Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Лобанов, О. С. Павлова, О решениях классического уравнения движения
спина в электромагнитных полях, *ТМФ*, 1999, том 121, номер 3, 509–518

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:51:04

© 1999 г.

А. Е. Лобанов*, О. С. Павлова*

О РЕШЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПИНА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

На основе уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди исследована эволюция спина заряженных частиц в электромагнитных полях специального вида. Для некоторых типов неоднородных полей найдена точная аналитическая зависимость вектора спина от четырехмерной скорости частицы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию динамики спина заряженной частицы при ее движении в электромагнитных полях. Для описания движения спина используется классическое уравнение Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ). Оно определяет поведение спина на траекториях, задаваемых решениями уравнения Лоренца. Уравнение БМТ было получено [1] в предположении, что частицы находятся в постоянных и однородных магнитном и электрическом полях. Позднее было установлено, что для частиц со спином $1/2$ это уравнение следует из уравнения Дирака (с учетом аномального члена Паули) в квазиклассическом пределе [2], а также были даны обоснования уравнения БМТ для более широкого класса полей, чем в [1], и указаны границы его применимости (см., например, [3, 4]).

К сожалению, точных решений уравнения БМТ известно немного [5–10] (в статье [5] даны обзор истории вопроса и обширный список литературы). Это связано либо с невозможностью найти решение уравнения Лоренца в квадратурах, либо с невозможностью провести процедуру обращения, чтобы получить явную аналитическую зависимость координат и скорости частицы от собственного времени. Поэтому в ряде работ при исследовании общих закономерностей динамики спина предполагалось, что частица находится на заданной траектории [11–14]. Однако, когда поля на траектории с помощью уравнения Лоренца однозначно определяются как функции скорости и ускорения частицы, в ряде случаев возможно получить и точные формулы. Изучению данного вопроса и посвящена эта статья.

* Московский государственный университет, Москва, Россия

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ СПИНА

Движение частицы с массой m и зарядом e в электромагнитных полях с тензором $F^{\mu\nu}$ описывается релятивистским уравнением Лоренца

$$\frac{\partial u^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (1)$$

Здесь u^μ – 4-скорость частицы, τ – собственное время.

Эволюция вектора спина S^μ задается уравнением БМТ

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} \frac{g}{2} F^{\mu\nu} S_\nu + \frac{e}{mc} \frac{g-2}{2} u^\mu F^{\alpha\beta} u_\beta S_\alpha. \quad (2)$$

В правой части этого уравнения первое слагаемое описывает взаимодействие собственного магнитного момента частицы $\mu = e\hbar g/4mc$ с электромагнитным полем, а второе учитывает дополнительное влияние аномального магнитного момента $\mu' = e\hbar(g-2)/4mc$ на динамику спина.

Перепишем эти уравнения в матричной форме, обозначив $(e/mc)F^\mu{}_\nu \rightarrow F$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Fu, \\ \dot{S} &= \frac{g}{2} FS - \frac{g-2}{2} u(uFS). \end{aligned} \quad (3)$$

Следует отметить, что решения системы (3) удовлетворяют условиям $(Su) = 0$, $(uu) = 1$, $(SS) = -1$.

Приведем уравнения (3) к более простому виду. С этой целью рассмотрим оператор сдвига по траектории $\Lambda(\tau, \tau_0) \equiv \Lambda$ (впервые такой оператор был введен в работе [10]), который переводит скорость частицы $u(\tau_0) \equiv u_0$ в некоторый момент времени τ_0 в скорость $u(\tau) \equiv u$ в текущий момент времени τ :

$$u(\tau) = \Lambda(\tau, \tau_0)u(\tau_0).$$

Предположим, что уравнение (1) решено, т.е. найдена зависимость $x^\mu = x^\mu(\tau)$, а следовательно, и $F = F(\tau)$. Тогда из (3) можно получить уравнение, которому удовлетворяет оператор Λ :

$$\dot{\Lambda} = F\Lambda, \quad \Lambda(\tau_0, \tau_0) = I. \quad (4)$$

Очевидно, что $\Lambda^{-1} = G\Lambda^T G$, где G – метрический тензор, т.е. Λ – преобразование Лоренца.

Сделав преобразование $\Lambda^{-1}S = S_1(\tau, \tau_0) \equiv S_1$, получаем из (3)

$$\dot{S}_1 = \frac{g-2}{2} P F_1 S_1, \quad (5)$$

где $F_1 = \Lambda^{-1}F\Lambda$, $P = I - u_0 \otimes u_0$ – оператор проецирования на пространственноподобные нормали. Поскольку $(uS) = (u_0 S_1) = 0$, то $PS_1 = S_1$ и уравнение (5) переписывается следующим образом:

$$\dot{S}_1 = \frac{g-2}{2} P F_1 P S_1.$$

Пусть Λ_0^{-1} – любое преобразование Лоренца, переводящее в систему покоя в момент времени τ_0 :

$$\Lambda_0^{-1}u_0 = u_R, \quad u_R = (1, 0, 0, 0).$$

Обозначим через $\Lambda_0^{-1}S_1 \equiv S_0$ спин в сопутствующей системе отсчета

$$S_0 = (0, \vec{S}_0). \quad (6)$$

Уравнение для S_0 имеет вид

$$\dot{S}_0 = \frac{g-2}{2}F_0S_0, \quad (7)$$

где

$$F_0 = \frac{1}{2}(F_2 - F_2^T), \quad F_2 = \Lambda_0^{-1}F_1\Lambda_0 = \Lambda_0^{-1}\Lambda^{-1}F\Lambda\Lambda_0,$$

а F_0 – тензор магнитного поля в сопутствующей системе.

Введем резольвенту $R_0(\tau, \tau_0) \equiv R_0$ для уравнения (7): $R_0(\tau, \tau_0)S_0(\tau_0) = S_0(\tau)$. Тогда

$$\dot{R}_0 = \frac{g-2}{2}F_0R_0, \quad R_0(\tau_0, \tau_0) = I. \quad (8)$$

Очевидно, что вследствие соотношения (6) временные компоненты матрицы R_0 , кроме диагональной, равны нулю. А поскольку $F_0^T = -F_0$, то ее пространственные компоненты образуют матрицу $R_{0S} \in O(3)$. Итак, с помощью преобразования $\Lambda_0^{-1}\Lambda^{-1}$ наша задача сведена к уравнению (8).

Если найдено решение уравнения (8), то можно построить резольвенту для уравнения (2):

$$R_1 = \Lambda(\tau, \tau_0)\Lambda_0R_0\Lambda_0^{-1}\Lambda^{-1}(\tau_0, \tau_0) = \Lambda\Lambda_0R_0\Lambda_0^{-1},$$

т.к. $\Lambda^{-1}(\tau_0, \tau_0) = I$.

Как хорошо известно, наблюдаемой величиной является спин в лабораторной системе – пространственные компоненты вектора $\vec{S}$, трансформированного в мгновенную систему покоя [15, 16]. Если через $L(\tau)$ обозначить оператор, осуществляющий преобразование Лоренца без вращения в момент τ из системы покоя в лабораторную систему $L(\tau)u_R = u$, то оператор эволюции для $S_L = (0, \vec{S})$ записывается как

$$R = L^{-1}(\tau)R_1L(\tau_0). \quad (9)$$

Оператор R имеет ту же структуру, что и R_0 , т.е. определяет чистое вращение.

Уравнения (4) и (8) удобнее решать в комплексной форме. В силу локального изоморфизма группы $L_+^\uparrow$ и группы $SL(2, C)$ поставим в соответствие любому оператору $A \in L_+^\uparrow$ оператор $\tilde{A} \in SL(2, C)$, построенный стандартным образом по элементам матрицы A (в дальнейшем мы будем следовать обозначениям книги [16]). Тогда уравнения (4) и (8) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\dot{\tilde{A}} = \tilde{F}\tilde{A}, \quad \tilde{A}(\tau_0, \tau_0) = \sigma_0, \quad (10)$$

$$\dot{\tilde{R}}_0 = \frac{g-2}{2}\tilde{F}_0\tilde{R}_0, \quad \tilde{R}_0(\tau_0, \tau_0) = \sigma_0. \quad (11)$$

Здесь

$$\underset{\sim}{F} = i \frac{\vec{\sigma}}{2} (\vec{H} - i \vec{E}),$$

$\vec{E}, \vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, $\sigma_0, \vec{\sigma}$ – матрицы Паули,

$$\underset{\sim}{F}_0 = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{F}_2 - \underset{\sim}{F}_2^+), \quad \underset{\sim}{F}_2 = \underset{\sim}{\Lambda}_0^{-1} \underset{\sim}{\Lambda}^{-1} \underset{\sim}{F} \underset{\sim}{\Lambda} \underset{\sim}{\Lambda}_0.$$

Поскольку матрица $\underset{\sim}{F}_0$ антиэрмитова, то $\underset{\sim}{R}_0 \in SU(2)$.

Таким образом, уравнение БМТ приведено к виду, удобному для исследования поведения спина при движении частицы в электромагнитных полях.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Используем полученные результаты для исследования поведения спина в конкретных полях. Будем считать, что тензор поля имеет постоянный изотропный собственный вектор n^μ , соответствующий собственному значению E , т.е.

$$F n = E n, \quad n^2 = 0. \quad (12)$$

Выбор этого класса полей не случаен, поскольку большинство точных решений уравнения Лоренца [17] и почти все известные точные решения уравнения БМТ получены для полей данного типа.

Чтобы записать тензор поля, удовлетворяющий (12), в явном виде, введем стандартный базис в пространстве Минковского:

$$\begin{aligned} n &= (1, \vec{e}_3), & n_+ &= \frac{1}{2}(1, -\vec{e}_3), \\ a_1 &= (0, \vec{e}_1), & a_2 &= (0, \vec{e}_2). \end{aligned}$$

Тогда $F = F_{\parallel} + F_{\perp}$, где

$$\begin{aligned} F_{\perp} &= g_1(n \wedge a_1) + g_2(n \wedge a_2), \\ F_{\parallel} &= E(n \wedge n_+) + H(a_2 \wedge a_1), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} E &= (\vec{E} \vec{e}_3), & H &= (\vec{H} \vec{e}_3), \\ g_1 &= -(\vec{E} \vec{e}_1) = -(\vec{H} \vec{e}_2), & g_2 &= -(\vec{E} \vec{e}_2) = (\vec{H} \vec{e}_1). \end{aligned}$$

По традиции [17] поля, определяемые тензором $F_{\perp}$, называются скрещенными, а тензором $F_{\parallel}$ – продольными. Отсюда для $\underset{\sim}{F}$ можно получить следующее выражение:

$$\underset{\sim}{F} = \sigma_3 g_3 - \frac{1}{2} \sigma_+ g_- , \quad (13)$$

где

$$g_3 = \frac{1}{2}(E + iH), \quad g_{\pm} = g_1 \pm ig_2, \quad \sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2.$$

Поскольку $\tilde{F}$ – треугольная матрица, то уравнение (10) формально разрешимо. Для выбранных полей решение уравнения (10), удовлетворяющее начальному условию $\tilde{\Lambda}(\tau_0, \tau_0) = I$, имеет следующий вид:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} a & ab \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -ab \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$a = \exp \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau} g_3 d\tau \right\}, \quad b = - \int_{\tau_0}^{\tau} g_- a^{-2} d\tau.$$

Поскольку $\tilde{\Lambda}$ – треугольная матрица, целесообразно и $\tilde{\Lambda}_0$ выбрать в такой же форме. Наиболее общий вид преобразования Лоренца из системы покоя в лабораторную систему, имеющего матрицу треугольной формы, можно записать как

$$\tilde{\Lambda}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u_0^-}} e^{i\theta_0/2} & \frac{u_0^1 - iu_0^2}{\sqrt{u_0^-}} e^{-i\theta_0/2} \\ 0 & \sqrt{u_0^-} e^{-i\theta_0/2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь θ_0 – произвольное действительное число, а $u_0^- \equiv u^-(\tau_0) \equiv u_0^0 - u_0^3$.

Вернемся к уравнению (11). Используя матрицу $\tilde{\Lambda}$ из (14) и матрицу $\tilde{\Lambda}_0$ из (15) и вводя обозначение $d = (g_3 b - a^{-2} g_- / 2)$, получаем

$$F_0 = \frac{1}{2} \{ iH\sigma_3 + \sigma_+ [g_3(u_0^1 - iu_0^2) + du_0^-] e^{-i\theta_0} - \sigma_- [g_3^*(u_0^1 + iu_0^2) + d^* u_0^-] e^{i\theta_0} \}. \quad (16)$$

Важно, что в формуле (16) все поля, кроме продольного магнитного, можно записать через скорости и ускорения частиц в текущий момент времени τ , т.е. через характеристики движения. Для этого используем закон преобразования матрицы скоростей $\tilde{u} = \sigma_{\mu} u^{\mu}$ при переходе к другому моменту времени:

$$\tilde{u} = \tilde{\Lambda} u_0 \tilde{\Lambda}^+. \quad (17)$$

Используя матрицу (14), можно получить

$$\begin{aligned} u^1 - iu^2 &= (u^1 + iu^2)^* = \exp \left\{ +i \int_{\tau_0}^{\tau} H d\tau \right\} [(u_0^1 - iu_0^2) + u_0^- b], \\ u^- &= u_0^- \exp \left\{ - \int_{\tau_0}^{\tau} E d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{i}{2} H \sigma_3 + \frac{1}{4} \sigma_+ \exp \left\{ -i \left(\int_{\tau_0}^{\tau} H d\tau + \theta_0 \right) \right\} u^- \left(\frac{u^1 - iu^2}{u^-} \right)' - \\ &\quad - \frac{1}{4} \sigma_- \exp \left\{ +i \left(\int_{\tau_0}^{\tau} H d\tau + \theta_0 \right) \right\} u^- \left(\frac{u^1 + iu^2}{u^-} \right)'. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение уравнения (11) с F_0 , определенным формулой (19), дает оператор конечных вращений $\tilde{R}_0$, который позволяет определить эволюцию спина в сопутствующей системе. В лабораторной же системе в момент τ оператор конечных вращений имеет вид (см. (9))

$$\tilde{R} = \tilde{L}^{-1}(\tau) \tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}_0 \tilde{R}_0 \tilde{\Lambda}_0^{-1} \tilde{L}(\tau_0). \quad (20)$$

Рассмотрим подробнее операторы, входящие в преобразование (20). Оператор $\tilde{\Lambda}_0$ как оператор преобразования Лоренца может быть разбит на буст $\tilde{L}(\tau_0)$ и два поворота $\tilde{U}(\tau_0)$ и $\tilde{U}_3(\theta_0)$:

$$\tilde{\Lambda}_0(\tau_0) = \tilde{L}(\tau_0) \tilde{U}(\tau_0) \tilde{U}_3(\theta_0), \quad (21)$$

причем

$$\tilde{L}(\tau_0) = \frac{1 + \tilde{u}_0}{\sqrt{2(1 + u_0^0)}}, \quad \tilde{L}^{-1}(\tau_0) = \frac{1 + \tilde{u}_0}{\sqrt{2(1 + u_0^0)}}.$$

Оператор

$$\tilde{U}(\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2u_0^-(1 + u_0^0)}} \begin{pmatrix} 1 + u_0^- & u_0^1 - iu_0^2 \\ -(u_0^1 + iu_0^2) & 1 + u_0^- \end{pmatrix} \quad (22)$$

является оператором поворота вокруг вектора $\vec{e}_0 = \vec{e}_3 \times (\vec{u}_0/|\vec{u}_0|)$ на угол $\varphi_0 = \varphi(\tau_0)$, где φ определяется формулой

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{u_{\perp}}{1 + u^-}. \quad (23)$$

Оператор же $\tilde{U}_3(\theta_0)$ задает вращение вокруг оси $\vec{e}_3$ на угол θ_0 :

$$\tilde{U}_3(\theta_0) = \cos \frac{\theta_0}{2} + i(\vec{\sigma} \vec{e}_3) \sin \frac{\theta_0}{2}. \quad (24)$$

Поскольку

$$\tilde{L}^{-1}(\tau) = \frac{1 + \tilde{\Lambda}^{+1} \tilde{u}_0 \tilde{\Lambda}^{-1}}{\sqrt{2(1 + u^0)}},$$

нетрудно установить, что

$$\tilde{L}^{-1}(\tau) \tilde{\Lambda} \tilde{L}(\tau_0) \tilde{U}(\tau_0) = \tilde{U}(\tau) \tilde{U}_3(\psi),$$

где

$$\psi = \int_{\tau_0}^{\tau} H d\tau,$$

т.е. появляется дополнительный поворот вокруг оси $\vec{e}_3$ на угол, который определяется продольным магнитным полем.

С учетом унитарности операторов $\tilde{U}(\tau)$ и $\tilde{U}_3(\theta_0)$ окончательная формула для преобразования (20) приобретает следующий вид:

$$\tilde{R} = \tilde{U}(\tau) \tilde{U}_3(\theta_0 + \psi) \tilde{R}_0 \tilde{U}_3^+(\theta_0) \tilde{U}^+(\tau_0). \quad (25)$$

Итак, нами построен алгоритм описания эволюции спина заряженной частицы в полях типа (12) при ее заданном движении; задача сведена к нахождению оператора $\tilde{R}_0$. Естественно в общем случае уравнение (11) точно не решается, что заставляет применять численные методы или теорию возмущений. Однако существуют ситуации, когда можно получить и аналитические выражения для $\tilde{R}_0$. Некоторые из них мы и рассмотрим.

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

1. Если влиянием аномального магнитного момента на эволюцию спина можно пренебречь, т.е. положить $g = 2$, то $\tilde{R}_0 = 1$. Тогда $\tilde{R} = \tilde{U}(\tau)\tilde{U}_3(\psi)\tilde{U}^+(\tau_0)$. Следовательно, поворот спина выражается через скорости частицы в моменты времени τ и τ_0 и набег фазы ψ . Когда продольное магнитное поле отсутствует, $U_3(\psi) = I$ и поворот спина зависит только от скоростей частицы.

2. Рассмотрим скрещенные поля. При этом $H = E = 0$ и $u^- = u_0^-$. Тогда диагональные элементы матрицы $\tilde{F}_0$ равны нулю, и она имеет следующий вид:

$$\tilde{F}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\dot{u}^1 - i\dot{u}^2)e^{-i\theta_0} \\ -(\dot{u}^1 + i\dot{u}^2)e^{i\theta_0} & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Решение уравнения с коэффициентной матрицей такого типа рассматривалось в работе [18]. Следуя этой работе, введем переменные

$$x_{\pm} = \xi_{\pm} - \frac{g-2}{4} [(u^1 \pm iu^2) - (u_0^1 \pm iu_0^2)]. \quad (27)$$

Если существует такая константа $\xi_{+} = \xi_{-}^*$, что выполняется условие

$$\cos \theta \ln \left(\frac{x_{-}}{x_{+}} \right) - i \sin \theta \ln(x_{+}x_{-}) = i \ln s \quad (28)$$

($s > 0$, θ — действительные числа), то

$$\tilde{R}_0 = \tilde{U}_3 [\eta(x_0) + \theta - \theta_0] \tilde{U}_0(x_0) \tilde{U}_0^+(\xi_0) \tilde{U}_3^+ [\eta(\xi_0) + \theta - \theta_0]. \quad (29)$$

Здесь

$$\tilde{U}_0(x_0) = \sqrt{\frac{\pi x_0}{2 \sin \pi \nu}} \begin{pmatrix} J_{\nu-1}(x_0) & -J_{1-\nu}(x_0) \\ J_{\nu}(x_0) & J_{-\nu}(x_0) \end{pmatrix}, \quad (30)$$

где

$$\nu = \frac{1 - i \operatorname{tg} \theta}{2}, \quad x_0 = \frac{\sqrt{x_{+}x_{-}}}{\cos \theta},$$

а $J_{\nu}(x_0)$ — функции Бесселя.

Оператор

$$\tilde{U}_3 [\eta(x_0) + \theta - \theta_0] = \begin{pmatrix} \left(\frac{x_{-}}{x_{+}} \right)^{\frac{1}{4}} e^{i \frac{\theta - \theta_0}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{x_{+}}{x_{-}} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-i \frac{\theta - \theta_0}{2}} \end{pmatrix} \quad (31)$$

есть оператор поворота вокруг оси $\vec{e}_3$ на угол $\eta(x_0) + \theta - \theta_0$, причем

$$\eta(x_0) = \frac{1}{\cos \theta} [\ln s^{1/2} + \sin \theta \ln(x_0 \cos \theta)].$$

Отсюда находим

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{U}(\tau) \underset{\sim}{U}_3 [\eta(x_0) + \theta] \underset{\sim}{U}_0(x_0) \underset{\sim}{U}_0^+(\xi_0) \underset{\sim}{U}_3^+ [\eta(\xi_0) + \theta] \underset{\sim}{U}^+(\tau_0). \quad (32)$$

В некоторых случаях структура $\underset{\sim}{R}_0$ упрощается. Так, если $\theta = \pm\pi/2$, то $x_+ x_- = s^{-\lambda}$, где $\lambda = \text{sign } \theta$, и

$$\underset{\sim}{U}_0(x_0) = \underset{\sim}{U}_{\vec{e}}(\beta) \quad (33)$$

— оператор поворота вокруг оси

$$\vec{e} = -\lambda \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{1}{4}}}{\delta} \vec{e}_2 + \frac{1}{2\delta} \vec{e}_3$$

($\delta = \sqrt{s^{-\lambda} + 4^{-1}}$) на угол $\beta = i\delta \ln(x_-/x_+)$. Если же $\theta = 0$, то $x_-/x_+ = s^i$ и оператор

$$\underset{\sim}{U}_0(x_0) = \underset{\sim}{U}_2(-2x_0) \quad (34)$$

является оператором поворота вокруг оси $\vec{e}_2$ на угол $(-2x_0)$.

В тех случаях, когда можно найти зависимость скорости частицы от собственного времени, полученные формулы переходят в известные результаты. В частности, выражения (32), (33) решают задачу об эволюции спина в плоской волне циркулярной (при $\theta = \pi/2$ — левой, а при $\theta = -\pi/2$ — правой) поляризации. Формулы (32), (34) дают описание динамики спина в плоской волне линейной поляризации [6, 7, 9].

3. Рассмотрим продольные поля. При этом $g_{\pm} = 0$ и

$$u^1 \mp iu^2 = (u_0^1 \mp iu_0^2) \exp \left\{ \pm i \int_{\tau_0}^{\tau} H d\tau \right\}.$$

Следовательно, $(u^1 + iu^2)(u^1 - iu^2) = (u_0^1 + iu_0^2)(u_0^1 - iu_0^2) = u_{\perp}^2$. Тогда имеем для матрицы $\underset{\sim}{F}_0$ представление

$$\underset{\sim}{F}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\dot{u}^1 - i\dot{u}^2}{u^1 - iu^2} & (u_0^1 - iu_0^2) \left[\frac{\dot{u}^1 - i\dot{u}^2}{u^1 - iu^2} - \frac{\dot{u}^-}{u^-} \right] e^{-i\theta_0} \\ -(u_0^1 + iu_0^2) \left[\frac{\dot{u}^1 + i\dot{u}^2}{u^1 + iu^2} - \frac{\dot{u}^-}{u^-} \right] e^{i\theta_0} & \frac{\dot{u}^1 + i\dot{u}^2}{u^1 + iu^2} \end{pmatrix}.$$

При определенных ограничениях на величины u , u_0 и в этом случае можно получить аналитические выражения для матрицы $\underset{\sim}{R}_0$. Однако мы ограничимся простыми примерами.

А. Пусть $H = 0$ (продольное электрическое поле). При этом $(u^1 \pm iu^2) = (u_0^1 \pm iu_0^2)$, что приводит к значительному упрощению матрицы $\underset{\sim}{F}_0$. Положив $\theta_0 = 0$, получаем оператор поворота

$$\underset{\sim}{R}_0 = \underset{\sim}{U}_{\vec{e}_0}(\phi) \quad (35)$$

вокруг оси $\vec{e}_0$ на угол

$$\phi = \frac{g-2}{2} u_{\perp} \ln \frac{u^-}{u_0^-}.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{R} = \tilde{U}_{\vec{e}_0}(\phi + \varphi - \varphi_0), \quad (36)$$

где φ и φ_0 определены формулой (23).

Б. Пусть $E = 0$ (продольное магнитное поле). Тогда $u^- = u_0^-$. Введем обозначения $(u^1 \pm iu^2) = u_{\perp} e^{\mp i\chi}$ и $\chi_0 = \chi(\tau_0)$ и положим $\theta_0 = \chi_0$. Тогда оператор

$$\tilde{R}_0 = \tilde{U}_{\vec{l}_0}(\alpha) \quad (37)$$

является оператором поворота на угол

$$\alpha = \frac{g-2}{2} \sqrt{1+u_{\perp}^2} (\chi - \chi_0)$$

вокруг оси

$$\vec{l}_0 = \frac{u_{\perp}}{\sqrt{1+u_{\perp}^2}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{1+u_{\perp}^2}} \vec{e}_3.$$

Подставив (37) в (25), после несложных преобразований можно получить

$$\tilde{R} = \tilde{U}_3(\chi - \chi_0) \tilde{U}_{\vec{l}}(\alpha), \quad \vec{l} = \frac{1}{\sqrt{1+u_{\perp}^2}} \left(u_0^0 \vec{e}_3 - \frac{u_0^3}{1+u_0^0} \vec{u} \right). \quad (38)$$

Таким образом, в продольном магнитном поле происходит прецессия спина вокруг вектора $\vec{l}$, который вращается вокруг оси $\vec{e}_3$. Если $(\vec{u}\vec{e}_3) = 0$, то $\vec{l} = \vec{e}_3$.

Формулы (36), (38) обобщают хорошо известные решения уравнения БМТ для продольных полей с известным законом движения частицы, например однородных [8, 10].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты работы показывают, что даже в тех случаях, когда переменные в уравнении Лоренца не разделяются, т.е. нельзя записать аналитическое выражение для закона движения частицы, существует возможность найти точные формулы, определяющие эволюцию спина на любой допустимой траектории.

Интересно применить полученные формулы к задаче о повороте спина после прохождения частицей ограниченной области пространства, занятой полем. Эта задача имеет важное прикладное значение для физики поляризованных частиц [19]. Для рассмотренных скрещенных полей при значениях параметра $\theta \neq \pm\pi/2$ и продольного электрического поля ориентация спина на выходе из такой области однозначно определяется 4-скоростью частицы и значением ее вектора спина на входе в поле и 4-скоростью частицы на выходе.

Для скрещенных полей с $\theta = \pm\pi/2$ и продольного магнитного поля ситуация несколько меняется, поскольку углы β и α , входящие в формулы (33), (38), определяются полным набегом фазы поперечной скорости за время нахождения частицы в поле. В рассмотренных случаях набег фазы нетрудно связать с характеристиками траектории частицы. Так, если область, занимаемая полем, односвязна, то набег фазы определяется алгебраической суммой замкнутых петель проекции траектории на плоскость, перпендикулярную оси $\vec{e}_3$.

Благодарности. Авторы выражают благодарность В. Г. Багрову и А. В. Борисову за обсуждение работы.

Список литературы

- [1] *V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi.* Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 435.
- [2] *D. M. Fradkin, R. H. Good.* Rev. Mod. Phys. 1961. V. 33. P. 343.
- [3] *И. М. Тернов, В. Р. Халилов, О. С. Павлова.* Изв. вузов. Физика. 1978. № 12. С. 89; 1979. № 2. С. 39.
- [4] *И. М. Тернов.* ЖЭТФ. 1990. Т. 98. С. 1169.
- [5] *В. Г. Багров, В. А. Бордовицын.* Изв. вузов. Физика. 1980. № 2. С. 67.
- [6] *Ю. Г. Павленко.* ЯФ. 1978. Т. 28. С. 156.
- [7] *А. С. Вишневцев, В. Ч. Жуковский, А. Е. Лобанов, Р. А. Потапов.* ЯФ. 1994. Т. 57. С. 758.
- [8] *J. Schmit, R. H. Good.* Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 3410.
- [9] *A. Chakrabarti.* Nuovo Cimento A. 1968. V. 56. P. 604.
- [10] *D. Zwanziger.* Phys. Rev. B. 1965. V. 139. P. 1318.
- [11] *Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко.* ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 1918.
- [12] *Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко, А. Н. Скринский.* ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 6. С. 1255.
- [13] *S. R. Mane.* Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 78.
- [14] *D. D. Barber, S. R. Mane.* Phys. Rev. A. 1988. V. 37. P. 456.
- [15] *Ю. М. Широков.* ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 748.
- [16] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [17] *В. Г. Багров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов и др.* Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982.
- [18] *А. Е. Лобанов.* Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 2. С. 59.
- [19] *И. М. Тернов.* Введение в физику спина релятивистских частиц. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. Гл. V.

Поступила в редакцию 15.II.1999 г.,
после доработки 12.IV.1999 г.

Исправление к статье:

Е. П. Величева, А. А. Сузько

“Точные решения нестационарного уравнения Шредингера”
(ТМФ. 1998. Т. 115. № 3. С. 410–418)

Уравнения (21) и (26) должны выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= h(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{\Omega}(x) \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}(x) + \frac{\omega}{\bar{\Omega}(x)} & \sin \bar{\theta}(x) \exp(-2i\omega t) \\ \sin \bar{\theta}(x) \exp(2i\omega t) & -\left(\cos \bar{\theta}(x) + \frac{\omega}{\bar{\Omega}(x)}\right) \end{pmatrix} = \\
 &= h(x) \hat{I} + \mathbf{B}(t, x) \cdot \boldsymbol{\sigma},
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \left(\hat{p}_x^2 + \frac{V_{11}(x) + V_{22}(x)}{2} \right) \hat{I} + \\
 &+ \begin{pmatrix} \frac{V_{11}(x) - V_{22}(x)}{2} + \omega & V_{12}(x) \exp(-2i\omega t) \\ V_{21}(x) \exp(2i\omega t) & -\left(\frac{V_{11}(x) - V_{22}(x)}{2} + \omega \right) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{26}$$