблюдаемой величиной, по крайней мере, в принципе.

Представление собственных функций во внешнем однородном электромагнитном поле в (3+1)-мерной КЭД (КЭД₃₊₁) было развито Ритусом [5] и широко использовалось для вычисления так называемых радиационных поправок к движению электрона во внешних однородных электромагнитных полях [5, 6].

В данной статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

Рассмотрим движение заряженного фермиона в 2+1 измерениях во внешнем однородном постоянном магнитном поле напряженности B , вектор-потенциал которого выберем в калибровке Ландау: $A^0 = A^1 = 0$, $A^2 = Bx$. Известно [3], что в 2+1 измерениях алгебра матриц Дирака может быть представлена в терминах матриц Паули как $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^k = i\sigma_k$. Уравнение Дирака для фермиона массы m и заряда e , взаимодействие которого с внешним электромагнитным полем удовлетворяет принципу “минимальности”, запишем в ковариантном виде

$$(\gamma_\mu P^\mu - m)\Psi = 0, \quad (1)$$

где $P^\mu = p^\mu - eA^\mu \equiv (P_0, P_1, P_2)$ – оператор обобщенного импульса фермиона, $p^\mu = (i\partial_t, -i\partial_x, -i\partial_y) \equiv (p_0, p_1, p_2)$.

Квадрированный оператор Дирака имеет вид

$$(\gamma P)^2 = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - e\sigma_3 B, \quad (2)$$

а матричная функция E_p удовлетворяет уравнению [5]

$$(\gamma P)^2 E_p = p^2 E_p, \quad (3)$$

где собственное значение p^2 – любое вещественное число. Очевидно, что для рассматриваемого здесь магнитного поля E_p является также собственной функцией следующих операторов:

$$i\partial_t E_p = p_0 E_p, \quad -i\partial_y E_p = p_2 E_p, \quad (P_1^2 + P_2^2 - e\sigma_3 B) E_p = 2|eB|k E_p. \quad (4)$$

Эти операторы коммутируют с оператором (γP) , а их собственные значения p_0 , p_2 и $2|eB|k$ нумеруют решения уравнения Дирака (1). Операторы (3) и (4) коммутируют с σ_3 , и поэтому их собственные функции также различаются собственными значениями $\sigma = \pm 1$ оператора σ_3 .

Собственные функции $E_{p\sigma}(z)$ имеют вид

$$E_{p\sigma}(z) = \frac{(\pi|eB|)^{1/4}}{(2\pi)^{3/2}(n!)^{1/2}} e^{-ip_0 t + ip_2 y} D_n(\eta) w_\sigma, \quad (5)$$

где w_σ – собственные векторы матрицы σ_3 , $D_n(\eta)$ – функции параболического цилиндра с индексом $n = k + (\sigma/2) \text{sign}(eB) - 1/2$ и аргументом $\eta = \sqrt{2|eB|}(x - p_2/eB)$. Два спинора w_1 и w_{-1} образуют первый и второй столбцы единичной матрицы в пространстве γ -матриц, т.е. $w_\sigma(\alpha) = I_{\alpha\beta}$, если собственным значениям σ сопоставить номер столбца.

Матричные функции $E_p(z)$ ортогональны

$$\int \bar{E}_{p'}(z) E_p(z) d^3z = \delta(p'_0 - p_0) \delta(p'_2 - p_2) \delta_{k'k} \quad (6)$$

и удовлетворяют условию полноты

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int dp_0 dp_2 E_p(z) \bar{E}_p(z') = \delta(z - z'). \quad (7)$$

В формулах (6) и (7) $\bar{E}_p = \gamma^0 E_p^\dagger \gamma^0$, а $E_p^\dagger$ – эрмитово сопряженная матричная функция.

Нетрудно проверить, что выполняется следующее соотношение [5]:

$$(\gamma P) E_p = E_p(\gamma \bar{p}), \quad (8)$$

где “3-вектор” $\bar{p}_\mu$ имеет компоненты $\bar{p}_\mu = (p_0, 0, -\text{sign}(eB) \sqrt{2|eB|k})$, а $p^2 = \bar{p}^2$. Подчеркнем, что вектор $\bar{p}$ зависит только от “динамических” квантовых чисел p_0 и k и не зависит от числа p_2 , которое определяет начало отсчета координаты x .

Из соотношения (8) следует, что решение уравнения Дирака (1) можно получить, подействовав оператором $(\gamma P) + m$ на матрицу E_p , взятую при $p^2 = m^2$:

$$\Psi_p(z) = ((\gamma P) + m) E_p = E_p(\gamma \bar{p} + m). \quad (9)$$

Решение имеет вид

$$\Psi_p(z) = E_p(z) u_{\bar{p}}, \quad (10)$$

где $u_{\bar{p}}$ – спинор, удовлетворяющий свободному уравнению Дирака $(\gamma \bar{p} - m) u_{\bar{p}} = 0$, а матрица E_p взята при $p^2 = m^2$.

Собственные функции $\Psi_p(z)$ гамильтониана уравнения Дирака

$$H_D = \alpha \mathbf{P} + \beta m + eA^0 \equiv \sigma_1 P_2 - \sigma_2 P_1 + \sigma_3 m \quad (11)$$

не являются собственными функциями оператора σ_3 . Отметим, что единственный матричный оператор, коммутирующий с гамильтонианом (11), пропорционален двухрядной единичной матрице. Это создает трудности при описании спиновых состояний фермиона.

Покажем, что оператор $\sigma_3/2$ имеет смысл оператора фермионного числа, появляющегося в суперсимметричной модели квантовой механики. Этот оператор оказывается полезным при анализе найденных решений уравнения Дирака с точки зрения суперсимметричной квантовой механики [7], т.е. “квантовой теории поля” в 0+1 измерении.

В качестве бозонных операторов определим операторы обобщенного импульса фермиона P_1, P_2 . Введем операторы $P_{\pm} = P_1 \pm iP_2$. В качестве фермионных операторов определим операторы

$$\psi_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \frac{\sigma_-}{2}, \quad (12)$$

$$\psi_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \frac{\sigma_+}{2}. \quad (13)$$

Генераторами суперсимметрии являются операторы

$$Q_+ = P_- \psi_+ = Q_1 + iQ_2, \quad Q_- = P_+ \psi_- = Q_1 + iQ_2. \quad (14)$$

Операторы

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2), \quad Q_2 = \frac{1}{2}(\sigma_2 P_1 - \sigma_1 P_2) \quad (15)$$

— это операторы так называемых суперзарядов.

Оператор

$$n_F = \frac{1}{2}[\psi_+, \psi_-] + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}[\sigma_+, \sigma_-] + \frac{1}{2} = \frac{\sigma_3}{2} + \frac{1}{2} \quad (16)$$

называют оператором фермионного числа. Гамильтониан уравнения Дирака записывается как

$$H_D = -2Q_2 + \sigma_3 m = i(Q_+ - Q_-) + (2n_F - 1)m. \quad (17)$$

Отметим, что операторы Q_1, Q_2 и n_F не коммутируют с H_D .

Квадрированный гамильтониан $H = H_D^2 - m^2 \equiv (\gamma P)^2 - P_0^2$ можно записать в виде антикоммутатора, т.е.

$$H = \{Q_+, Q_-\} = Q_+ Q_- + Q_- Q_+ = P_1^2 + P_2^2 - eB\sigma_3 = P_1^2 + P_2^2 - eB(2n_F - 1). \quad (18)$$

Видно, что гамильтониан H коммутирует с операторами n_F (т.к. $Q_+^2 = Q_-^2 = 0$), Q_+ и Q_- . Следовательно, $[H, n_F] = [H, Q_+] = [H, Q_-] = 0$. Операторы Q_+, Q_- и n_F не коммутируют между собой:

$$[Q_+, Q_-] = -2eBf, \quad [Q_{\pm}, f] = \mp Q_{\pm}, \quad (19)$$

здесь $f = n_F - 1/2 \equiv \sigma_3/2$.

Решения, удовлетворяющие квадрированному оператору Дирака, найденные выше, являются собственными функциями операторов H и f (а следовательно, и оператора n_F):

$$\begin{aligned} H \Psi_{p\sigma} &= (|eB|(2k+1) + eB\sigma) \Psi_{p\sigma}, \quad k = 0, 1, \dots, \\ f \Psi_{p\sigma} &= \frac{\sigma}{2} \Psi_{p\sigma}, \quad \sigma = \pm 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Операторы f и n_F соответственно имеют собственные значения $\pm 1/2$ и $1, 0$. Собственные значения оператора фермионного числа равны 1 и 0 в зависимости от того, занято или свободно фермионное состояние в пространстве чисел заполнения; а из (12) и (13)

видно, что занятое состояние в трехмерном пространстве отвечало бы спине, направленному вверх, а свободное состояние — спине, направленному вниз. Оператор f можно назвать оператором “псевдоспина”.

Все уровни энергии, за исключением лишь уровня с $k = 0, \sigma = -1$ (для $\text{sign}(eB) > 0$) и уровня с $k = 0, \sigma = +1$ (для $\text{sign}(eB) < 0$), двукратно вырождены: совпадают уровни с $k, \sigma = +1$ и $k + 1, \sigma = -1$ (для $\text{sign}(eB) > 0$) и уровни с $k, \sigma = -1$ и $k + 1, \sigma = +1$ (для $\text{sign}(eB) < 0$). Отметим, что фермионное число является сохраняющимся квантовым числом только для состояний, описываемых квадратированным гамильтонианом уравнения Дирака. Это означает, что электрический заряд, который можно было бы обнаружить с помощью члена взаимодействия $-eB(2n_F - 1)$ (но не кинетического члена!), имел бы значение $e\sigma/2$ с $\sigma = \pm 1$.

В E_p -представлении фейнмановский пропагатор уравнения Дирака в однородном магнитном поле имеет простой вид [5]

$$S_F(p) = \frac{1}{\gamma p - m + i\delta_e} \equiv \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\delta_e}, \quad (21)$$

где по правилу Фейнмана введен “причинный” фактор $i\delta_e$ (с $\delta_e > 0$), смещающий полюсы $p_0 = \pm E_k \equiv \pm \sqrt{m^2 + 2|eB|k}$ с вещественной оси p_0 .

В координатном представлении функцию Грина можно записать [5] в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} S^c(z, z') &= \int d^3p E_p(z) \frac{1}{\gamma \bar{p} - m} \bar{E}_p(z') = \int d^3p E_p(z) \frac{\gamma \bar{p} + m}{p^2 - m^2} \bar{E}_p(z') = \\ &= (\gamma P + m) \int d^3p E_p(z) \frac{1}{p^2 - m^2} \bar{E}_p(z') = \\ &= -i(\gamma P + m) \int_0^\infty ds e^{-i(m^2 - i\delta_e)s} \int d^3p e^{-ip^2 s} E_p(z) \bar{E}_p(z'), \end{aligned} \quad (22)$$

где введено обозначение

$$\int d^3p \equiv \sum_{k=0}^\infty \int dp_0 dp_2.$$

Отметим, что “причинная” функция Грина представлена только последним выражением из цепочки равенств (22) (в этом случае фиксирован обход полюса).

Фейнмановский пропагатор можно получить в собственном-временном представлении (так называемом представлении Фока–Швингера) [8]. Для этого, используя формулу [9]

$$D_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{z^2/4} \int_0^\infty e^{-t^2/2} t^\nu \cos\left(zt - \frac{\nu\pi}{2}\right) dt, \quad (23)$$

выполним суммирование по k с помощью соотношения [5]

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^\infty \sqrt{\frac{|eB|}{\pi}} D_n(\eta) D_n(\eta') e^{-i2|eB|ks} &= \\ &= \sqrt{\frac{-ieB}{2\pi \sin 2eBs}} \exp\left[-\frac{i(\eta + \eta')^2}{8 \text{ctg } eBs} + \frac{ieB(x - x')^2}{4 \text{tg } eBs} + i\sigma_3 eBs\right] \end{aligned} \quad (24)$$

$(\eta + \eta' = \sqrt{2|eB|}(x + x' - 2p_2/eB))$ и интегрирование по переменным p_2 и p_0 с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp i(-at^2 + 2bt) dt = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{ia}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{ib^2}{a}\right), & a > 0, \\ \left(\frac{i\pi}{|a|}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{ib^2}{|a|}\right), & a < 0. \end{cases} \quad (25)$$

В результате, получим инвариантное выражение

$$\int d^3p e^{-ip^2s} E_p(z) \bar{E}_p(z') = \sqrt{\frac{-ieB}{8s(\pi)^3 \sin 2eBs}} \exp\left[-\frac{i(t-t')^2}{4s} + \frac{ieB((x-x')^2 + (y-y')^2)}{4 \operatorname{tg} eBs} + i\sigma_3 eBs + \frac{ieB(x+x')(y-y')}{2}\right], \quad (26)$$

в котором вся недиагональность по аргументам z, z' и зависимость от калибровки векторного потенциала сосредоточены в последнем члене показателя экспоненты, а вся γ -матричная структура – в члене $\sigma_3 eB$. Подставляя (26) в (22), получим функцию Грина электрона в собственном-временном представлении в следующем ковариантном виде:

$$S^c(z, z') = -\frac{i^{1/2}eB}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1/2} \sin \alpha} \exp\left[-i(m^2 - i\delta_e)s - \frac{i(t-t')^2}{4s} + \frac{i\alpha((x-x')^2 + (y-y')^2)}{4s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{ieB(x+x')(y-y')}{2}\right] \times \\ \times \left[\left(\frac{\gamma^0(t-t')}{2s} + m\right) e^{i\sigma_3 \alpha} - \frac{\alpha[\gamma^1(x-x') + \gamma^2(y-y')]}{2s \sin \alpha}\right], \quad (27)$$

где $\alpha = eBs$.

Зная функцию Грина электрона, можно найти полную амплитуду перехода из вакуумного состояния $|0_{\text{in}}\rangle$ в момент времени $t \rightarrow -\infty$ в вакуумное состояние $\langle 0_{\text{out}}|$ в момент времени $t \rightarrow \infty$:

$$C_v = \langle 0_{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle = \exp(iW(B)), \quad (28)$$

где эффективное действие для рассматриваемого квантованного поля W определяет эффективный лагранжиан как $W = \int d^3x L_{\text{eff}}$. Эффективное действие W определяется причинной функцией Грина S^c как

$$W(B) = i \operatorname{Tr} \ln S^c = i \int d^3x \operatorname{tr}(x | \ln S^c | x). \quad (29)$$

Поскольку собственнo-временные представления операторов S и $\ln S$ отличаются множителем $(is)^{-1}$ в подынтегральных выражениях (по собственному времени s), то из (26) и (22) получим

$$L_{\text{eff}} = \frac{(-i)^{1/2}}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{3/2}} e^{-i(m^2 - \delta_e)s} \left(eB \operatorname{ctg} eBs - \frac{1}{s} \right). \quad (30)$$

Поворачивая контур интегрирования на $-\pi/2$, приходим к следующему (действительному) выражению для эффективного лагранжиана:

$$L_{\text{eff}} = -\frac{m^3 b^{3/2}}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} e^{-x/b} \left(\text{cth } x - \frac{1}{x} \right), \quad (31)$$

где $b = eB/m^2$. Аддитивная постоянная в формулах (30) и (31) выбрана так, что в отсутствие внешнего поля $L_{\text{eff}} = 0$. В пределах $eB \ll m^2$ и $eB \gg m^2$ получим соответственно

$$L_{\text{eff}} = -\frac{(eB)^2}{24\pi m} \left[1 - \frac{(eB)^2}{20m^4} \right] \quad (32)$$

и

$$L_{\text{eff}} \approx \frac{(eB)^2}{12\pi^{3/2} m}. \quad (33)$$

Член, пропорциональный B^2 в формуле (32), интерпретируется как магнитная энергия вакуума [3]. Следует отметить, что в неперенормированный эффективный лагранжиан в КЭД₃₊₁ аналогичный член входит с логарифмически расходящимся множителем, который затем устраняется с помощью процедуры перенормировки электрического заряда электрона.

Другой важной физической величиной, которую определяет причинная функция Грина, является индуцированный (внешним полем) электрический вакуумный ток $-ie \text{tr}(\gamma^\nu S^c(z, z))$. В КЭД₃₊₁ в постоянном однородном электромагнитном поле индуцированный электрический вакуумный ток равен нулю. Это не так в КЭД₂₊₁. Используя (27), нетрудно получить выражение для плотности электрического вакуумного заряда j_e^0 , индуцированного внешним однородным магнитным полем, в виде [10]

$$j_e^0 = -2ie \text{tr}[\gamma^0 S^c(z, z)] = -e \frac{eB}{2\pi} \text{sign } m. \quad (34)$$

E_p -представление оказывается удобным при вычислении массового оператора электрона в однородном магнитном поле. В координатном представлении этот оператор определяется формулой

$$M(z, z') = ie^2 \gamma^\mu S^c(z, z') \gamma^\nu S_{\mu\nu}^{\text{ph}}(z - z') - ie^2 \gamma^\mu S_{\mu\nu}^{\text{ph}}(z - z') \text{tr}(\gamma^\nu S^c(z, z)), \quad (35)$$

где $S_{\mu\nu}^{\text{ph}}(z - z')$ — функция распространения фотона. В КЭД₃₊₁ второй член в правой части формулы (35) в постоянном однородном электромагнитном поле отсутствует вследствие того, что индуцированный электрический вакуумный ток равен нулю.

Замечательная особенность E_p -представления состоит в том, что в нем причинный пропагатор имеет вид (21), а массовый оператор, определяемый формулой

$$M(p, q, F) = \int d^3 z \int d^3 z' \overline{E}_p(z) M(z, z') E_q(z') \equiv \delta^3(p - q) M(p, F), \quad (36)$$

диагонален по квантовым числам p_0, k, p_2 . Преобразование Фурье, в котором используются функции $E_p(z)$ вместо обычных экспонент $\exp(ipz)$, имеет вид

$$\Psi(z) = \int d^3 p E_p(z) \Psi(p). \quad (37)$$

Диагональность массового оператора сводит модифицированное уравнение Дирака к алгебраическому

$$(\gamma_\mu P^\mu - m - M(p, F))\Psi(p) \equiv K(p, F)\Psi(p) = 0. \quad (38)$$

По отношению к преобразованиям Лоренца массовый оператор M должен быть скалярной γ -матричной функцией операторов P_μ и тензора поля $F_{\mu\nu}$. В конкретном случае постоянного однородного магнитного поля $F_{\mu\nu}$ массовый оператор может зависеть только от трех независимых скаляров

$$\gamma_\mu P^\mu \equiv \gamma P, \quad \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv \sigma F, \quad (F_{\mu\nu} P^\nu)^2 \equiv (FP)^2, \quad (39)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$. Действительно, все другие скаляры можно получить из этих трех, например

$$\begin{aligned} \{\gamma P, \sigma F\} &= -\frac{i\epsilon_{\mu\nu\rho} P^\mu F^{\nu\rho}}{m}, & [\gamma P, \sigma F] &= 2\gamma_\mu P_\nu F^{\mu\nu} \equiv 2\gamma FP, \\ [\gamma FP, \sigma F] &= -\gamma_\mu F^{\mu\nu} F_{\rho\nu} P^\rho \equiv -2\gamma FFP, & (\sigma F)^2 &= -2F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv 2F^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Требования релятивистской и калибровочной инвариантностей, а также зарядовой симметрии (в КЭД₂₊₁ оператор зарядового сопряжения $C = -\gamma^2 = -i\sigma_2$) приводят к следующему разложению матрицы $K(p, F)$ в рассматриваемом случае однородного и постоянного магнитного поля:

$$K(p, F) = \gamma^\mu V_\mu + i\sigma_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + mIS. \quad (41)$$

Заметим, что, поскольку трехмерные матрицы Дирака совпадают с тремя матрицами Паули, $\sigma_{\mu\nu}$ сводится к одной из γ -матриц. Здесь

$$V_\mu = \bar{p}_\mu f_1 + \frac{e^2}{m^4} F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} p_\rho f_2 + \frac{e}{m} \epsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} f_4 \quad (42)$$

есть 3-вектор, $T^{\mu\nu} = (eF^{\mu\nu} f_3)/m$ – тензор, а f_1, f_2, f_3, f_4, S – безразмерные скалярные функции трех инвариантных переменных

$$a = \frac{p^2}{m^2}, \quad b = \pm \sqrt{\frac{(eF_{\mu\nu} p^\nu)^2}{m^6}}, \quad c = \frac{e^2}{m^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (43)$$

которые можно образовать из вектора $\bar{p}^\mu$ и тензора $F_{\mu\nu}$. В системе отсчета, в которой отлична от нуля только F^{12} -компонента тензора электромагнитного поля (такую систему отсчета назовем специальной), инвариантные переменные принимают вид

$$a = \frac{p_0^2}{m^2}, \quad b = -\text{sign}(eB) \sqrt{\frac{2|eB|k}{m^2}}, \quad c = \frac{(eB)^2}{m^4}. \quad (44)$$

Решение модифицированного уравнения Дирака существует, если только детерминант матрицы $K(p, F)$ равен нулю, т.е.

$$\text{Det } K(p, F) = V^2 - S^2 - T^2 + 2\frac{e}{m} V^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} f_3 = 0. \quad (45)$$

Для вещественных значений b это уравнение определяет комплексные значения квадрата массы фермиона, которые сводятся к $\bar{p}^2 = m^2$ при выключении радиационных поправок.

Получим массовый оператор в специальной системе отсчета. При вычислении массового оператора используются выражения для функций распространения электрона (27) и фотона в собственном-временном представлении

$$S_{\mu\nu}^{\text{ph}}(z - z') = -g_{\mu\nu} \frac{i^{1/2}}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \frac{du}{u^{3/2}} \times \\ \times \exp \left[-\delta_{\text{ph}} u - \frac{i(t - t')^2 - i(x - x')^2 - i(y - y')^2}{4u} \right], \quad (46)$$

а также формула (5) для E_p -матричной функции. Введем вместо z, z' относительные и средние координаты: $t_- = t - t', x_- = x - x', y_- = y - y', T = (t + t')/2, X = (x + x')/2, Y = (y + y')/2$. Интегрирование по T, Y дает $2\pi\delta(p_0 - q_0), 2\pi\delta(p_2 - q_2)$. Затем, упростив подынтегральное выражение, используя полученные δ -функции и интегрируя по t_- , получим множитель

$$\sqrt{\frac{\pi(s + u)}{isu}} \exp\left(\frac{ip_0^2 su}{s + u}\right)$$

в членах, не зависящих от t_- . Члены первого порядка по t_- будут содержать лишний множитель $2p_0 su/(s + u)$.

Интегрирование по X проводится с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|eB|} \exp(-iy_- x) D_n(\rho) D_k(\rho') dx = \sqrt{\pi n! k!} \exp(i(n - k)g) I_{nk}(z). \quad (47)$$

Здесь $\rho = \sqrt{2|eB|}(x + x_-)$, $\rho' = \sqrt{2|eB|}(x - x_-)$, $g = \arctg(y_-/x_-)$, а $I_{nk}(z)$ — обобщенный полином Лагерра аргумента $z = |eB|(x_-^2 + y_-^2)/2$:

$$I_{nk}(z) = (n!k!)^{-1/2} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) z^{(n-k)/2} L_k^{n-k}(z), \quad (48)$$

где $L_s^k(z)$ — полином Лагерра.

Интегрирование по переменным x_- и y_- проводится в полярных координатах. Тогда интегрирование по $\phi = \arctg(y_-/x_-)$ выполняется элементарно:

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(n - n')\phi] d\phi = 2\pi\delta_{nn'}.$$

Интегрирование по z проводится с помощью формул

$$\int_0^\infty dx e^{-bx} L_n(x) = \frac{(b-1)^n}{b^{n+1}}, \\ \int_0^\infty dx x e^{-bx} L_{n-1}^1(x) = n \frac{(b-1)^{n-1}}{b^{n+1}}, \quad \text{Re } b > 0. \quad (49)$$

В результате вычислений первый член в формуле (35) можно записать следующим образом:

$$M_1(p, F) = -e^2 \frac{i^{3/2} eB}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s ds du}{\rho(s+u)^{1/2} \sin \alpha} \times \\ \times \exp \left[-is(m^2 - i\delta_e) - u\delta_{ph} + ip_0^2 \frac{su}{s+u} - 2in\varphi \right] [(3M - \gamma^0 P_0)e^{-i\varphi} - \gamma^2 P_2], \quad (50)$$

где $\alpha = eBs$, $\varphi = \arctg[eBu/(1 + eBu \operatorname{ctg} \alpha)]$, $\rho = \sqrt{(eBu)^2 + (1 + eBu \operatorname{ctg} \alpha)^2}$,

$$M = i \frac{p_0 u}{s+u} \sin \alpha + m \cos \alpha, \quad P_0 = \frac{p_0 u}{s+u} \cos \alpha + im \sin \alpha, \\ P_2 = \sqrt{2|eB|n} \frac{eBu}{\rho \sin \alpha}. \quad (51)$$

Второй член формулы (35) получается в виде

$$M_2(p, F) = \frac{3e^2}{8\pi} \frac{eB}{m} \sigma_3. \quad (52)$$

В специальной системе отсчета его можно записать как $j^0 \gamma^0$, где $j^0 = -e(eB/2\pi) \operatorname{sign} m$ есть плотность электрического вакуумного заряда, индуцированного внешним полем, а матрица γ^0 появляется из-за того, что только временная компонента вектора потенциала (поля излучения) в данном случае эффективна. Вследствие релятивистской ковариантности электрический ток, индуцированный в вакууме внешним электромагнитным полем $F^{\mu\nu}$, равен $j^\mu = -e(e/4\pi) \operatorname{sign} m \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$, а величина $j^0 \gamma^0$ принимает вид $-e(e/4\pi) \operatorname{sign} m \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} \gamma_\mu$. Похоже, что в часть массового оператора, определяемую формулой (52), дает вклад поле Черна–Саймонса, которое в эффективном лагранжиане Гейзенберга–Эйлера для рассматриваемой нами модели генерируется внешним электромагнитным полем динамически. Действительно, плотность лагранжиана в КЭД₂₊₁ во внешнем калибровочном (электромагнитном) поле имеет вид

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(\gamma^\mu P_\mu - m)\Psi, \quad (53)$$

где $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ – введенный выше оператор обобщенного импульса фермиона, A_μ – вектор-потенциал электромагнитного поля, а $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. Массовый член в этой модели не инвариантен относительно операций пространственной четности и обращения времени, поэтому член Черна–Саймонса вида [11]

$$L_{CS} = \frac{e^2 \operatorname{sign} m}{16\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho \quad (54)$$

генерируется внешним полем.

Массовый член $M_2(p, F)$ также нарушает пространственную и временную инвариантности, поэтому он не может быть наблюдаем даже в принципе. Эффект, обусловленный полем Черна–Саймонса, вероятно, можно обнаружить в модели конденсированной среды с конечной плотностью фермионов. При вычислении индуцированной магнитным

полем плотности фермионов в этой модели оказывается удобным использовать пропагатор (21) в E_p -представлении.

Фермионный заряд $Q = \int J_F^0 d^2x$ определяется временной компонентой фермионного тока $J_F^\mu = [\Psi^\dagger(z), \gamma^0 \gamma^\mu \Psi(z)]$, в котором решения уравнения Дирака $\Psi(z)$ даны формулой (10). В терминах пропагатора (21) плотность фермионов, индуцированных внешним полем, определяется формулой

$$j^0 = -2i \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{dp_2}{2\pi} \text{tr}[\gamma^0 S_F(\vec{p})]. \quad (55)$$

Так как вектор $\vec{p}$ и скаляр p^2 не зависят от квантового числа p_2 в формуле (21) и, следовательно, каждый уровень энергии вырожден с бесконечной кратностью, мы должны учесть, что число вырожденных состояний на единицу площади равно $|eB|/2\pi$ для каждого уровня с номером k . Множитель $|eB|/2\pi$ можно получить непосредственно из (22), положив в этой формуле $y = y'$ и затем проинтегрировав ее по p_2 с учетом формулы (см. [9])

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_n(z) D_n(z) dz = \sqrt{2\pi n!}. \quad (56)$$

Для учета конечной плотности фермионов в выражении для индуцированной плотности заряда нужно сдвинуть переменную интегрирования $p_0 \rightarrow p_0 + \mu$, где химический потенциал $\mu > 0$ (см. [12]). В результате мы придем к следующей формуле (см. также [13]):

$$j^0 = -i \frac{|eB|}{2\pi^2} \int dp_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_0 + \mu - E_k + ip_0 \epsilon}. \quad (57)$$

Представление (57) для тока позволяет воспроизвести результаты работы [13], касающиеся вычисления индуцированной плотности фермионного заряда в присутствии фермионов конечной плотности в однородном магнитном поле. В результате интегрирования выражения (57) по p_0 получим

$$j^0 = \frac{|eB|}{2\pi} \left\{ -\text{sign}(eBm) \theta(|m| - \mu) + 2 \left(\left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|eB|} \right] + \frac{1}{2} \right) \theta(\mu - |m|) \right\}. \quad (58)$$

Здесь θ — функция Хэвисайда, а $[x]$ обозначает целую часть числа x . Мы предполагаем, что аргумент $(\mu^2 - m^2)/2|eB|$ функции $(\mu^2 - m^2)/2|eB|$ не равен целому числу, когда функция неоднозначна. Заметим, что первый и второй члены в (58) преобразуются неодинаково, когда направление одной пространственной координаты меняется на обратное (в 2+1 измерениях такое преобразование соответствует преобразованию пространственной инверсии в 3+1 измерениях). Видно, что первый (вклад вакуума) член нечетен, а второй (вклад реальных частиц) четен при таком преобразовании.

Элементарными возбуждениями в этой картине являются частицы и дырки, которые появляются и исчезают парами, причем они могут появиться при конечной температуре. Статистическое распределение квазичастиц (частиц и дырок) при отличной от нуля

температуре определяется функцией распределения Ферми–Дирака, в которой химический потенциал равен нулю.

Если на рассматриваемую модель с конечной плотностью фермионов наряду с сильным магнитным полем действует слабое однородное и постоянное электрическое поле, направленное вдоль оси x , то модель будет обладать электрической проводимостью, подобной наблюдаемой в целочисленном квантовом эффекте Холла, разумеется, если симметрия “частица–дырка” нарушена за счет какого-то внешнего воздействия, которое приведет к конечному значению химического потенциала [13]. Значительного эффекта можно ожидать в бесщелевых полупроводниках (в рассматриваемой здесь модели это соответствует случаю $m = 0$), где нарушения указанной симметрии можно легко достичь, например, путем введения примеси в полупроводник, т.е. его легирования.

В контексте физики конденсированной среды нерелятивистский случай также представляет значительный интерес. Индуцированную плотность фермионов можно легко получить из (58), учитывая, что в этом пределе $\mu_{\text{нон}} \sim \mu - m \ll m$:

$$j^0 = \frac{|eB|}{2\pi} \left\{ \left[\frac{2\mu_{\text{нон}}m}{|eB|} \right] + 1 \right\}. \quad (59)$$

Благодарности. В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Чон Лин Хо за плодотворные дискуссии.

Список литературы

- [1] *A. M. J. Schakel, G. W. Semenoff.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2653.
- [2] The Quantum Hall Effect. 2nd ed. Eds. R. E. Prange, S. M. Girvin. New York: Springer-Verlag, 1990; *V. Zeitlin.* Phys. Lett. B. 1995. V. 352. P. 422.
- [3] *A. Neagu, A. M. J. Schakel.* Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 1785.
- [4] *V. R. Khatilov, C. L. Ho.* Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 615; *B. P. Халилов.* ТМФ. 1998. Т. 116. № 2. С. 277.
- [5] *В. И. Рутус.* Тр. ФИАН им. П. Н. Лебедева АН СССР. 1979. Т. 111. С. 5.
- [6] *И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов.* Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд. МГУ, 1982.
- [7] *И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов.* Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М.: Изд. МГУ, 1989.
- [8] *V. A. Fock.* Sow. Phys. 1937. V. 12. P. 404; *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.
- [9] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [10] *A. J. Niemi, G. W. Semenoff.* Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2077.
- [11] *S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 975; Ann. Phys. (N. Y.). 1982. V. 140. P. 372.
- [12] *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* Статистическая физика. Часть 2. М.: Наука, 1978.
- [13] *A. M. J. Schakel.* Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 1428.

Поступила в редакцию 11.III.1999 г.,
после доработки 7.VI.1999 г.