Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Зайцев, Приближенный метод обратной задачи рассеяния в J -матричном подходе. Случай двух взаимодействующих каналов, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 3, 424–435

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:46:07

© 1999 г.

С. А. Зайцев*

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В J -МАТРИЧНОМ ПОДХОДЕ. СЛУЧАЙ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КАНАЛОВ

В рамках J -матричного подхода предложен метод построения сепарабельных потенциалов с осцилляторными формфакторами по известной S -матрице. Рассмотрен случай упругого рассеяния с учетом двух взаимодействующих каналов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был предложен способ построения в рамках J -матричного подхода [2–5] по известным фазе рассеяния и спектру квантовой системы сепарабельного потенциала

$$\hat{V} = \hbar\omega \sum_{n,n'=0}^{N-1} |\varphi_n^l\rangle V_{n,n'} \langle \varphi_{n'}^l| \quad (1)$$

с формфакторами $|\varphi_n^l\rangle$ в виде собственных функций гармонического осциллятора

$$|\varphi_n^l\rangle = (-1)^n \sqrt{\frac{2n!}{\rho \Gamma(n+l+\frac{3}{2})}} \frac{x^{l+1}}{\exp(\frac{x^2}{2})} L_n^{l+\frac{1}{2}}(x^2), \quad (2)$$

где x – относительная координата в единицах осцилляторного радиуса $\rho = \sqrt{\hbar/\mu\omega}$, μ – приведенная масса.

Потенциалы (1) могут применяться в оболочечных расчетах. Действительно, центральным пунктом так называемой “no-core”-модели оболочек [6] является задача построения эффективного двухчастичного взаимодействия, которая решается с использованием реалистичных нуклон-нуклонных потенциалов [7]. Присутствие в результирующем выражении [6] проекторов на модельное пространство, ограниченное конечным числом осцилляторных базисных функций, означает, что это эффективное двухчастичное взаимодействие представимо в виде сепарабельного разложения (1).

* Хабаровский государственный технический университет, Хабаровск, Россия.
E-mail: zaitsev@mail.khstu.ru

В данной статье делается попытка распространить подход работы [1] на случай потенциалов

$$\hat{V} = \sum_{\alpha, \beta=1,2} |\alpha\rangle V^{\alpha\beta} \langle\beta|, \quad (3)$$

где парциальные потенциалы $V^{\alpha\beta}$ задаются разложением

$$V^{\alpha\beta} = \hbar\omega \sum_{n=0}^{N_\alpha-1} \sum_{n'=0}^{N_\beta-1} |\varphi_n^{(\alpha)}\rangle V_{n,n'}^{\alpha\beta} \langle\varphi_{n'}^{(\beta)}|. \quad (4)$$

Символы α и β обозначают наборы квантовых чисел, в которых присутствуют и значения орбитальных моментов l_α и l_β ; $|\varphi_n^{(\alpha)}\rangle \equiv |\varphi_n^{l_\alpha}\rangle$. Мы ограничиваемся “упругим” случаем, когда в обоих каналах энергия одинакова. Эту энергию будем измерять в единицах $\hbar\omega$: $\epsilon = E/\hbar\omega = q^2/2$, где q – сопряженный координате x безразмерный импульс.

Ниже приведены используемые в дальнейшем J -матричные соотношения, отвечающие теории сильной связи каналов.

2. ЭЛЕМЕНТЫ J -МАТРИЧНОГО ФОРМАЛИЗМА

Компоненты $u_{\alpha\beta}(k, r)$ матрицы размерности 2×2 – решения уравнения Шредингера – представляются в этом подходе в виде разложения

$$u_{\alpha\beta}(k, r) = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n^{(\alpha)}\rangle b_n^{\alpha\beta}(q), \quad (5)$$

коэффициенты $b_n^{\alpha\beta}$ которого удовлетворяют [8] соотношениям

$$b_n^{\alpha\beta}(q) = \begin{cases} \sum_{\alpha'} P_{n, N_{\alpha'}-1}^{\alpha\alpha'}(\epsilon) T^{(\alpha')} b_{N_{\alpha'}}^{\alpha'\beta}(q) & \text{при } n \leq N_\alpha - 1, \\ \frac{i}{2} [C_n^{(\alpha)(-)}(q) \delta_{\alpha\beta} - C_n^{(\alpha)(+)}(q) S_{\alpha\beta}] & \text{при } n \geq N_\alpha - 1, \end{cases} \quad (6)$$

где $S_{\alpha\beta}$ – элементы дискретного аналога S -матрицы. В определении элементов

$$P_{n,n'}^{\alpha\beta}(\epsilon) = [(\mathbf{I}\epsilon - \mathbf{h})^{-1}]_{n,n'}^{\alpha\beta}, \quad (7)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, участвует матрица $\mathbf{h}$ гамильтониана $\hat{H}/\hbar\omega$, рассчитанная в базисе $\{|\alpha\rangle |\varphi_n^{(\alpha)}\rangle, n = \overline{0, N_\alpha-1}, \alpha = \overline{1, 2}\}$ [8]. Последняя представляет собой сумму $\mathbf{h} = \mathbf{T} + \mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ – матрица потенциала $\hat{V}/\hbar\omega$ (4), $\mathbf{T}$ – матрица оператора кинетической энергии $\hat{T}/\hbar\omega$, отличные от нуля элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} T_{n,n-1}^{l_\alpha} &= -\frac{1}{2} \sqrt{n \left(n + l_\alpha + \frac{1}{2} \right)}, & T_{n,n}^{l_\alpha} &= \frac{1}{2} \left(2n + l_\alpha + \frac{3}{2} \right), \\ T_{n,n+1}^{l_\alpha} &= -\frac{1}{2} \sqrt{(n+1) \left(n + l_\alpha + \frac{3}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (8)$$

В выражениях (6) для элементов $T_{N_\alpha-1, N_\alpha}^{l_\alpha}$ используется обозначение $T^{(\alpha)}$.

Функции

$$C_n^{(\alpha)(\pm)}(q) = C_n^{l\alpha}(q) \pm iS_n^{l\alpha}(q), \quad (9)$$

где

$$C_n^l(q) = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})}} \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\pi q^l \exp(\frac{q^2}{2})} F\left(-n-l-\frac{1}{2}, -l+\frac{1}{2}; q^2\right), \quad (10)$$

$$S_n^l(q) = \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})}} \frac{q^{l+1}}{\exp(\frac{q^2}{2})} L_n^{l+\frac{1}{2}}(q^2), \quad (11)$$

образуют фундаментальную систему решений дискретного аналога уравнения Шредингера [2]. При этом пара линейно независимых решений $C_n^l(q)$, $S_n^l(q)$ удовлетворяет соотношению [9]

$$C_{n+1}^l(q)S_n^l(q) - C_n^l(q)S_{n+1}^l(q) = \frac{q}{\pi T_{n,n+1}^l}. \quad (12)$$

Выражения для элементов S -матрицы, которые получают из условия шивки для коэффициентов $b_n^{\alpha\beta}$, имеют вид

$$\begin{aligned} S_{11} = \frac{1}{\Delta(\epsilon)} \Big\{ & (C_{N_1-1}^{(1)(-)}(q) - \mathcal{P}_{11}(\epsilon)T^{(1)}C_{N_1}^{(1)(-)}(q)) \times \\ & \times (C_{N_2-1}^{(2)(+)}(q) - \mathcal{P}_{22}(\epsilon)T^{(2)}C_{N_2}^{(2)(+)}(q)) - \\ & - \mathcal{P}_{12}^2(\epsilon)T^{(1)}T^{(2)}C_{N_1}^{(1)(-)}(q)C_{N_2}^{(2)(+)}(q) \Big\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} S_{22} = \frac{1}{\Delta(\epsilon)} \Big\{ & (C_{N_1-1}^{(1)(+)}(q) - \mathcal{P}_{11}(\epsilon)T^{(1)}C_{N_1}^{(1)(+)}(q)) \times \\ & \times (C_{N_2-1}^{(2)(-)}(q) - \mathcal{P}_{22}(\epsilon)T^{(2)}C_{N_2}^{(2)(-)}(q)) - \\ & - \mathcal{P}_{12}^2(\epsilon)T^{(1)}T^{(2)}C_{N_1}^{(1)(+)}(q)C_{N_2}^{(2)(-)}(q) \Big\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$S_{12} = S_{21} = -\frac{2i\sqrt{2\epsilon}\mathcal{P}_{12}(\epsilon)}{\pi\Delta(\epsilon)}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\epsilon) = & (C_{N_1-1}^{(1)(+)}(q) - \mathcal{P}_{11}(\epsilon)T^{(1)}C_{N_1}^{(1)(+)}(q)) \times \\ & \times (C_{N_2-1}^{(2)(+)}(q) - \mathcal{P}_{22}(\epsilon)T^{(2)}C_{N_2}^{(2)(+)}(q)) - \\ & - \mathcal{P}_{12}^2(\epsilon)T^{(1)}T^{(2)}C_{N_1}^{(1)(+)}(q)C_{N_2}^{(2)(+)}(q). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon) \equiv P_{N_1-1, N_2-1}^{\alpha\beta}(\epsilon)$ — элементы так называемой $\mathcal{P}$ -матрицы.

Если строится решение (5) с асимптотикой в форме стоячих волн, т.е. полагается, что

$$b_n^{\alpha\beta}(q) = S_n^{l\alpha}(q)\delta_{\alpha\beta} + C_n^{l\alpha}(q)K_{\alpha\beta} \quad \text{при } n \geq N_\alpha - 1, \quad (17)$$

где K -матрица связана с S -матрицей [10] соотношением

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} + i\mathbf{K})(\mathbf{I} - i\mathbf{K})^{-1}, \quad (18)$$

то для элементов матрицы $\mathbf{K}$ получаются выражения

$$K_{11} = -\frac{1}{\Delta_1(\epsilon)} \left\{ (S_{N_1-1}^{l_1}(q) - \mathcal{P}_{11}(\epsilon) T^{(1)} S_{N_1}^{l_1}(q)) \times \right. \\ \times (C_{N_2-1}^{l_2}(q) - \mathcal{P}_{22}(\epsilon) T^{(2)} C_{N_2}^{l_2}(q)) - \\ \left. - \mathcal{P}_{12}^2(\epsilon) T^{(1)} T^{(2)} S_{N_1}^{l_1}(q) C_{N_2}^{l_2}(q) \right\}, \quad (19)$$

$$K_{22} = -\frac{1}{\Delta_1(\epsilon)} \left\{ (C_{N_1-1}^{l_1}(q) - \mathcal{P}_{11}(\epsilon) T^{(1)} C_{N_1}^{l_1}(q)) \times \right. \\ \times (S_{N_2-1}^{l_2}(q) - \mathcal{P}_{22}(\epsilon) T^{(2)} S_{N_2}^{l_2}(q)) - \\ \left. - \mathcal{P}_{12}^2(\epsilon) T^{(1)} T^{(2)} C_{N_1}^{l_1}(q) S_{N_2}^{l_2}(q) \right\}, \quad (20)$$

$$K_{12} = K_{21} = -\frac{q \mathcal{P}_{12}(\epsilon)}{\pi \Delta_1(\epsilon)}, \quad (21)$$

где

$$\Delta_1(\epsilon) = (C_{N_1-1}^{l_1}(q) - \mathcal{P}_{11}(\epsilon) T^{(1)} C_{N_1}^{l_1}(q)) \times \\ \times (C_{N_2-1}^{l_2}(q) - \mathcal{P}_{22}(\epsilon) T^{(2)} C_{N_2}^{l_2}(q)) - \\ - \mathcal{P}_{12}^2(\epsilon) T^{(1)} T^{(2)} C_{N_1}^{l_1}(q) C_{N_2}^{l_2}(q). \quad (22)$$

В дальнейшем символ $\mathbf{h}$ будет использоваться для обозначения $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ -матрицы ($\mathcal{N} = N_1 + N_2$), элементы h_{ij} которой определены в соответствии с правилом $h_{ij} = h_{nn'}^{\alpha\beta}$, если

$$i = n + 1 + \sum_{\alpha' < \alpha} N_{\alpha'} \quad \text{и} \quad j = n' + 1 + \sum_{\alpha' < \beta} N_{\alpha'}.$$

3. ФАЗОВОЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Из выражений (13)–(16) (или (19)–(22)) следует, что данные по рассеянию на потенциале (4) определяются элементами $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon)$, которые (если использовать спектральное разложение матрицы $\mathbf{h} = \mathbf{Z} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Z}^*$, где символом $*$ обозначена операция транспонирования, $\mathbf{Z}$ – ортогональная матрица собственных векторов, $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица собственных значений $\{\lambda_j\}$) можно представить в виде

$$\mathcal{P}_{11}(\epsilon) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{Z_{N_1,j}^2}{\epsilon - \lambda_j}, \quad (23)$$

$$\mathcal{P}_{22}(\epsilon) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{Z_{N,j}^2}{\epsilon - \lambda_j}, \quad (24)$$

$$\mathcal{P}_{12}(\epsilon) = \mathcal{P}_{21}(\epsilon) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{Z_{N_1,j} Z_{N,j}}{\epsilon - \lambda_j}. \quad (25)$$

Заметим, что в функциях $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon)$ заключена информация, необходимая для построения (с точностью до некоторого ортогонального преобразования) матриц $\mathbf{h}$ и $\mathbf{V}$. Действительно, полюсы функций $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon)$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_j\}$, а вычеты,

в свою очередь, определяют N_1 -ю и $\mathcal{N}$ -ю строки (точнее, абсолютные значения и относительные знаки компонент $Z_{N_1,j}$ и $Z_{\mathcal{N},j}$) матрицы $\mathbf{Z}$ собственных векторов.

Очевидно, что ортогональное преобразование с матрицей

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (N_1\text{-й столбец}) & (\mathcal{N}\text{-й столбец}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{Q}^{(1)}} & 0 & \boxed{\mathbf{Q}^{(2)}} & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \boxed{\mathbf{Q}^{(3)}} & 0 & \boxed{\mathbf{Q}^{(4)}} & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (N_1\text{-я строка}) \\ \\ \\ (\mathcal{N}\text{-я строка}) \end{array} \end{array} \quad (26)$$

не затрагивает N_1 -е и $\mathcal{N}$ -е компоненты собственных векторов матрицы $\mathbf{h}$ и, следовательно, оставляет неизменной $\mathcal{P}$ -матрицу. Таким образом, данное преобразование связывает матрицы фазовоэквивалентных потенциалов $\mathbf{V}(Q)$, отвечающих фиксированным N_1 , N_2 и $\hbar\omega$:

$$\mathbf{V}(Q) = \mathbf{Q}\mathbf{h}_0\mathbf{Q}^* - \mathbf{T}, \quad (27)$$

где $\mathbf{h}_0$ — фиксированная вещественная симметричная матрица размерности $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Ортогональную матрицу $\mathbf{Q}$ можно представить в виде произведения матриц отражения $\mathbf{H}(u^{(k)})$ [11], обращающих векторы $\mathbf{u}^{(k)}$, компоненты $u_{N_1}^{(k)}$, $u_{\mathcal{N}}^{(k)}$ которых равны нулю.

По известным матрице $\mathbf{A}$ собственных значений и строкам $\{Z_{N_1,j}\}$, $\{Z_{\mathcal{N},j}\}$ матрицы собственных векторов матрица $\mathbf{h}_0 = \mathbf{Z}_0\mathbf{A}\mathbf{Z}_0^*$ может быть получена с использованием матриц отражения следующим образом. Будем искать $\mathbf{Z}_0$ в виде произведения двух матриц отражения

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{H}(v)\mathbf{H}(u). \quad (28)$$

При этом компоненты нормированного вектора $\mathbf{u}$ выражаются через элементы последней строки матрицы $\mathbf{Z}_0$ соотношениями

$$u_{\mathcal{N}}^2 = \frac{1 - Z_{\mathcal{N},\mathcal{N}}}{2}, \quad u_i = -\frac{Z_{\mathcal{N},i}}{2u_{\mathcal{N}}}, \quad i = \overline{1, \mathcal{N}-1}. \quad (29)$$

Нормированный вектор $\mathbf{v}$ строится по N_1 -й строке матрицы $\mathbf{H}(v)$, элементы которой задаются выражениями

$$H(v)_{N_1,i} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} Z_{N_1,j} H(u)_{i,j}. \quad (30)$$

Таким образом, для компонент вектора $\mathbf{v}$ имеем

$$v_{N_1}^2 = \frac{1 - H(v)_{N_1,N_1}}{2}, \quad v_{\mathcal{N}} = 0, \quad v_i = -\frac{H(v)_{N_1,i}}{2v_{N_1}}, \quad i \neq N_1, \quad i \neq \mathcal{N}. \quad (31)$$

4. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть известна S -матрица $\mathbf{S}(E)$ при всех значениях $E > 0$ и пусть заданы энергетические положения связанных состояний системы. Попытаемся построить связанные состояния и потенциал (4), описывающий данные по рассеянию в некотором энергетическом интервале $[0, E_0]$ (за пределами которого матрица $\mathbf{S}(E)$ близка к единичной).

В полной аналогии с одноканальным случаем [1] зафиксируем некоторые значения параметров $\hbar\omega$, N_1 , N_2 и определим на положительной полуоси энергий ϵ функции $\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,\beta}$, обратив для этого выражения (19)–(21) относительно элементов $\mathcal{P}$ -матрицы:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{11}(\epsilon) = \frac{1}{T^{(1)}\Delta_2(\epsilon)} & \left\{ (S_{N_1-1}^{l_1}(q) + C_{N_1-1}^{l_1}(q)K_{11})(S_{N_2}^{l_2}(q) + C_{N_2}^{l_2}(q)K_{22}) - \right. \\ & \left. - C_{N_1-1}^{l_1}(q)C_{N_2}^{l_2}(q)K_{12}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{22}(\epsilon) = \frac{1}{T^{(2)}\Delta_2(\epsilon)} & \left\{ (S_{N_1}^{l_1}(q) + C_{N_1}^{l_1}(q)K_{11})(S_{N_2-1}^{l_2}(q) + C_{N_2-1}^{l_2}(q)K_{22}) - \right. \\ & \left. - C_{N_1}^{l_1}(q)C_{N_2-1}^{l_2}(q)K_{12}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{12}(\epsilon) = \tilde{\mathcal{P}}_{21}(\epsilon) = -\frac{\sqrt{2\epsilon}K_{12}}{\pi T^{(1)}T^{(2)}\Delta_2(\epsilon)}, \quad (34)$$

где

$$\Delta_2(\epsilon) = (S_{N_1}^{l_1}(q) + C_{N_1}^{l_1}(q)K_{11})(S_{N_2}^{l_2}(q) + C_{N_2}^{l_2}(q)K_{22}) - C_{N_1}^{l_1}(q)C_{N_2}^{l_2}(q)K_{12}^2. \quad (35)$$

Как и в потенциальном рассеянии [1], проблема сводится к построению рациональных функций $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(\epsilon)$ (23)–(25), аппроксимирующих функции $\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha\beta}(\epsilon)$ (32)–(34) на интервале $[0, \epsilon_0]$. Свойства вычетов последних мы рассмотрим подробнее. Полюсы матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$ совпадают с нулями $\{\tilde{\lambda}_j\}$ знаменателя $\Delta_2(\epsilon)$ (35), т.е. при $\epsilon = \tilde{\lambda}_j$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \left(S_{N_1}^{l_1}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j}) + C_{N_1}^{l_1}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j})K_{11}(\tilde{\lambda}_j) \right) \left(S_{N_2}^{l_2}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j}) + C_{N_2}^{l_2}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j})K_{22}(\tilde{\lambda}_j) \right) = \\ & = C_{N_1}^{l_1}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j})C_{N_2}^{l_2}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j})K_{12}^2(\tilde{\lambda}_j). \end{aligned} \quad (36)$$

С учетом (36) получаем для вычетов

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j^{(1)} = \operatorname{Res}_{\epsilon=\tilde{\lambda}_j} \tilde{\mathcal{P}}_{11}(\epsilon) & = \\ & = \frac{\sqrt{2\tilde{\lambda}_j} \left(S_{N_2}^{l_2}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j}) + C_{N_2}^{l_2}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j})K_{22}(\tilde{\lambda}_j) \right)}{\pi(T^{(1)})^2 C_{N_1}^{l_1}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j})} \operatorname{Res}_{\epsilon=\tilde{\lambda}_j} \frac{1}{\Delta_2(\epsilon)}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_j^{(2)} = \operatorname{Res}_{\epsilon=\tilde{\lambda}_j} \tilde{\mathcal{P}}_{22}(\epsilon) & = \\ & = \frac{\sqrt{2\tilde{\lambda}_j} \left(S_{N_1}^{l_1}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j}) + C_{N_1}^{l_1}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j})K_{11}(\tilde{\lambda}_j) \right)}{\pi(T^{(2)})^2 C_{N_2}^{l_2}(\sqrt{2\tilde{\lambda}_j})} \operatorname{Res}_{\epsilon=\tilde{\lambda}_j} \frac{1}{\Delta_2(\epsilon)}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\mathcal{R}_j^{(12)} = \operatorname{Res}_{\epsilon=\tilde{\lambda}_j} \tilde{\mathcal{P}}_{12}(\epsilon) = -\frac{\sqrt{2\tilde{\lambda}_j}K_{12}(\tilde{\lambda}_j)}{\pi T^{(1)}T^{(2)}} \operatorname{Res}_{\epsilon=\tilde{\lambda}_j} \frac{1}{\Delta_2(\epsilon)}. \quad (39)$$

Из уравнения (36) для полюсов матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$ и выражений (37)–(39) следует соотношение, связывающее вычеты,

$$\mathcal{R}_j^{(1)} \mathcal{R}_j^{(2)} = (\mathcal{R}_j^{(12)})^2. \quad (40)$$

Требование положительности величин $\{\mathcal{R}_j^{(1)}\}$ и $\{\mathcal{R}_j^{(2)}\}$, необходимое для возможного отождествления последних соответственно с квадратами компонент $\{Z_{1,j}\}$ и $\{Z_{\mathcal{N},j}\}$, удовлетворяется при разделении корней числителя корнями знаменателя у функций $\tilde{\mathcal{P}}_{11}(\epsilon)$ и $\tilde{\mathcal{P}}_{22}(\epsilon)$. Последнее, как легко показать с помощью асимптотических выражений для $C_n^l(q)$ и $S_n^l(q)$ при $n \rightarrow \infty$ [9], имеет место при достаточно больших N_1, N_2 .

Необходимым условием совпадения функций $\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,\beta}(\epsilon)$ и $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}(\epsilon)$ на интервале $[0, \epsilon_0]$ является совпадение на данном интервале полюсов и вычетов этих функций. Подробнее остановимся на свойствах полюсов матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$. При этом нас будет интересовать поведение последних в случае появления в системе связанных состояний. Рассмотрим с этой целью случай потенциального s -волнового рассеяния на потенциале (4) ранга N , когда матрица $\tilde{\mathcal{P}}$ сводится к единственной функции [1]

$$\tilde{\mathcal{P}}_N(\epsilon) = \frac{1}{T_{N-1,N}^0} \frac{\tilde{C}_{N-1,0}(\epsilon)}{\tilde{C}_{N,0}(\epsilon)}, \quad (41)$$

где

$$\tilde{C}_{n,l}(\epsilon) = \cos \delta_l(\epsilon) S_n^l(q) + \sin \delta_l(\epsilon) C_n^l(q). \quad (42)$$

При отсутствии связанных состояний корням $\{\tilde{\lambda}_n > 0\}$ знаменателя $\tilde{C}_{N,0}(\epsilon)$ можно поставить в соответствие корни $\{\lambda_n^{(0)}, n = \overline{1, N}\}$ синусоподобного решения $S_N^0(q)$ ($q_n^{(0)} = \sqrt{2\lambda_n^{(0)}}$). Последние совпадают с корнями полинома Лагерра $L_N^{1/2}(2\epsilon)$, входящего в определение (11) функции $S_N^0(q)$. Переход к большим значениям N позволяет воспользоваться следующими более наглядными асимптотическими выражениями [9]:

$$\begin{aligned} S_N^0(q) &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}(4N+3)^{1/4}} \sin(\sqrt{2(4N+3)}\epsilon), \\ \tilde{C}_{N,0}(\epsilon) &\approx \frac{2}{\sqrt{\pi}(4N+3)^{1/4}} \sin(f_N(\epsilon)) \end{aligned} \quad (43)$$

и

$$f_N(\epsilon) = \sqrt{2(4N+3)}\epsilon + \delta(\epsilon), \quad (44)$$

из которых следует, что достаточным условием отмеченного соответствия корней, очевидно, является требование $f'_N(\epsilon) > 0$ на интервале $[0, \epsilon_0]$, поскольку $\{\lambda_n^{(0)}\}$ и $\{\tilde{\lambda}_n\}$ удовлетворяют асимптотическим уравнениям

$$\sqrt{2(4N+3)\lambda_n^{(0)}} = n\pi, \quad n = \overline{1, N}, \quad (45)$$

$$f_N(\tilde{\lambda}_n) = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (46)$$

Рис. 1

и $f_N(0) = \delta(0) = 0$ (т. к. связанные состояния отсутствуют). Заметим, что справедливость неравенств $f'_{N-1}(\epsilon) > 0$, $f'_N(\epsilon) > 0$, как было показано в [1], является достаточным условием разделения корней числителя корнями знаменателя выражения (41) (или положительности вычетов функции $\tilde{P}_N(\epsilon)$).

Пусть в системе присутствует $M \geq 1$ связанных состояний $\{\varepsilon_i < 0, i = \overline{1, M}\}$, тогда $\delta(0) - \delta(\infty) = M\pi$. На рис. 1 схематически изображено графическое решение уравнений (45) и (46). Здесь левая часть $f_N(\epsilon)$ уравнения (46), фаза $\delta(\epsilon)$ и левая часть уравнения (45) изображены соответственно сплошной, пунктирной и штриховой линиями. Из уравнений (45), (46) и условия $\delta(0) = M\pi$ следует, что при $f'_N(\epsilon) > 0$ у функции $\tilde{C}_{N,0}(\epsilon)$ “исчезает” M корней, которые можно было бы сопоставить с первыми M значениями $\{\lambda_i^{(0)}, i = \overline{1, M}\}$ (см. рис. 1).

Энергии $\{\varepsilon_j\}$ связанных состояний удовлетворяют [1] уравнениям

$$\mathcal{P}_N(\varepsilon_j) = \frac{1}{T_{N-1,N}^0} \frac{C_{N-1}^{0(+)}(i\sqrt{-2\varepsilon_j})}{C_N^{0(+)}(i\sqrt{-2\varepsilon_j})}, \quad (47)$$

которые при больших N [9] принимают вид

$$\mathcal{P}_N(\varepsilon_j) = \frac{1}{T_{N-1,N}^0} \exp\left(\sqrt{\frac{-2\varepsilon_j}{N}}\right). \quad (48)$$

Левая часть уравнения (48) есть [1] по определению

$$\mathcal{P}_N(\epsilon) = \sum_{j=1}^N \frac{Z_{N,j}^2}{\epsilon - \lambda_j}$$

и при всех $\lambda_j > 0$ в области $\epsilon < 0$ ведет себя как ϵ^{-1} . Правая часть (48) здесь также отрицательна и возрастает по абсолютной величине. Очевидно, что в случае $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, N}$, существует единственный корень уравнения (47), если

$$\mathcal{P}_N(0) < \frac{1}{T_{N-1,N}^0} \frac{C_{N-1}^{0(+)}(0)}{C_N^{0(+)}(0)} = -\frac{2}{N}.$$

Рис. 2

Таким образом, с положительными $\{\lambda_j\}$ можно описать не более одного связанного состояния. Если число M связанных состояний превышает единицу, то для описания каждого состояния ε_i (кроме, может быть, первого) в $\mathcal{P}_N(\epsilon)$ необходимо присутствие слагаемого $Z_{N,i}^2/(\epsilon - \lambda_i)$ с отрицательным параметром λ_i ($\varepsilon_i < \lambda_i < 0$). Эта необходимость

в отрицательных параметрах у функции $\mathcal{P}_N(\epsilon)$ (дробно-рационального образа функции $\tilde{\mathcal{P}}_N(\epsilon)$) согласуется с “исчезновением” полюсов у $\tilde{\mathcal{P}}_N(\epsilon)$ на интервале $[0, \epsilon_0]$.

При отсутствии связанных состояний имеет место соответствие между корнями свободных решений $S_{N_1}^{l_1}$, $S_{N_2}^{l_2}$ и полюсами матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$; причем в области $\epsilon > \epsilon_0$ полюсы и соответствующие им корни практически совпадают, поскольку здесь $\mathbf{S} \approx \mathbf{I}$. Пусть за пределами интервала $[0, \epsilon_0]$ лежат $\mathcal{K}$ полюсов $\tilde{\lambda}_n$. Тогда (подобно случаю потенциального рассеяния [1]) можно фиксировать “внутренние” ($j \leq \mathcal{N} - \mathcal{K}$) параметры, положив $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ и $Z_{N_1,j} = \sqrt{\mathcal{R}_j^{(1)}}$, $Z_{\mathcal{N},j} = \text{sign}(\mathcal{R}_j^{(12)}) \sqrt{\mathcal{R}_j^{(2)}}$ при $j = \overline{1, \mathcal{N} - \mathcal{K}}$. Ориентиром для определения “внешних” ($n > \mathcal{N} - \mathcal{K}$) параметров $\mathcal{P}$ -матрицы будут служить полюсы $\{\tilde{\lambda}_n, n = \overline{\mathcal{N} - \mathcal{K} + 1, \mathcal{N}}\}$ и вычеты $\{\mathcal{R}_n^{(1)}, \mathcal{R}_n^{(12)}, \mathcal{R}_n^{(2)}, n = \overline{\mathcal{N} - \mathcal{K} + 1, \mathcal{N}}\}$ матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$. При этом число $\mathcal{K}$ должно быть достаточно большим ($\mathcal{K}_{\min} = 2$), чтобы удовлетворялись условия ортонормированности строк матрицы $\mathbf{Z}$ собственных векторов:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} Z_{N_1,j}^2 = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} Z_{\mathcal{N},j}^2 = 1, \quad \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} Z_{N_1,j} Z_{\mathcal{N},j} = 0. \quad (49)$$

Величины $\hbar\omega$, N_1 и N_2 являются параметрами задачи. Причем, если задаться целью минимизировать ранг $\mathcal{N}$ потенциала (4), то величина $\hbar\omega$ остается практически единственным вариационным параметром, оптимальное значение $\hbar\omega_0$ которого позволяет получить наилучшее (для заданных N_1 и N_2) описание данных по рассеянию. Более тонкая “настройка” осуществляется выбором “внешних” параметров $\{\lambda_n\}$. В случае $\hbar\omega = \hbar\omega_0$ вариации $\delta\lambda_n$ являются малыми по сравнению с соответствующими начальными значениями $\tilde{\lambda}_n$.

Если в системе присутствуют связанные состояния $\epsilon_j < 0$, $j = \overline{1, \mathcal{M}}$, то “недостаток” полюсов у матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$ внутри интервала $[0, \epsilon_0]$ следует восполнить отрицательными параметрами $\{\lambda_j\}$. Дополнительными условиями здесь являются $\mathcal{M}$ уравнений на связанные состояния [9], имеющие вид

$$\begin{aligned} \Delta(\epsilon_j) = & (C_{N_1-1}^{(1)(+)}(i\sqrt{-2\epsilon_j}) - \mathcal{P}_{11}(\epsilon_j)T^{(1)}C_{N_1}^{(1)(+)}(i\sqrt{-2\epsilon_j})) \times \\ & \times (C_{N_2-1}^{(2)(+)}(i\sqrt{-2\epsilon_j}) - \mathcal{P}_{22}(\epsilon_j)T^{(2)}C_{N_2}^{(2)(+)}(i\sqrt{-2\epsilon_j})) - \\ & - \mathcal{P}_{12}^2(\epsilon_j)T^{(1)}T^{(2)}C_{N_1}^{(1)(+)}(i\sqrt{-2\epsilon_j})C_{N_2}^{(2)(+)}(i\sqrt{-2\epsilon_j}) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Обращает на себя внимание аналогия предлагаемого метода и способа получения исходной спектральной информации $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$ (E_λ – энергетические положения, γ_λ – приведенные ширины R -резонансов) для восстановления потенциала $v(n)$ в рамках конечно-разностного аналога R -матричной теории рассеяния [12].

5. ПРИМЕР

Выше использовался метод построения потенциала (4), описывающего взаимодействие в np -системе, когда последняя находится в триплетном спиновом состоянии и обладает полным моментом $J = 1$. Отличные от нуля недиагональные по индексу канала элементы $V_{nn'}^{\alpha \neq \beta}$ матрицы потенциала в этом случае имитируют тензорное взаимодействие, связывающее парциальные амплитуды с орбитальными моментами $l_1 = 0$ и $l_2 = 2$.

Значения $\bar{\delta}_{1,0}$, $\bar{\delta}_{1,2}$ фаз рассеяния и параметра смешивания $\bar{\varepsilon}_1$ (в “ядерной” параметризации [13]) при $E_{\text{лаб}} \leq 350$ МэВ взяты из работы [7]. При $E_{\text{лаб}} > 350$ МэВ величины $\bar{\delta}_{1,0}$, $\bar{\delta}_{1,2}$, $\bar{\varepsilon}_1$ экстраполировались функциями с затухающей асимптотикой. Результаты расчета, отвечающие потенциалу (4) с параметрами, представленными в таблице, изображены на рис. 2 сплошной линией; крестиками обозначены данные работы [7].

В таблице приведены значения полюсов $\{\tilde{\lambda}_j\}$, вычетов $\{\mathcal{R}_j^{(1)}\}$, $\{\mathcal{R}_j^{(2)}\}$ матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$, параметров $\{\lambda_j\}$, $\{Z_{N_1,j}^2\}$, $\{Z_{N,j}^2\}$ и знаков произведений $\{s_j = \text{sign}(Z_{N_1,j} Z_{N,j})\}$, входящих в выражения (23)–(25) для элементов $\mathcal{P}$ -матрицы, отвечающей потенциалу (4) с $\hbar\omega = 62$ МэВ, $l_1 = 0$, $l_2 = 2$, $N_1 = N_2 = 4$.

j	$\tilde{\lambda}_j$	λ_j	$\mathcal{R}_j^{(1)}$	$Z_{N_1,j}^2$	$\mathcal{R}_j^{(2)}$	$Z_{N,j}^2$	s_j
	0.00320263		0.000388487		0.000396550		
	0.00414204		−0.00322305		−0.000203556		
1	0.0125593	0.00719953	0.00988730	0.00875	0.000115510	0.0000536257	+
2	0.799503	0.799503	0.0186411	0.0186411	0.0543272	0.0543272	−
3	0.838921	0.838921	0.0953768	0.0953768	0.0119322	0.0119322	+
4	2.10551	2.10551	0.00280480	0.00280480	0.167453	0.167453	−
5	2.51864	2.51864	0.329940	0.329940	0.00278319	0.00278319	+
6	4.04111	4.0265	0.00397203	0.00397203	0.290857	0.290857	−
7	5.18711	5.25	0.550008	0.539765	0.00432657	0.00319449	+
8	6.81030	6.85	0.00443192	0.00075	0.480994	0.469400	−

Как уже отмечалось, при достаточно больших значениях N_1 , N_2 (и отсутствии связанных состояний в системе) имеет место соответствие между полюсами матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$ и корнями произведения $S_{N_1}^{l_1}$, $S_{N_2}^{l_2}$ (в которое вырождается функция $\Delta_2(\epsilon)$ (35) при выключении взаимодействия). Причем достаточное условие существования такого соответствия, полученное для случая потенциального рассеяния [1], в рассматриваемом примере может быть записано в виде неравенств

$$\frac{f_{N_\alpha}(\epsilon)}{d\epsilon} > \frac{f_{N_\alpha-1}(\epsilon)}{d\epsilon} > 0,$$

$$f_{N_\alpha}(\epsilon) = \sqrt{2(4N_\alpha + 2l_\alpha + 3)}\epsilon + \delta_\alpha\epsilon - \frac{\pi l_\alpha}{2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

поскольку связь между каналами здесь довольно слаба, что отражается в малости параметра смешивания $\bar{\varepsilon}_1$ (см. рис. 2). Нашей целью было построение потенциала (4), задаваемого минимальным числом параметров (т. е. матрицей минимального ранга $\mathcal{N}$). Легко убедиться в том, что для $N_1 = 4$ и $\hbar\omega = 62$ МэВ производная $f'_{N_1}(\epsilon)$ отрицательна в окрестности точки $\epsilon = 0$, где фаза $\bar{\delta}_{1,0}(\epsilon)$ убывает особенно быстро. В результате соответствие между полюсами матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$ и корнями свободных решений $S_{N_1}^{l_1}$, $S_{N_2}^{l_2}$ оказывается нарушенным, что выражается в появлении у $\tilde{\mathcal{P}}$ двух “лишних” полюсов в окрестности начала координат оси энергий. Эти “лишние” полюсы и соответствующие им вычеты (представленные в первых двух строках таблицы) мы исключили из рассмотрения.

О том, насколько значение $\hbar\omega = 62$ МэВ близко к “оптимальному” для данных $N_1 = N_2 = 4$, можно судить по малости различия “внешних” (лежащих правее интервала

$[0, \epsilon_0 = 2.82452])$ параметров $\{\lambda_6, \lambda_7, \lambda_8\}$ $\mathcal{P}$ -матрицы и соответствующих полюсов $\{\lambda_n, n \geq 6\}$ матрицы $\tilde{\mathcal{P}}$.

Значение искомого параметра λ_1 (положительное) получено с использованием уравнения (50) на связанное состояние с энергией $\varepsilon = -2.22458/\hbar\omega = -0.03588025$. Поведение фаз рассеяния и особенно параметра смешивания в окрестности начала координат оси энергий оказалось довольно чувствительным к выбору значений параметров $Z_{N_1,1}$ и $Z_{\mathcal{N},1}$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для устранения существующей в нашем подходе неоднозначности в определении матрицы потенциала (4) необходима дополнительная исходная информация. В случае нуклон-нуклонной системы в качестве такой можно было бы использовать волновую функцию связанного состояния дейтрона (полученную, например, из численного расчета с реалистичным нуклон-нуклонным потенциалом [7]). В общем случае $\mathcal{N} - 2$ “внутренних” коэффициентов [9] ($N_1 - 1$ для s -состояния и $N_2 - 1$ для d -состояния) разложения волновой функции по базисным осцилляторным функциям (2) недостаточно для однозначного определения элементов искомой матрицы $\mathbf{Q}$ (26) фазовоэквивалентного преобразования, например, если $\mathbf{Q}$ не является матрицей отражений, задаваемой $\mathcal{N} - 2$ отличными от нуля компонентами обращаемого ею вектора [11]. Таким образом, и в этом случае сохраняется возможность строить нуклон-нуклонные потенциалы (4) с различающимися немассовыми свойствами.

Благодарности. Автор выражает благодарность А. И. Мазуру и А. М. Широкову за полезные обсуждения и помощь в работе.

Список литературы

- [1] С. А. Зайцев. ТМФ. 1998. Т. 115. № 2. С. 263.
- [2] H. A. Yamani, L. Fishman. J. Math. Phys. 1975. V. 16. № 2. P. 410.
- [3] Г. Ф. Филиппов. ЯФ. 1980. Т. 32. С. 932; 1981. Т. 33. С. 928.
- [4] Ю. И. Нечаев, Ю. Ф. Смирнов. ЯФ. 1982. Т. 35. С. 1385.
- [5] J. Revai, M. Sotona, J. Zofka. J. Phys. G. 1985. V. 11. № 4. P. 745.
- [6] P. Navratil, B. R. Barrett. Phys. Rev. C. 1996. V. 54. № 6. P. 2986.
- [7] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, J. J. de Swart. Phys. Rev. C. 1994. V. 49. P. 2950.
- [8] J. T. Broad, W. P. Reinhardt. J. Phys. B. 1976. V. 9. № 9. P. 1491.
- [9] С. А. Зайцев, Ю. Ф. Смирнов, А. М. Широков. ТМФ. 1998. Т. 117. № 2. С. 227.
- [10] Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1966.
- [11] Б. Парлетт. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
- [12] Б. Н. Захарьев, А. А. Сузько. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [13] В. В. Бабинов. Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 18.III.1999 г.