Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Переломов, Гипергеометрические решения некоторых алгебраических уравнений, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 1, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:56:39

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Получены гипергеометрические решения некоторых алгебраических уравнений, включая уравнение пятой степени общего вида.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, явные решения, гипергеометрические уравнения, производящие функции.

Памяти Андрея Николаевича Тюрин

1. Данная работа вызвана задачей нормализации основного состояния волновой функции тригонометрической n -частичной системы Калоджеро–Сазерленда (см. обзорную статью [1]). Связь указанной задачи с результатами настоящей работы будет рассмотрена позднее.

Как известно, алгебраические уравнения общего вида степени $n \geq 5$ неразрешимы в радикалах [2]. Однако они могут быть решены в более широких классах функций. Например, решение уравнения пятой степени может быть получено в модулярных функциях [3]–[5] и в виде ряда [6]. Общее алгебраическое уравнение может быть решено в гиперэллиптических тета-константах [7].

Другой подход, заключающийся в рассмотрении алгебраических решений дифференциальных уравнений, был использован в классической работе Шварца [8], где были найдены все алгебраические решения обычного гипергеометрического уравнения. Этот подход интенсивно развивался Пуанкаре.

Исследование Шварца было завершено в работе [9] классификацией алгебраических обобщенных гипергеометрических функций ${}_nF_{n-1}$. Существует одна серия, соответствующая рассматриваемому случаю, и 76 исключительных случаев. Заметим, что при $n \geq 9$ исключительные случаи отсутствуют.

Группы монодромии для этих функций были вычислены в работе [9] явно. Эти группы суть группы, порожденные комплексными отражениями в $\mathbb{C}^n$. Там же были явно вычислены дифференциальные группы Галуа соответствующих гипергеометрических дифференциальных уравнений. Однако соответствующие алгебраические уравнения вычислены не были.

*Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: perelomo@dftuz2.unizar.es

В настоящей работе мы дадим явное решение уравнений вида

$$F_n(x, t) \equiv x^n - x + t = 0, \quad n > 1, \quad (1)$$

$$G_n(y, t) \equiv \gamma_n t^{n-1} y^n - (y-1) \left(y + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} = 0, \quad \gamma_n = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}, \quad (2)$$

в классе гипергеометрических функций вида

$${}_{n-1}F_{n-2}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; \beta_1, \dots, \beta_{n-2}; \gamma_n t^{n-1}). \quad (3)$$

Заметим, что уравнения общего вида второй, третьей, четвертой и пятой степеней могут быть сведены к уравнению (1) с помощью преобразования Чирнгаузен (см. [10])¹⁾.

2. Прежде всего отметим, что нормализация основного состояния волновой функции n -частичной задачи Калоджеро–Сазерленда эквивалентна вычислению интеграла

$$\int_0^\pi \dots \int_0^\pi \left\{ \prod_{1 \leq j < l \leq n} \sin(q_j - q_l) \right\}^k dq_1 \dots dq_n. \quad (4)$$

В процессе вычисления возникают биномиальные коэффициенты специального вида

$$c_k^{(n,j)} = \binom{nk+j}{k} = \frac{(nk+j)!}{((n-1)k+j)! k!}, \quad (5)$$

для которых естественно ввести производящую функцию

$$H_{n,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n,j)} z^k, \quad n \geq 2, \quad j = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Введем также функции

$$y_{n,j}(t) = t^j H_{n,j}(z), \quad z = t^{n-1}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

$$x_{n,j}(t) = j \int_0^t y_{n,j-1}(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Эти функции обладают рядом замечательных свойств, в частности $x_{n,1}(t)$ и $y_{n,0}(t)$ являются решениями уравнений (1) и (2).

Напомним определение обобщенной гипергеометрической функции:

$$\begin{aligned} {}_mF_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n; \gamma z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k \dots (\alpha_m)_k}{(\beta_1)_k (\beta_2)_k \dots (\beta_n)_k k!} (\gamma z)^k, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1)$$

— символ Похгаммера.

¹⁾После того как настоящая работа была завершена, проф. Глассер любезно указал мне на свою работу [11], в которой показано, что корни уравнения (1) являются конечными суммами обобщенных гипергеометрических функций. Я также узнал от проф. Загира, что ему известно решение этого уравнения (не опубликовано).

ЛЕММА 1. *Функции (6)–(8) являются алгебраическими функциями гипергеометрического типа. Именно,*

$$H_{n,j}(z) = {}_{n-1}F_{n-2}\left(\frac{j+1}{n}, \dots, \frac{j+n}{n}; \frac{j+1}{n-1}, \dots, \frac{j+n-1}{n-1}; \gamma_n z\right), \quad (10)$$

где γ_n определено в (2). Функции $y_{n,j}(t)$ даются формулой (7). Также имеет место равенство

$$x_{n,j}(t) = t^j {}_{n-1}F_{n-2}\left(\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}, \dots, \frac{j+n-1}{n}; \frac{j+1}{n-1}, \frac{j+2}{n-1}, \dots, \frac{j+n-1}{n-1}; \gamma_n z\right). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из того факта, что для обобщенной гипергеометрической функции (9)

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k + \alpha_1)(k + \alpha_2) \cdots (k + \alpha_m)}{(k + \beta_1)(k + \beta_2) \cdots (k + \beta_n)} \gamma,$$

и имеют место тождества

$${}_nF_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha; \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \alpha; z) = {}_{n-1}F_{n-2}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; \beta_1, \dots, \beta_{n-2}; z).$$

Алгебраический характер функций $H_{n,j}(z)$ становится очевидным при сравнении выражения (10) со списком функций, приведенным в работе [9].

Гипергеометрический характер рассматриваемых функций позволяет без труда дифференцировать и интегрировать эти функции. Для этого можно использовать известные формулы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}_mF_n(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n; z) &= \\ &= \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_m}{\beta_1 \cdots \beta_n} {}_mF_n(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_m + 1; \beta_1 + 1, \dots, \beta_n + 1; z), \\ \int {}_mF_n(\alpha_1 \cdots \alpha_m; \beta_1 \cdots \beta_n; z) dz &= \\ &= \frac{(\beta_1 - 1) \cdots (\beta_n - 1)}{(\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_m - 1)} {}_mF_n(\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_m - 1; \beta_1 - 1, \dots, \beta_n - 1; z) + \text{const}. \end{aligned}$$

Из этих формул получаем

$$\frac{d}{dz} H_{n,j}(z) = (j+n) {}_{n-1}F_{n-2}\left(\frac{j+n+1}{n}, \dots, \frac{j+2n}{n}; \frac{j+n}{n-1}, \dots, \frac{j+2n-2}{n-1}; \gamma_n z\right)$$

и формулу (11).

3. Заметим, что уравнение (1) имеет решение $x(t)$, $x(0) = 0$, аналитическое в круге D_{r_n} некоторого радиуса $r_n > 0$. Рассмотрим также функцию $y(t) = x'(t)$. Дифференцируя (1) по переменной t , получаем

$$(1 - nx^{n-1})y = 1. \quad (12)$$

Уравнение (1) также дает

$$x^{n-1} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{y} \right). \quad (13)$$

Отсюда следует уравнение (2).

Основной результат настоящей работы представляет

ТЕОРЕМА 1. *Решения уравнений (1) и (2) даются формулами*

$$x(t) = x_{n,1}(t), \quad y(t) = y_{n,0}(t). \quad (14)$$

Также имеют место формулы

$$(x(t))^j = x_{n,j}(t), \quad (x(t))^j y(t) = y_{n,j}(t). \quad (15)$$

4. Прежде чем доказывать эту теорему, приведем некоторые свойства обобщенных гипергеометрических функций (подробнее см. [12], [13]).

Обобщенная гипергеометрическая функция ${}_nF_{n-1}(z)$ определена рядом

$${}_nF_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_{n-1}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_n)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_{n-1})_k k!} z^k, \quad (16)$$

который сходится в единичном круге.

Функция $u(z) = {}_nF_{n-1}(z)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению

$$D \cdot (D + \beta_1 - 1) \dots (D + \beta_{n-1} - 1)u - z(D + \alpha_1) \dots (D + \alpha_n)u = 0, \quad (17)$$

в котором $D = z d/dz$. Эта функция является аналитической на римановой сфере $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$, за исключением точек $z = 0$, $z = \infty$ и $z = 1$. Локальное поведение данной функции в этих точках определяется показателями

$$\begin{aligned} &1 - \beta_1, \dots, 1 - \beta_{n-1}, 0 && \text{при } z = 0, \\ &\alpha_1, \dots, \alpha_n && \text{при } z = \infty, \\ &0, 1, \dots, n-2, \quad \gamma = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j - \sum_{l=1}^n \alpha_l && \text{при } z = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Если числа $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ различны по mod $\mathbb{Z}$, то n независимых решений уравнения (17) даются формулой

$$z^{1-\beta_i} {}_nF_{n-1}(1 + \alpha_1 - \beta_i, \dots, 1 + \alpha_n - \beta_i; 1 + \beta_1 - \beta_i, \hat{\cdot}, 1 + \beta_n - \beta_i; z), \quad (19)$$

где $i = 1, \dots, n$, $\beta_n = 1$ и знак $\hat{\cdot}$ указывает на то, что аргумент $1 + \beta_i - \beta_i$ пропущен.

В работе [12] было доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 2 [12]. Если в (18) $\gamma \notin \mathbb{N}$, то вблизи точки $z = 1$ уравнение (17) имеет $n - 1$ аналитическое решение вида

$$u_j(z) = (z - 1)^{j-1} + O((z - 1)^{n-1}) \quad (20)$$

для значений $j = 1, \dots, n - 1$, соответствующих показателям $0, 1, \dots, n - 2$.

Теперь мы готовы доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Функция $y(t) = x'(t)$ обладает следующими свойствами:

1. Функция $y(t)$ является аналитической в круге

$$D_{r_n} = \{t : |t| < r_n\}, \quad r_n^{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}, \quad (21)$$

и разложение $y(t)$ при $t \rightarrow 0$ имеет вид

$$y(t) = \tilde{y}(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots, \quad z = t^{n-1}. \quad (22)$$

2. Функция $\tilde{y}(z)$ является аналитической на $\mathbb{CP}^1$ и ее значения отличны от нуля и бесконечности везде, кроме точек $z = z_0 = r_n^{n-1} = \gamma_n^{-1}$ и $z = \infty$. В точке $z = z_0$ функция обращается в бесконечность, а в точке $z = \infty$ — в нуль. Имеем при $|t| \rightarrow \infty$

$$x(t) = t \sum_{k=1}^{n-1} z^{-\alpha_k} g_k(z), \quad \tilde{y}(z) = \sum_{k=1}^{n-1} z^{-\alpha_k} \tilde{g}_k(z), \quad \alpha_k = \frac{k}{n}, \quad z = t^{n-1}.$$

При $z = \infty$ функции $g_k(z)$ и $\tilde{g}_k(z)$ являются аналитическими и их значения отличны от нуля и бесконечности.

3. Вблизи точки $z = z_0$ функция $\tilde{y}(z)$ имеет вид

$$\tilde{y}(z) = (z - z_0)^{-1/2} f_1(z) + f_2(z),$$

где функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются аналитическими в точке $z = z_0$, причем $f_1(z_0) \neq 0$ и $f_2(z_0) \neq \infty$.

4. Размерность линейного пространства всех ветвей функции $\tilde{y}(z)$, получаемого при обходе вокруг точек ветвления $z = z_0$ и $z = \infty$, равна $n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Первое утверждение теоремы получается из формул (12), (13) и решения уравнения (1) с помощью итераций

$$\begin{aligned} x &= t + x^n, \\ x &= t + (t + x^n)^n, \quad x = t + (t + (t + x^n)^n)^n, \quad \dots, \\ x &= t + \frac{c_1}{n} t^n + \frac{c_2}{2n-1} t^{2n-1} + \frac{c_3}{3n-2} t^{3n-2} + \dots, \\ c_1 &= n, \quad c_2 = \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2}, \quad c_3 = \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \dots \end{aligned}$$

Радиус сходимости полученного ряда определяется из условия обращения в нуль дискриминанта уравнения (1). Отсюда вытекает формула

$$z_0 = r_n^{n-1} = \gamma_n^{-1} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}. \quad (23)$$

2. Это утверждение следует из итераций формулы

$$x(t) = \varepsilon_n t^{1/n} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{1/n} \quad \text{при} \quad |t| \rightarrow \infty,$$

где $\varepsilon_n = e^{i\pi/n}$.

3. Таким же образом получается разложение функции $\tilde{y}(z)$ в точке $z = z_0$.

4. Уравнение (1) имеет n решений $x^{(j)}(t)$, $j = 1, \dots, n$, $x^{(1)}(t) = x(t)$, и мы имеем $\sum x^{(j)}(t) = 0$. Поэтому n ветвей $\tilde{y}^{(1)}(z), \dots, \tilde{y}^{(n)}(z)$ алгебраической функции $\tilde{y}(z) = x'(t)$ являются линейно зависимыми:

$$\tilde{y}^{(1)}(z) + \tilde{y}^{(2)}(z) + \dots + \tilde{y}^{(n)}(z) = 0, \quad (24)$$

и размерность линейного пространства всех ветвей функции $\tilde{y}(z)$ равна $n - 1$.

Теперь мы готовы доказать теорему 1. Мы дадим два различных доказательства этой теоремы. Первое доказательство основывается на применении к рассматриваемой задаче общей идеи Римана, которая содержится в его прекрасной работе [14]. Второе доказательство использует стандартное вычисление вычетов.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из уравнений (1) и (2) следует, что функция $\tilde{y}(z) = (1 - nx^{n-1})^{-1}$, $z = t^{n-1}$, обращается в нуль только при $z = \infty$ и равна бесконечности только при $z = z_0$. Пусть $\tilde{y}^{(1)}(z), \dots, \tilde{y}^{(n)}(z)$ суть все n ветвей этой функции. Тогда справедливо (24), и пространство L_n линейных комбинаций таких функций имеет размерность $n - 1$. Разложение функции $f(z) \in L_n$ в точках $z = 0$, $z = z_0$ и $z = \infty$ определяется следующими показателями:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1} = \frac{n-1}{n} && \text{при } z = \infty, \\ \beta_1 &= \frac{1}{n-1}, \quad \dots, \quad \beta_{n-2} = \frac{n-2}{n-1} && \text{при } z = 0, \\ \gamma_1 &= 0, \quad \gamma_2 = 1, \quad \dots, \quad \gamma_{n-2} = n-3, \quad \gamma_{n-1} = -\frac{1}{2} && \text{при } z = z_0. \end{aligned}$$

С другой стороны, $n - 1$ линейно независимых решений $u_1(z), \dots, u_{n-1}(z)$ гипергеометрического уравнения

$$D \cdot (D + \beta_1 - 1) \dots (D + \beta_{n-2} - 1) u(z) - z(D + \alpha_1) \dots (D + \alpha_{n-1}) u(z) = 0 \quad (25)$$

с $D = z d/dz$ имеют те же показатели и удовлетворяют условиям теоремы Римана. Поэтому в соответствии с указанной теоремой

$$\tilde{y}(z) = \tilde{y}^{(1)}(z) \in L_n, \quad \tilde{y}(z) = c_1 u_1(z) + \dots + c_{n-1} u_{n-1}(z). \quad (26)$$

Константы c_k могут быть найдены из рассмотрения предела $z \rightarrow 0$. В результате мы получаем формулы (14) и (15)²⁾.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Используем теперь вычисление вычетов. Имеем

$$\tilde{y}(z) = y_{n,0}(z) = 1 + c_1^{(0)}z + \dots + c_k^{(0)}z^k + \dots, \quad z = t^{n-1}. \quad (27)$$

Поэтому

$$\frac{c_k^{(0)}}{t} + \frac{df_k}{dt} = \frac{\tilde{y}(z)}{x^{1+k(n-1)}(1-x^{(n-1)})^{1+k(n-1)}}, \quad (28)$$

или

$$\frac{c_k^{(0)}}{t} + \frac{df_k}{dt} = \frac{C_k^{(0)}}{x} + \frac{dF_k}{dx}, \quad (29)$$

где $f_k(t)$ и $F_k(x)$ — некоторые рациональные функции.

Величины $C_j^{(0)}$ даются разложением функции

$$(1-z)^{-(1+k(n-1))} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(0)} z^j. \quad (30)$$

Следовательно,

$$c_k^{(0)} = C_k^{(0)} = \binom{kn}{k}. \quad (31)$$

Аналогичное вычисление для функции

$$y_{n,j}(z) = t^j \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} z^k$$

дает

$$c_k^{(j)} = \binom{kn+j}{k}.$$

Отсюда следует формула (7) для $y_{n,j}(t)$. Интегрируя $y_{n,j-1}(t)$, мы получаем (15).

Таким образом, теорема доказана.

5. Приведем здесь дополнительные свойства функций $x_{n,j}$ и $y_{n,j}$.

ЛЕММА 3. *Функция $y(t) = y_{n,0}(t)$ удовлетворяет следующему нелинейному дифференциальному уравнению:*

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dt} \frac{1}{y} \frac{d}{dt} \dots \frac{1}{y} = -n!. \quad (32)$$

²⁾Заметим, что остальные ветви функций $y^{(j)}(t)$, $x^{(j)}(t)$ также лежат в L_n , т.е. они также являются линейными комбинациями функций $u_1(z), \dots, u_{n-1}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$\frac{1}{y} = 1 - nx^{n-1}.$$

Дифференцируя это соотношение $n - 1$ раз по переменной t , получаем уравнение (32).

ЛЕММА 4. Для функции $y(t)$ справедливо следующее формальное интегральное представление³⁾:

$$y(t) = \int_{\mathbb{C}} d\mu(z, \bar{z}) e^{\bar{z}(z+t)^n}, \quad (33)$$

где

$$d\mu(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2} dz d\bar{z}. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедиться в этом, можно разложить в ряд подынтегральное выражение и использовать формулу

$$\int d\mu(z, \bar{z}) z^j \bar{z}^k = \delta_{jk} k!.$$

В заключение обратим внимание на то обстоятельство, что из очевидных формул, таких как

$$(x(t))^j (x(t))^l = (x(t))^{j+l}, \quad (x(t))^j (x(t))^l y(t) = (x(t))^{j+l} y(t),$$

вытекают нетривиальные (и, возможно, новые) тождества для обобщенных гипергеометрических функций. Приведем пару таких тождеств.

ЛЕММА 5. Справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} & {}_nF_{n-1}\left(\frac{j}{n}, \dots, \frac{j+n-1}{n}; \frac{j+1}{n-1}, \dots, \frac{j+n-1}{n-1}; z\right) \times \\ & \quad \times {}_nF_{n-1}\left(\frac{l}{n}, \dots, \frac{l+n-1}{n}; \frac{l+1}{n-1}, \dots, \frac{l+n-1}{n-1}; z\right) = \\ & = {}_nF_{n-1}\left(\frac{j+l}{n}, \dots, \frac{j+l+n-1}{n}; \frac{j+l+1}{n-1}, \dots, \frac{j+l+n-1}{n-1}; z\right), \\ & {}_nF_{n-1}\left(\frac{j}{n}, \dots, \frac{j+n-1}{n}; \frac{j+1}{n-1}, \dots, \frac{j+n-1}{n-1}; z\right) \times \\ & \quad \times {}_{n-1}F_{n-2}\left(\frac{l+1}{n}, \dots, \frac{l+n}{n}; \frac{l+1}{n-1}, \dots, \frac{l+n-1}{n-1}; z\right) = \\ & = {}_{n-1}F_{n-2}\left(\frac{j+l}{n}, \dots, \frac{j+l+n}{n}; \frac{j+l+1}{n-1}, \dots, \frac{j+l+n-1}{n-1}; z\right). \end{aligned} \quad (35)$$

³⁾ Термин *формальное* означает, что мы должны сначала разложить функцию $e^{\bar{z}(z+t)^n}$ в степенной ряд и лишь затем интегрировать ее. Отметим, что для функций $x_{n,j}(t)$ и $y_{n,j}(t)$ также имеются стандартные интегральные представления (см. [12], [13]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Явные выражения для функций

$x(t) = x_{n,1}(t)$ и $y_j(t) = y_{n,j}(t)$ при $n = 2, 3, 4, 5, 6$

При $n = 2$:

$$\begin{aligned} x(t) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; 2; 4t\right), \\ x(t) &= t + t^2 + 2t^3 + 5t^4 + 2 \cdot 7t^5 + 2 \cdot 3 \cdot 7t^6 + 2^2 \cdot 3 \cdot 11t^7 + \\ &\quad + 3 \cdot 11 \cdot 13t^8 + 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13t^9 + \dots, \\ y_0 &= {}_1F_0\left(\frac{1}{2}; 4t\right), \\ y_0 &= 1 + 2t + 2 \cdot 3t^2 + 2^2 \cdot 5t^3 + 2 \cdot 5 \cdot 7t^4 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7t^5 + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11t^6 + \\ &\quad + 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 15t^7 + 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13t^8 + \dots, \\ y_1 &= t + 3t^2 + 2 \cdot 5t^3 + 5 \cdot 7t^4 + 2 \cdot 3^2 \cdot 7t^5 + \dots. \end{aligned}$$

При $n = 3$:

$$\begin{aligned} x(t) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{27}{4}t^2\right), \\ x(t) &= t + t^3 + 3t^5 + 2^2 \cdot 3t^7 + 5 \cdot 11t^9 + 3 \cdot 7 \cdot 13t^{11} + \\ &\quad + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17t^{13} + 2^3 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19t^{15} + 3^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23t^{17} + \dots, \\ y_0(t) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{27}{4}t^2\right), \\ y_0(t) &= y(t|3, 0) = 1 + 3t^2 + 3 \cdot 5t^4 + 2^2 \cdot 3 \cdot 7t^6 + 3^2 \cdot 5 \cdot 11t^8 + \\ &\quad + 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13t^{10} + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17t^{12} + \\ &\quad + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19t^{14} + 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23t^{16} + \dots, \\ y_0^{-1}(t) &= 1 - 3t^2 - 2 \cdot 3t^4 - 3 \cdot 7t^6 - 2 \cdot 3^2 \cdot 5t^8 - 3 \cdot 11 \cdot 13t^{10} - 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13t^{12} - \dots, \\ y_1(t) &= {}_2F_1\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{3}{2}; \frac{27}{4}t^2\right), \\ y_1(t) &= t + 2^2t^3 + 3 \cdot 7t^5 + 2^3 \cdot 3 \cdot 5t^7 + 5 \cdot 11 \cdot 13t^9 + \\ &\quad + 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13t^{11} + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19t^{13} + \dots, \\ y_2(t) &= t^2 {}_3F_2\left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{3}{2}, 2; \frac{3^3}{2^2}t^2\right), \\ y_2(t) &= t^2 + 5t^4 + 2^2 \cdot 7t^6 + 3 \cdot 5 \cdot 11t^8 + 7 \cdot 11 \cdot 13t^{10} + \dots. \end{aligned}$$

При $n = 4$:

$$\begin{aligned} x(t) &= {}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{4^4}{3^3}t^3\right), \\ x(t) &= t + t^4 + 2^2t^7 + 2 \cdot 11t^{10} + 2^2 \cdot 5 \cdot 7t^{13} + 3 \cdot 17 \cdot 19t^{16} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23t^{19} + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23t^{22} + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31t^{25} + \dots, \\
y_0(t) &= {}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{4^4}{3^3}t^3\right), \\
y_0(t) &= 1 + 2^2t^3 + 2^2 \cdot 7t^6 + 2^2 \cdot 5 \cdot 11t^9 + 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13t^{12} + 2^4 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19t^{15} + \\
& + 2^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23t^{18} + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23t^{21} + \\
& + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 31t^{24} + \dots, \\
y_1(t) &= t {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{4^4}{3^3}t^3\right), \\
y_1(t) &= t + 5t^4 + 2^2 \cdot 3^2t^7 + 2 \cdot 11 \cdot 13t^{10} + 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17t^{13} + \dots, \\
y_2(t) &= t^2 {}_3F_2\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{4^4}{3^3}t^3\right), \\
y_2(t) &= t^2 + 2 \cdot 3t^5 + 3^2 \cdot 5t^8 + 2^2 \cdot 7 \cdot 13t^{11} + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17t^{14} + \dots, \\
y_3(t) &= t^3 {}_4F_3\left(1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2; \frac{4^4}{3^3}t^3\right), \\
y_3(t) &= t^3 + 7t^6 + 5 \cdot 11t^9 + 5 \cdot 7 \cdot 13t^{12} + 2^2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19t^{15} + \dots.
\end{aligned}$$

При $n = 5$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= t {}_4F_3\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{5^5}{4^4}t^4\right), \\
x(t) &= t + t^5 + 5t^9 + 5 \cdot 7t^{13} + 3 \cdot 5 \cdot 19t^{17} + 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23t^{21} + \\
& + 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29t^{25} + 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31t^{29} + 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37t^{33} + \dots, \\
y_0(t) &= {}_4F_3\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{5^5}{4^4}t^4\right), \\
y_0(t) &= 1 + 5t^4 + 3^2 \cdot 5t^8 + 5 \cdot 7 \cdot 13t^{12} + 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19t^{16} + \\
& + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23t^{20} + 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29t^{24} + \\
& + 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 31t^{28} + 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37t^{32} + \dots, \\
y_1(t) &= t {}_4F_3\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{5^5}{4^4}t^4\right), \\
y_1(t) &= t + 2 \cdot 3t^5 + 5 \cdot 11t^9 + 2^4 \cdot 5 \cdot 7t^{13} + 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19t^{17} + \dots, \\
y_2(t) &= t^2 {}_4F_3\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; \frac{5^5}{4^4}t^4\right), \\
y_2(t) &= t^2 + 7t^6 + 2 \cdot 3 \cdot 11t^{10} + 2^3 \cdot 5 \cdot 17t^{14} + \\
& + 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19t^{18} + 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23t^{22} + \dots, \\
y_3(t) &= t^3 {}_4F_3\left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}; \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}; \frac{5^5}{4^4}t^4\right), \\
y_3(t) &= t^3 + 2^3t^7 + 2 \cdot 3 \cdot 13t^{11} + 2^4 \cdot 3 \cdot 17t^{15} + \\
& + 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23t^{19} + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13t^{23} + \dots,
\end{aligned}$$

$$y_4(t) = t^4 {}_5F_4\left(1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}; \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}; 2; \frac{5^5}{4^4}t^4\right),$$

$$y_4(t) = t^4 + 3^2t^8 + 7 \cdot 13t^{12} + 3 \cdot 17 \cdot 19t^{16} +$$

$$+ 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23t^{20} + 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29t^{24} + \dots$$

При $n = 6$:

$$x(t) = t {}_5F_4\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}; \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}; \frac{6^6}{5^5}t^5\right),$$

$$x(t) = t + t^6 + 2 \cdot 3t^{11} + 3 \cdot 17t^{16} + 2 \cdot 11 \cdot 23t^{21} + 3^3 \cdot 7 \cdot 29t^{26} +$$

$$+ 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17t^{31} + 2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 41t^{36} + 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 43 \cdot 47t^{41} + \dots,$$

$$y_0(t) = {}_5F_4\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \frac{6^6}{5^5}t^6\right),$$

$$y_0(t) = 1 + 2 \cdot 3t^5 + 2 \cdot 3 \cdot 11t^{10} + 2^4 \cdot 3 \cdot 17t^{15} + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23t^{20} +$$

$$+ 2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29t^{25} + 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31t^{30} + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 41t^{35} +$$

$$+ 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47t^{40} + \dots$$

Благодарности. Я благодарен профессорам Ф. Хирцебруху, Д. Лейтесу, А. Левину и Ю.И. Манину за полезные замечания, проф. М.Л. Глассеру за информацию о его работе и Max-Planck-Institute für Mathematik (Бонн) за гостеприимство.

Список литературы

- [1] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Phys. Rep. 1983. V. 94. № 6. P. 313–404.
- [2] *N. H. Abel.* J. Reine Angew. Math. 1826. V. 1. P. 65–84.
- [3] *Ch. Hermite.* Compt. Rend. 1858. V. 46. P. 508–515.
- [4] *L. Kronecker.* Compt. Rend. 1858. V. 46. P. 1150–1152.
- [5] *F. Klein.* Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung 5^{ten} Grades. Leipzig: Teubner, 1884.
- [6] *J. Cockle.* Phil. Mag. 1860. V. 20. P. 145–148.
- [7] *H. Umemura.* Solution of algebraic equations by theta constants. Appendix to Tata Lectures on Theta. V. II. Ed. D. Mumford. Boston, MA: Birkhauser, 1984. P. 3.261–3.272.
- [8] *H. Schwarz.* J. Reine Angew. Math. 1873. V. 75. P. 292–335.
- [9] *F. Beukers, G. Heckman.* Invent. Math. 1989. V. 95. P. 325–354.
- [10] *R. Fricke.* Lehrbuch der Algebra. Braunschweig: Vieweg und Sohn, 1924.
- [11] *M. L. Glasser.* J. Comput. Appl. Math. 2000. V. 118. P. 169–173.
- [12] *L. Pochhammer.* J. Reine Angew. Math. 1888. V. 102. P. 76–159.
- [13] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [14] *B. Riemann.* Abh. König. Gesell. Wiss. zu Göttingen. 1857. V. 7. P. 1–24.

Поступила в редакцию 1.VII.2003 г.