Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Данилов, В. П. Маслов, В. М. Шелкович, Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 1, 3–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:45:35

© 1998 г. В. Г. Данилов*, В. П. Маслов†, В. М. Шелкович‡

АЛГЕБРЫ ОСОБЕННОСТЕЙ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА¹⁾

Построена ассоциативная коммутативная алгебра распределений, включающая однородные и присоединенные однородные распределения. Построенная алгебра используется для исследования обобщенных решений строго гиперболических систем уравнений с частными производными. Установлены возможные типы особенностей решений и выписаны необходимые (аналоги условий Гюгонио для ударных волн) и достаточные условия существования таких решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Впервые утверждение о том, что сингулярные обобщенные самоподобные решения квазилинейных систем имеют определенную структуру и порождают три алгебры, было сформулировано в работах [1, 2]. Утверждалось, что сингулярные образующие этих алгебр суть $\theta(S)$ и S ; $\theta(S)$ и $\sqrt{S}$; $\epsilon\delta(S)$, $\epsilon \rightarrow +0$, соответственно, где $\theta(S)$ – функция Хевисайда, $\delta(S)$ – дельта-функция Дирака, $S \in C^\infty$, а $S(x, t) = 0$ – гладкая поверхность коразмерности 1. В статье [3] была доказана часть утверждений из [1, 2], однако алгебраические вопросы не рассматривались, и изучались негладкие самоподобные решения только специального типа.

Первые две из упомянутых алгебр описывают сильные и слабые разрывы. Последняя алгебра моделирует солитонобразные решения нелинейных уравнений. Так, например, слабая асимптотика односолитонного решения

$$u(x, t, \epsilon) = \frac{3v}{2} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt)/\epsilon \right)$$

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии

*Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия. E-mail: danilov@amath.msk.ru

†Московский государственный университет, Москва, Россия

‡Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия

уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) $u_t + (u^2)_x + \epsilon^2 u_{xxx} = 0$ при $\epsilon \rightarrow +0$ дает бесконечно узкий солитон $\epsilon A \delta(x - vt) + O(\epsilon^2)$, $\epsilon \rightarrow +0$, $A = \sqrt{v} \int \text{ch}^{-2}(z) dz$, который можно интерпретировать как решение предельной задачи, т.е. решение уравнения Хопфа $u_t + (u^2)_x = 0$ [4–6]. В поточечном пределе при $\epsilon \rightarrow +0$ упомянутое решение КдФ сводится к разрывной функции $(v/2)\eta(x - vt)$, где $\eta(z) = 1$, если $z = 0$, и $\eta(z) = 0$, если $z \neq 0$ [5, 6]. Решения такого типа имеют физический смысл. Например, в форме $\epsilon \delta(x)$, $\epsilon \rightarrow +0$, записываются потенциалы нулевого радиуса в квантовой механике [7, 8], когда гамильтониан квантовой системы представляется как $H = -\Delta + \sum_k \lambda_k \delta(x - c_k)$ и после перенормировки константы связи $\lambda_k = \lambda_k(\epsilon) = O(\epsilon)$, где $\epsilon \rightarrow 0$. Разрывные функции вида $\eta(x)$ использовались для моделирования сильносингулярных, сосредоточенных потенциалов в квантовой механике [9–12].

Задача нахождения негладких решений нелинейных уравнений, а тем более алгебраического описания таких решений не проста, поскольку вследствие нелинейности в конечном счете сводится к проблеме перемножения распределений (обобщенных функций) и построению алгебр распределений. Однако, как известно, при решении подобных задач возникают значительные математические трудности, которые иллюстрирует контрпример Шварца (см., например, [13, § 1.10]), а также многие аналогичные контрпримеры, приведенные в работе [14, гл. 2].

Упомянутые сингулярные решения, а, следовательно, и проблемы определения произведений распределений возникают, например, при описании ударных волн, вихрей, тайфунов [1, 15, 16], в некоторых задачах газовой динамики [17], теории упругости [18], в задачах моделирования эволюции диссипативных структур [19], в некоторых задачах квантовой механики [7–12, 20]. Эти задачи требуют развития аналитических методов при работе с такими решениями. Кроме того, строгое и корректное рассмотрение вопросов, связанных с данными проблемами, представляет также несомненный самостоятельный математический интерес. Так, в связи с задачей Коши в классе обобщенных решений нелинейных систем Тейлор указывает на то, что “эта область остается одной из самых глубоких и таинственных областей математики” [21, с. 103].

1.2. Впервые аналитический подход к нахождению обобщенных, сильносингулярных решений нелинейных уравнений возник в работах [4–6, 15] (см. также обзор в работе [22]). В основе метода лежит идея Хопфа, развитая в дальнейшем Лаксом, Олейник и Кружковым. Согласно этой идее для нахождения обобщенного решения уравнения $\mathcal{P}(u) = 0$ используется аппроксимирующее уравнение $\mathcal{P}(u) + \mathcal{Q}(u, \epsilon) = 0$, где $\mathcal{Q}(u, \epsilon) \rightarrow +0$ при $\epsilon \rightarrow +0$. Обобщенным решением исходного уравнения называется некоторый предел $u(x, t)$ решения $u(x, t, \epsilon)$ аппроксимирующего уравнения. Такие обобщенные решения представляются в виде отрезка степенного ряда по степеням малого параметра ϵ с коэффициентами, которые являются распределениями.

Данный подход требует дополнительного изучения аппроксимирующего уравнения. При этом выбор регуляризующего оператора приводит к рассмотрению аппроксимации только одного класса возможных решений предельной задачи. Например, при использовании регуляризации вида $\mathcal{Q}(u, \epsilon) = \epsilon u_{xx}$ для уравнения Хопфа мы получаем регуляризацию решения типа ударных волн $\theta(S)$, но не можем получить регуляризацию со-

литонобразного решения типа $\epsilon\delta(S)$, $\epsilon \rightarrow +0$. Для получения же солитонобразного решения можно использовать регуляризацию $\mathcal{Q}(u, \epsilon) = \epsilon^2 u_{xxx}$, т.е. уравнение КдФ.

Имеется подход к проблеме определения обобщенных решений нелинейных уравнений, связанный с именем Коломбо [23, 18] (см. [22]). В рамках этого подхода удобно доказывать теоремы существования и единственности, применять теорию для численных экспериментов. Так, в работах [24, 25] определяются обобщенные решения, ставится и решается задача Коши для гиперболических систем в пространстве “новых обобщенных функций” Коломбо. Однако эти работы, как и подход Коломбо к проблеме умножения распределений, имеют существенный недостаток: произведения распределений в этой теории не являются функционалами и не имеют непосредственной связи со шварцевскими распределениями. Это затрудняет и ограничивает применение данной теории для конструктивного аналитического использования.

В работах [26–28] была построена ассоциативная и коммутативная алгебра, порожденная подпространством распределений

$$\text{span}\{\delta^{(m-1)}(x - c_k), P((x - c_k)^{-m}), x^{m-1}; m = 1, 2, \dots; c_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, s\},$$

где span – линейная оболочка. Элементы этой алгебры (произведения распределений из алгебр Владимирова [13]) представлялись в виде асимптотических рядов типа рядов Лорана–Хартогса по степеням $y \rightarrow +0$ с распределениями в роли коэффициентов. В этой алгебре можно было находить обобщенные решения нелинейных уравнений как линейные комбинации элементов алгебры. Данный подход не требует выхода за исходные уравнения. Здесь переменная y – мнимая часть комплексного аргумента упомянутых функций из алгебр Владимирова – играет ту же роль, что и малый параметр ϵ в формулах для регуляризации решений, получаемых по методу “исчезающей вязкости” Хопфа–Лакса–Олейник, а также в упомянутых выше работах по квантовой механике.

В [26–28] для уравнения Хопфа были построены решения в виде бесконечно узких солитонов, в частности решения вида

$$u^*(x) = Ay\delta(x - vt) + By^3\delta''(x - vt), \quad y \rightarrow +0, \quad (1)$$

где A, B – константы. Для одной системы теории упругости Коломбо [18] также было найдено решение в виде бесконечно узкого солитона.

В своей основе подход работ [26–28] близок идеям Ливчака [29], Ли Банг-Хе [30], Иванова [31–33], Коломбо [23]. Однако при этом существенным продвижением было то, что исходное множество распределений вкладывалось в ассоциативную алгебру, которая также являлась пространством линейных непрерывных функционалов, точнее вектор-распределений.

1.3. В нашей работе рассматриваются самоподобные сингулярные решения строго гиперболических систем квазилинейных уравнений первого порядка в дивергентной форме. Для этих уравнений мы даем полную классификацию алгебр сингулярных обобщенных решений. При этом мы опираемся на результаты работ [3, 34] и используем подход работ [26–28] к умножению распределений, значительно расширяя

порождающее пространство распределений. Исследование структуры таких сильно-сингулярных решений стандартными методами не представляется возможным [35]. Отметим, что возможности нашего подхода не ограничиваются этим классом уравнений.

В разделе 2 определяется класс рассматриваемых систем нелинейных уравнений и дается предварительное описание сингулярных решений этих систем.

В разделе 3 вводится пространство, состоящее из линейных комбинаций однородных и присоединенных однородных распределений E_0 одного переменного (поскольку изучаются самоподобные решения). Мы исследуем такие решения нелинейных систем, сингулярности которых принадлежат E_0 .

В разделе 4 строится алгебра E_0^* асимптотических распределений, в которую вкладывается пространство E_0 . Элементы этой алгебры – асимптотические (в слабом смысле) ряды по системе функций $y^{\alpha_m} \ln^{p_{m,n}} y$, где α_m – ограниченная снизу возрастающая последовательность вещественных чисел, а $p_{m,n}$ при каждом m есть конечная убывающая последовательность неотрицательных целых чисел. Коэффициенты этих асимптотических рядов – присоединенные однородные распределения. Пространство распределений E_0 вложено в алгебру асимптотических распределений. Произведениями распределений из E_0 являются асимптотики произведений аппроксимаций перемножаемых распределений при $y \rightarrow +0$, где y – параметр аппроксимации.

В разделе 5 на основе алгебры E_0^* определяется алгебра асимптотических распределений для случая многих переменных, а в разделе 6 – асимптотические подалгебры и подалгебры, асимптотические по гладкости, из которых и будут выбираться сингулярности решений рассматриваемых систем.

В разделе 7 вводится класс асимптотических распределений, на котором мы будем рассматривать обобщенные решения системы, и доказываются теоремы о структуре алгебр сингулярных образующих, из которых выбираются сингулярности решений рассматриваемых систем. Поскольку гиперболическая система полиномиально нелинейна, мы выделяем алгебры, на которых полиномиальное отображение является автоморфизмом. Доказывается, что это имеет место только в следующих случаях: на асимптотической алгебре с образующими $\{1, y\delta(S), yP(S^{-1}), yS_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm}), y \rightarrow +0: \lambda \geq 0, p = 0, 1, \dots\}$; на асимптотической подалгебре с образующими $\{1, \theta(S)\}$; на асимптотических по гладкости алгебрах с образующими $\{1, S_{+}^{\lambda} \ln^p(S_{+}), S_{-}^{\lambda} \ln^p(S_{-}): \lambda \geq 0, p = 0, 1, \dots\}$ и $\{1, y\delta(S), yP(S^{-1}), S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm}), yS_{\pm}^{\mu} \ln^q(S_{\pm}), y \rightarrow +0: \lambda \geq 1, \mu \geq 0, p, q = 0, 1, \dots\}$. Здесь $S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})$ – присоединенные однородные распределения, описанные в книге [36, гл. I, §3.11, §4], а распределение $P(S^{-1})$ есть главное значение функции S^{-1} . Условие Лакса выделяет из алгебр, асимптотических по гладкости, подалгебры с образующими $\{1, S_{\pm}^{\alpha_j}: \alpha_j = j/2, j = 1, 2, \dots\}$, $\{1, S^{\alpha_j}: \alpha_j = j/2, j = 1, 2, \dots\}$, которым принадлежат сингулярные части обобщенных решений строго гиперболических систем.

В разделе 8 выводятся необходимые и достаточные условия существования у рассматриваемых систем различных типов решений с сингулярностями из найденных подалгебр. Выводятся обобщенные условия Гюгонио.

Отметим, что в дополнение к результатам [1–3, 34] алгебраический анализ особеннос-

тей решений выявил для гиперболических систем новый тип решений в виде бесконечно узких солитонов: $yP((x - vt)^{-1})$, $y \rightarrow +0$.

1.4. Прежде чем перейти к формулировке точных определений и результатов, поясним содержание работы на примерах. Рассмотрим простейшее нелинейное гиперболическое уравнение – уравнение Хопфа

$$u_t + (u^2)_x = 0.$$

Решением типа ударной волны для этого уравнения называется функция

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \theta(x - \varphi(t))u_1(x, t),$$

удовлетворяющая уравнению Хопфа в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, где u_0 , u_1 , φ – гладкие функции, подлежащие определению, $\theta(\tau)$ – функция Хевисайда. Так как мы написали уравнение Хопфа в дивергентной форме, подстановка решения типа ударной волны не вызывает затруднений:

$$\begin{aligned} u_t + (u^2)_x &= (-\varphi_t u_1 + u_1^2 + 2u_0 u_1)\delta(x - \varphi(t)) + \\ &+ (u_{1t} + (u_1^2 + 2u_0 u_1)_x)\theta(x - \varphi(t)) + u_{0t} + (u_0^2)_x. \end{aligned}$$

Для того чтобы правая часть последнего равенства обращалась в нуль в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \frac{u_1^2 + 2u_0 u_1}{u_1} \Big|_{x=\varphi}, \\ u_{0t} + (u_0^2)_x &= 0, \quad x \leq \varphi, \\ (u_0 + u_1)_t + (u_0 + u_1)_x^2 &= 0, \quad x \geq \varphi. \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений, которое означает, что коэффициент при δ -функции равен нулю, называется условием Гюгонио. Полученная система уравнений разрешима с помощью метода характеристик [17] хотя бы при малых t . Таким образом, в случае ударной волны построение обобщенного решения уравнения в дивергентной форме не потребовало никаких новых определений умножения.

Если мы перепишем уравнение Хопфа в виде

$$u_t + 2uu_x = 0,$$

эквивалентном дивергентному для гладких решений, то при подстановке в это уравнение решения типа ударной волны возникает проблема определения произведения $\delta(x - \varphi(t))\theta(x - \varphi(t))$.

Аналогично, если мы конструируем решения в виде бесконечно узкого солитона

$$u = u_0(x, t) + yA(t)\delta(x - \varphi(t))$$

$(u_0, A, \varphi \in C^\infty, y \rightarrow 0)$, возникает проблема определения функции $\delta(x - \varphi(t))\delta(x - \varphi(t))$, даже если мы решаем уравнение, написанное в дивергентной форме.

Поэтому, следуя изложенной выше схеме, мы рассмотрим аппроксимацию δ -функции вида

$$\delta(\tau, y) = \frac{y}{\pi(\tau^2 + y^2)}.$$

Известно, что $\delta(\tau, y) \rightarrow \delta(\tau)$, $y \rightarrow +0$, в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Более того можно вычислить асимптотику в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ функции $\delta(\tau, y)$ при $y \rightarrow +0$ (ниже в статье описывается алгоритм проведения таких вычислений):

$$\delta(\tau, y) = \delta(\tau) + \frac{y}{\pi}P(\tau^{-2}) + O(y^2),$$

где $O(y)$ означает, что $\langle O(y), \varphi \rangle = O(y)$ для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, причем последнее равенство понимается в обычном смысле.

Аналогично имеем

$$\delta^2(\tau, y) = \frac{y^2}{\pi^2(\tau^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2\pi y}\delta(\tau) + \frac{y}{4\pi}\delta''(\tau) + \frac{1}{\pi^2}y^2P(\tau^{-4}) + O(y^3).$$

Теперь мы можем подставить решение в виде бесконечно узкого солитона в уравнение, полагая $\tau = x - \varphi(t)$. Получим в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} u_t + (u^2)_x &= u_{0t} + (u_0^2)_x + y\delta'(x - \varphi(t)) \left(-A\varphi_t + \frac{A^2}{2\pi} + 2u_0A \right) + \\ &+ y\delta(x - \varphi) \left(A_t + 2A\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + O(y^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Ясно, что слагаемые, допускающие в слабом смысле оценку $O(y^2)$, выписывать нет смысла, т.к. само исходное решение определено с точностью $O(y^2)$. Слагаемые порядка $O(y^2)$ зависят не от выбора главной сингулярности $\delta(x - \varphi)$, а от выбора способа аппроксимации $\delta(\tau) \leftrightarrow \delta(\tau, y)$, т.е. определяются выбором главной сингулярности при заданном способе аппроксимации.

Воспользовавшись известным равенством $a(x)\delta'(x) = a(0)\delta'(x) - a'(0)\delta(x)$, получим, что необходимые и достаточные условия того, чтобы правая часть уравнения (2) имела порядок $O(y^2)$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\varphi_t - \frac{A}{2\pi} - 2u_0 \right) \Big|_{x=\varphi} &= 0, \\ A_t &= 0, \\ u_{0t} + (u_0^2)_x &= 0. \end{aligned}$$

Это возможно, например, в случае $u_0 = \text{const} = B$, тогда $A(t) = A(0)$, $\varphi(t) = Vt$ и $V = (1/2\pi)A(0) + 2B$.

Ясно, с другой стороны, что условие $A_t = 0$ при $u_0 \neq \text{const}$ противоречит физической интуиции и известным результатам о поведении солитонов. Для устранения этого противоречия следует усложнить структуру решения, введя дополнительное слагаемое, которое при дифференцировании дает $y\delta(x - \varphi)$. Именно, положим

$$u^* = u_0(x, t) + y\delta(x - \varphi(t))A(t) + y\theta(x - \varphi(t))u_1(x, t),$$

где $u_0, u_1, A, \varphi \in C^\infty$, $A > 0$. Это представление совпадает с тем, которое можно получить, рассматривая асимптотику в слабом смысле асимптотического решения уравнения КдФ с малой дисперсией, пропорциональной y [4, 5]. Имеем согласно формулам раздела 4, что

$$(u^*)^2 = u_0^2 + \frac{A^2}{2\pi}y\delta(x - \varphi) + 2u_0Ay\delta(x - \varphi) + 2u_0u_1y\theta(x - \varphi) + o(y).$$

Подставим это выражение в уравнение и потребуем, чтобы

$$u_t^* + (u^*)^2_x = o(y)$$

согласно определению асимптотического решения. Для справедливости этого равенства необходимо, чтобы было выполнено соотношение

$$u_{0t} + (u_0^2)_x = 0$$

и равнялись нулю коэффициенты при $y\delta'$, $y\delta$ и $y\theta$. Выписывая эти равенства (условия типа Гюгонию), получим

$$\begin{aligned} \left(-\varphi_t + 2u_0 + \frac{A}{2\pi}\right)\Big|_{x=\varphi} &= 0, \\ (-\varphi_t + 2u_0)u_1\Big|_{x=\varphi} + A_t &= 0, \\ (u_{1t} + 2(u_0u_1)_x)\Big|_{x \geq \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Сразу видно, что если $A = \text{const}$, то либо $u_1|_{x=\varphi} = 0$, либо $A = 0$.

По предположению $A > 0$, тогда $\varphi_t > 2u_0$ и начальное данное для u_1 (заданное в области $x > \varphi(0)$) определяет $u_1(\varphi, t)$ – значения функции u_1 на кривой $x = \varphi(t)$. Это следует из уравнения для u_1 , характеристики которого имеют вид

$$\dot{x} = 2u_0, \quad \dot{u}_1 = -2u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

Таким образом, по начальным условиям $u_0|_{t=0}$ и $u_1|_{t=0}$ определяются функции $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$ (последняя в области $x \geq \varphi(t)$). Положим $\hat{u}_1 = u_1(\varphi, t)$, $\hat{u}_0 = u_0(x, t)|_{x=\varphi}$.

Для определения функций $\varphi(t)$ и $A(t)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_t - 2\hat{u}_0 - \frac{A}{2\pi} &= 0, \\ A_t - \frac{\hat{u}_1 A}{2\pi} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, обобщенное решение указанного вида существует при тех $t > 0$, при которых существует гладкое решение $u_0(x, t)$ задачи Коши для исходного уравнения Хопфа

$$u_{0t} + (u_0^2)_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0^0(x).$$

Система уравнений, следующая из (2), может быть получена не обязательно с помощью выбранной нами регуляризации. Для ее справедливости достаточно, чтобы аппроксимация $\delta(x, y)$ удовлетворяла условию

$$(y\delta(x, y))^2 = y \frac{\delta(x)}{2\pi} + o(y).$$

Более того, если последнее равенство выполнено с некоторой другой константой $a \neq (2\pi)^{-1}$, то эта константа войдет в (2) вместо $(2\pi)^{-1}$, и мы получим другой закон движения бесконечно узкого солитона. Выбор способа аппроксимации определяет набор констант, входящий в выражение для аппроксимации произведения распределений через исходные распределения и соответственно определяющий уравнения движения сингулярного носителя решения. Реально для построения уравнений движения сингулярного носителя решения нужны только эти константы, играющие сходную роль со структурными константами в теории групп Ли.

Мы выбрали гармоническую аппроксимацию распределений, т.к. оказалось, что этот подход в сочетании с разумным ограничением исходного множества распределений (мы рассматриваем только однородные и однородные присоединенные распределения) позволяет конструктивно вычислять упомянутые константы и исследовать решения нелинейных уравнений.

Отметим, что уравнения движения сингулярного носителя для данного исходного уравнения не зависят от формы его записи (дивергентной или нет), но, разумеется, зависят от выбора исходной дивергентной формы.

Таким образом, можно сказать, что построение сингулярного самоподобного решения сводится к выбору сингулярных образующих, определенного способа подстановки решения с выбранной структурой в уравнение, выписыванию системы уравнений для неизвестных гладких функций и исследованию полученной системы. Последняя задача, как показывает простейший пример, разобранный выше, в общем случае достаточно сложна, и в данной работе мы ограничиваемся предположением, что гладкое решение для изучаемых систем существует.

2. КЛАСС РАССМАТРИВАЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Рассмотрим систему из m полиномиально нелинейных уравнений первого порядка, записанную в дивергентной форме,

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x, t, u) = 0, \quad (3)$$

где $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, Ω – некоторая ограниченная область; $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))$. Вектор-функции $F_k(x, t, u) = (F_{k,1}(x, t), \dots, F_{k,m}(x, t))$ имеют компоненты

$$F_{k,i}(x, t, u) = \sum_{|r|=0}^{M_{k,i}} F_{k,i,r}(x, t) u_1^{r_1} \dots u_m^{r_m}, \quad (4)$$

являющиеся многочленами порядка $M_{k,i}$ по переменным $u_1, \dots, u_m$ с коэффициентами $F_{k,i,r}(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, где $k = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, m$; $r = (r_1, \dots, r_m)$, $r_j = 0, \dots, M_{k,i}$, $|r| = \sum_{j=1}^m r_j$.

Системе (3) поставим в соответствие квадратную матрицу порядка m :

$$A(x, t, u, \xi) = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u) \right\|, \quad (5)$$

где E – единичная матрица порядка m , $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $\mathbb{S}^{n-1}$ – сфера в n -мерном пространстве.

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(x, t, u, \xi)$, $k = 1, \dots, m$, – собственные значения матрицы $A(x, t, u, \xi)$, а $L^k(x, t, u, \xi)$ и $R^k(x, t, u, \xi)$ – левый и правый собственные векторы, соответственно, отвечающие этому собственному значению.

Напомним определение строгой гиперболичности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Систему (3) будем называть *строго гиперболической* в некоторой односвязной области D пространства переменных x, t, u , если в каждой точке этой области собственные значения $\lambda_k(x, t, u, \xi)$, $k = 1, \dots, m$, матрицы (5) вещественны и различны. В этом случае $(L^k, R^k) \neq 0$, $k = 1, \dots, m$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 (см. [17, гл. I, § 10, (20); 35]). Систему (3) будем называть *существенно квазилинейной* в области D пространства переменных x, t, u , если существует такая константа $\delta > 0$, что справедливы неравенства (условия Лакса)

$$\left| \left(\frac{R^k}{|R^k|}, \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} \right) \right| \geq \delta > 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (6)$$

ЛЕММА 2.1 [3, 34]. Для любого $k = 1, \dots, m$ справедливо равенство

$$\sum_{s=1}^m L_s^k \sum_{j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial^2 F_{j,s}}{\partial u^2} R^k, R^k \right) = (L^k, R^k) \sum_{s=1}^M R_s^k \frac{\partial \lambda_k}{\partial u_s}, \quad (7)$$

где $F_{j,s}$, L_s^k , R_s^k , u_s – соответственно компоненты векторов F_j , L^k , R^k , u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению собственных векторов имеем

$$\sum_{j=1}^n \sum_{a=1}^m \xi_j \frac{\partial F_{j,a}}{\partial u_s} L_a = \lambda_k L_s, \quad \sum_{j=1}^n \sum_{b=1}^m \xi_j \frac{\partial F_{j,s}}{\partial u_b} R_b = \lambda_k R_s. \quad (8)$$

Здесь индекс k , нумерующий собственные векторы, опущен, и потому ниже через L_s и R_a обозначены координаты векторов L и R , соответственно.

Преобразуем скалярное произведение в левой части (7):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial^2 F_{j,s}}{\partial u^2} R, R \right) &= \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{a,b=1}^m R_a \frac{\partial^2 F_{j,s}}{\partial u_a \partial u_b} R_b = \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j \left[\sum_{a=1}^m R_a \frac{\partial}{\partial u_a} \left[\sum_{b=1}^m R_b \frac{\partial F_{j,s}}{\partial u_b} \right] - \sum_{a,b=1}^m R_a \frac{\partial r_b}{\partial u_a} \frac{\partial F_{j,s}}{\partial u_b} \right] = \\ &= \sum_{a=1}^m R_a \frac{\partial}{\partial u_a} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{b=1}^m \xi_j \frac{\partial F_{j,s}}{\partial u_b} R_b \right] - \sum_{a,b=1}^m R_a \frac{\partial r_b}{\partial u_a} \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial F_{j,s}}{\partial u_b}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) в силу второго из равенств (8) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial^2 F_{j,s}}{\partial u^2} R, R \right) &= -\lambda_k R_s \sum_{a=1}^m R_a \frac{\partial \xi_{0k}}{\partial u_a} - \\ &- \lambda_k \sum_{a=1}^m R_a \frac{\partial r_s}{\partial u_a} - \sum_{a,b=1}^m R_a \frac{\partial r_b}{\partial u_a} \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial F_{j,s}}{\partial u_b}. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножая левую и правую части (10) на L_s и суммируя по s , получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m L_s \sum_{j=1}^n \left(\xi_j \frac{\partial^2 F_{j,s}}{\partial u^2} R, R \right) &= \\ &= (L, R) \sum_{a=1}^m R_a \frac{\partial \lambda_k}{\partial u_a} + \lambda_k \sum_{a,s=1}^m R_a L_s \frac{\partial R_s}{\partial u_a} - \sum_{a,b=1}^m R_a \frac{\partial R_b}{\partial u_a} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^m \xi_j \frac{\partial F_{j,s}}{\partial u_b} L_s \right]. \end{aligned}$$

Применяя первое из равенств (8), получаем утверждение леммы.

Лемма 2.1 существенно используется в разделе 7 при “отборе” решений из всего набора решений, которые могут существовать априори.

2.2. Пусть $S(x, t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\nabla_x S(x, t)|_{S=0} \neq 0$, и, следовательно, поверхность $\Gamma = \{(x, t): S(x, t) = 0\}$ гладкая, коразмерности один в области Ω пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Мы будем рассматривать только самоподобные решения систем (3), сингулярности которых сосредоточены на поверхности Γ , т.е. решения, “главная” сингулярная часть которых имеет вид

$$u(x, t) = \sum_n g_n(x, t) f_n(S(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (11)$$

где сумма (11) конечна, $g_n(x, t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_n(x, t)|_\Gamma \neq 0$, а сингулярные образующие решения $f_n(\tau) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ – распределения, у которых сингулярный носитель $\text{sing supp } f_n(\tau) = \{0\}$ и $f_n(\tau) \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus 0)$.

Так как система (3) нелинейна, а класс решений (11) содержит распределения, возникает проблема перемножения распределений. Поэтому вначале мы построим алгебру распределений, включающую нужные произведения, а потом дадим строгое определение обобщенных решений системы (3) в этой алгебре. Будем предполагать, что распределения $f_n(\tau)$ в (11) являются линейными комбинациями однородных и присоединенных однородных распределений (см. [36, гл. I, § 3.11, § 4]).

3. ПРОСТРАНСТВО ПРИСОЕДИНЕННЫХ ОДНОРОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Опишем пространство распределений одного переменного, на элементах которого будет строиться пространство решений (11) системы (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Распределение $f(x)$ называется *однородным* степени λ , если для всех $a > 0$ имеет место равенство

$$\langle f(x), \varphi(x/a) \rangle = a^{\lambda+1} \langle f(x), \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Распределение $f(x)$ называется *присоединенным однородным* степени λ и порядка k , $k = 0, 1, 2, \dots$, если для всех $a > 0$ имеет место равенство

$$\langle f(x), \varphi(x/a) \rangle = a^{\lambda+1} \langle f(x), \varphi(x) \rangle + a^{\lambda+1} \ln a \langle f_0(x), \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

где $f_0(x)$ – некоторое присоединенное однородное распределение степени λ и порядка $k - 1$ (здесь при $k = 0$ мы полагаем $f_0(x) = 0$).

Присоединенные распределения нулевого порядка совпадают с однородными распределениями.

Заметим, что для каждого λ существуют два линейно независимых присоединенных однородных распределения степени λ и порядка k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Например, таковыми являются при любом λ распределения $(x \pm i0)^\lambda \ln^k(x \pm i0)$ (см. подробнее [36, гл. I, § 3, § 4]).

Введем линейное пространство $E_0 \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, порожденное линейными комбинациями присоединенных однородных распределений $(x \pm i0)^\lambda \ln^p(x \pm i0)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, $p = 0, 1, \dots$ (см. [36, гл. I, § 3.11, § 4]). При $\lambda > 0$ мы полагаем $(x \pm i0)^\lambda \equiv x^\lambda$. Таким образом,

$$E_0 = \text{span}\{(x \pm i0)^\lambda \ln^p(x \pm i0), \quad \lambda \in \mathbb{R}, p = 1, 2, \dots, \text{ или } \lambda < 0, p = 0; \quad x^\lambda, \lambda > 0\}.$$

Пространству E_0 принадлежат, например, такие распределения, как $\delta^{(m-1)}(x)$, $P(x^{-m})$, $m = 1, 2, \dots$; $x_\pm^\lambda \ln^p(x_\pm)$, $p = 0, 1, \dots$ (см. [36, гл. I, § 3]).

Как известно, для любого распределения $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ можно найти (неоднозначно) гладкую при $y \neq 0$ аппроксимирующую функцию $f(x, y)$ такую, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \langle f(x, y), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Тот факт, что распределение $f(x)$ имеет аппроксимацию $f(x, y)$, будем записывать как $f(x) \sim f(x, y)$. Выбор того или иного вида аппроксимирующих функций может диктоваться физическими условиями задачи или иными соображениями.

Для пространства распределений E_0 мы выберем пространство гармонических аппроксимаций, элементы которого принадлежат алгебрам Владимира [13]:

$$h_0 = \text{span}\{(x \pm iy)^\lambda \ln^p(x \pm iy), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad p = 1, 2, \dots, \text{ или} \\ \lambda < 0, \quad p = 0; \quad (z^\lambda + \bar{z}^\lambda)/2, \quad \lambda > 0; \quad y > 0\},$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ и $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $\text{Im } z \neq 0$, $\arg z \in [0, \pi)$.

Ясно, что гармоническая аппроксимация $f(x, y)$ присоединенного однородного распределения $f(x)$ степени λ и порядка k является присоединенной однородной функцией той же степени и порядка по совокупности переменных (x, y) .

Обозначим через $A_0: h_0 \rightarrow E_0$ *изоморфизм*, который при $\lambda \in \mathbb{R}$, $p = 1, 2, \dots$ и при $\lambda < 0$, $p = 0$ устанавливает взаимно однозначное соответствие $(x \pm iy)^\lambda \ln^p(x \pm iy) \leftrightarrow (x \pm i0)^\lambda \ln^p(x \pm i0)$, а при $\lambda > 0$, $p = 0$ – взаимно однозначное соответствие $(z^\lambda + \bar{z}^\lambda)/2 \leftrightarrow x^\lambda$. Здесь $A_0 = w\text{-}\lim_{y \rightarrow 0}$ есть предел, понимаемый в слабом смысле.

Приведем аппроксимации некоторых распределений из E_0 :

$$\begin{aligned} \delta^{(m-1)}(x) &\sim \frac{(-1)^m (m-1)!}{2\pi i} (z^{-m} - \bar{z}^{-m}), \quad m = 1, 2, \dots; \\ P(x^{-\lambda}) &\sim \frac{1}{2} (z^{-\lambda} + \bar{z}^{-\lambda}); \\ x^m &\sim \frac{1}{2} (z^m + \bar{z}^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ x_+^\lambda &\sim \frac{1}{2} (z^\lambda + \bar{z}^\lambda) - \frac{1}{2i} \text{ctg}(\pi\lambda) (z^\lambda - \bar{z}^\lambda), \\ x_-^\lambda &\sim \frac{1}{2i \sin(\pi\lambda)} (z^\lambda - \bar{z}^\lambda), \quad \lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ x_-^{-n} \ln x_- &\sim \frac{(-1)^n}{4\pi i} \left[(z^{-n} \ln^2 z - \bar{z}^{-n} \ln^2 \bar{z}) + \frac{\pi^2}{3} (z^{-n} - \bar{z}^{-n}) \right], \\ x_\pm^n &\sim \mp \frac{(\pm 1)^n}{2\pi i} [z^n \ln(\mp z) - \bar{z}^n \ln(\mp \bar{z})], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ \text{sign}(x) &= \theta(x) - \theta(-x) \sim \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{x}{y}\right); \quad \theta(\pm x) \sim \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{x}{y}\right) \right). \end{aligned}$$

4. АЛГЕБРА АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ E^*

4.1. Чтобы ввести произведение на пространстве распределений E_0 , естественно воспользоваться изоморфностью пространств E_0 и h_0 , определяя это произведение как некоторый предел произведения аппроксимаций перемножаемых распределений при $y \rightarrow +0$. Эта идея в той или иной форме использовалась в работах [22, 23, 26–33]. При этом, однако, появляются члены типа $z^{-m}\bar{z}^{-n}$, $m, n < 0$, не принадлежащие h_0 и потому при $y \rightarrow +0$ в общем случае стремящиеся к бесконечности в пространстве распределений.

Для придания смысла такого рода членам введем *ассоциативную коммутативную дифференциальную алгебру h_0^* с единицей и без делителей нуля*, порожденную пространством h_0 . Элементы $f^*(x, y)$ этой алгебры суть конечные суммы конечных произведений функций $f(x, y) \in h_0$, $y > 0$. Очевидно, что

$$h_0^* = h_0 \oplus (h_0^* \setminus h_0).$$

Произведение распределений из пространства E_0 будет определяться как асимптотическое разложение в слабом смысле произведения аппроксимаций распределений при $y \rightarrow +0$ по асимптотической последовательности $y^{\alpha_m} \ln^n y$, где $\alpha_m \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots$, — возрастающая последовательность, а индекс $n = n(m) \in \mathbb{N} \cup 0$ пробегает при каждом m конечную убывающую последовательность. Поскольку любой элемент алгебры h_0^* есть линейная комбинация *простейших элементов* этой алгебры вида

$$F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) = \frac{\ln^q(x+iy) \ln^p(x-iy)}{(x+iy)^\mu (x-iy)^\nu}, \quad y > 0, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}; \quad q, p = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

задача будет сводиться к нахождению асимптотических разложений простейших функций.

Приведем результаты работ [30–33] о представлении элементов алгебры h_0^* .

ТЕОРЕМА 4.1 [31]. *Если функция $f^*(x, y) \in h_0^*$ — простейшая присоединенная однородная функция степени $\nu > -1$, то для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеем место представление*

$$\langle f^*(x, y), \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \varphi(x) dx + o(1), \quad y \rightarrow +0,$$

где $f^*(x) \in E_0$.

ТЕОРЕМА 4.2 [31, 33]. *Если функция $f^*(x, y) \in h_0^*$ — простейшая присоединенная однородная функция степени $\nu \leq -1$, то для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет место представление*

$$\begin{aligned} \langle f^*(x, y), \varphi(x) \rangle = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^r A_{k,j} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} y^{\nu+k+1} \ln^{r-j} y + \langle \text{P.f. } f^*(x, 0), \varphi(x) \rangle + o(1), \quad y \rightarrow +0, \end{aligned}$$

где $n = [-\nu]$, $A_{k,j} = A_{k,j}(pq_{\mu\nu})$ – вычисляемые константы, $r \geq 0$ – некоторое целое число и псевдофункция

$$\begin{aligned} \langle \text{P.f. } f^*(x, 0), \varphi(x) \rangle = \\ = \lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x, y) \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k - \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} \chi(x) \right] dx, \end{aligned}$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция отрезка $[-1, 1]$ в случае целого ν и $\chi(x) = 1$ в случае нецелого ν .

Таким образом, в слабом смысле согласно теоремам 4.1, 4.2 простейшая функция (12) $F_{q,p,\mu,\nu}(x, y)$ может быть представлена в виде сингулярной части (сумма δ -функции и ее производных с коэффициентами вида $y^{-\alpha} \ln^p y$ в теореме 4.2) и регулярной части, которая является регуляризацией в смысле работы [36, гл. I, § 3, § 4]. Можно сказать, что приведенные в теоремах 4.1, 4.2 выражения являются главными членами асимптотики в слабом смысле распределений $F_{q,p,\mu,\nu}(x, y)$ при $y \rightarrow +0$.

Докажем утверждение, дополняющее утверждения теорем 4.1, 4.2, показав, что для каждого элемента $f^*(x, y)$ алгебры h_0^* можно построить *асимптотическое разложение в слабом смысле* по асимптотической последовательности $y^{\alpha_m} \ln^n y$, где $\alpha_m \in \mathbb{R}$ ($m = 1, 2, \dots$) – возрастающая последовательность, а индекс $n = n(m) \in \mathbb{N} \cup 0$ пробегает конечную убывающую последовательность. Этот результат обобщает результаты работы [37, гл. I, § 4] об асимптотических разложениях слабосингулярных интегралов.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $f^*(x, y) \in h_0^*$, тогда для любого целого $N \geq 0$ и для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует единственное представление вида

$$\langle f^*(x, y), \varphi(x) \rangle = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^{n_0(m)} \langle f_{\alpha_m, n}(x), \varphi(x) \rangle y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y + R_N(y),$$

где $R_N(y) = o(y^N)$, $y \rightarrow +0$; $n_0 \geq 0$ – некоторое целое число; $\alpha_m \in \mathbb{R}$ – возрастающая последовательность, $n_0(m) \in \mathbb{N} \cup 0$. Коэффициенты $f_{\alpha_m, n}(x)$ – распределения из E_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно провести доказательство для простейших функций (12):

А. Пусть $\mu + \nu \geq 1$ и $p = \nu = 0$ (аналогично рассматривается случай $q = \mu = 0$). В этом случае простейшая функция $F_{q,0,\mu,0}(x, y) = f_{q,\mu}(x + iy) \in h_0$ – элемент алгебры Владимирова. И потому, если $F(y) = \langle f_{q,\mu}(x + iy), \varphi(x) \rangle$, то существует предел

$$F(0) = \lim_{y \rightarrow +0} F(y) = \langle f_{q,\mu}(x + i0), \varphi(x) \rangle.$$

Учитывая, что производные

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} f_{q,\mu}(x + iy) \in h_0$$

также принадлежат алгебре Владимирова, можно написать асимптотику в слабом смысле распределения $f_{q,\mu}(x + iy)$ при $y \rightarrow +0$. Действительно, применяя формулу Тейлора к функции $F(y)$, получим, что для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеет место разложение

$$F(y) = \sum_{k=0}^N \frac{y^k}{k!} \frac{d^k}{dy^k} F(0) + \frac{y^{N+1}}{(N+1)!} \frac{d^{N+1}}{dy^{N+1}} F(\theta y),$$

где $0 < \theta < 1$. А так как при $y > 0$ и $k = 0, 1, \dots$

$$\frac{d^k}{dy^k} F(y) = \left\langle \frac{\partial^k}{\partial y^k} f_{q,\mu}(x + iy), \varphi \right\rangle = (i)^k \left\langle \frac{\partial^k}{\partial x^k} f_{q,\mu}(x + iy), \varphi(x) \right\rangle,$$

то для распределения $f_{q,\mu}(x + iy)$ получаем разложение

$$f_{q,\mu}(x + iy) = \sum_{k=0}^N \frac{i^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f_{q,\mu}(x + iy) \Big|_{y=0} y^k + \frac{i^{N+1}}{(N+1)!} \frac{\partial^{N+1}}{\partial x^{N+1}} f_{q,\mu}(x + i\theta y) y^{N+1}.$$

Данное разложение является асимптотикой в слабом смысле.

Б. Рассмотрим теперь общий случай и положим

$$\begin{aligned} \langle F_{q,p,\mu,\nu}(x, y), \varphi(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{[\mu+\nu]-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) \sum_{k=0}^{[\mu+\nu]-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx \end{aligned} \quad (13)$$

при $\mu + \nu \geq 1$, $\mu + \nu \notin \mathbb{Z}$ и

$$\begin{aligned} \langle F_{q,p,\mu,\nu}(x, y), \varphi(x) \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{\mu+\nu-2} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k - \frac{\varphi^{(\mu+\nu-1)}(0)}{(\mu+\nu-1)!} x^{\mu+\nu-1} \chi(x) \right] dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) \left(\sum_{k=0}^{\mu+\nu-2} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{\varphi^{(\mu+\nu-1)}(0)}{(\mu+\nu-1)!} x^{\mu+\nu-1} \chi(x) \right) dx \end{aligned}$$

при $\mu + \nu \geq 1$, $\mu + \nu \in \mathbb{Z}$.

Пусть вначале $\mu + \nu \notin \mathbb{Z}$. В этом случае

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) \sum_{k=0}^{[\mu+\nu]-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k dx &= \\ &= \sum_{k=0}^{[\mu+\nu]-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^q(x + iy) \ln^p(x - iy) x^k}{(x + iy)^\mu (x - iy)^\nu} dx. \end{aligned}$$

Интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^q(x+iy) \ln^p(x-iy) x^k}{(x+iy)^\mu (x-iy)^\nu} dx$$

заменой $x = ty$ сводятся к сумме интегралов:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^q(x+iy) \ln^p(x-iy) x^k}{(x+iy)^\mu (x-iy)^\nu} dx = \\ = \sum_{\alpha=0}^p \sum_{\beta=0}^q y^{k+1-\mu-\nu} C_p^\alpha C_q^\beta \ln^{\alpha+\beta} y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^{q-\beta}(t+i) \ln^{p-\alpha}(t-i) t^k}{(t+i)^\mu (t-i)^\nu} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае второй интеграл в правой части (13), являющийся сингулярной частью асимптотики обобщенной функции $F_{q,p,\mu,\nu}(x, y)$ при $y \rightarrow +0$, легко вычисляется. Обратимся к исследованию первого слагаемого в правой части (13) – регуляризации. Обозначим

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) \left[\varphi - \sum_{k=0}^{[\mu+\nu]-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx.$$

Очевидно, что эта функция непрерывна при $y \geq 0$. Для вычисления ее асимптотического разложения по y мы используем, как и раньше, формулу Тейлора.

Отличие от предыдущего случая здесь состоит в том, что производные $d^\alpha F/dy^\alpha$ не выражаются через производные $(\partial^\alpha/\partial x^\alpha)F_{q,p,\mu,\nu}(x, y)$. Вычисляя производную $(dF/dy)(y)$, мы видим, что она есть линейная комбинация интегралов, содержащих функции $F_{q-1,p,\mu+1,\nu}$, $F_{q,p-1,\mu,\nu+1}$, $F_{q,p,\mu+1,\nu}$ и $F_{q,p,\mu,\nu+1}$. Так как способ регуляризации зависит только от чисел μ и ν и более того только от суммы $\mu + \nu$, достаточно рассмотреть интеграл, содержащий, например, $F_{q,p,\mu+1,\nu}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu+1,\nu}(x, y) \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{[\mu+\nu]-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu+1,\nu}(x, y) \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{[\mu+\nu]} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] dx + \\ + \frac{\varphi^{[\mu+\nu]}(0)}{[\mu+\nu]!} \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu+1,\nu}(x, y) x^{[\mu+\nu]} dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства – это регуляризация, введенная выше. Этот интеграл сходится при $y \geq 0$.

Исследуем второй интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu+1,\nu}(x, y) x^{[\mu+\nu]} dx = \\ = y^{\beta-\mu-\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\ln y + \ln(t+i)]^q [\ln y + \ln(t-i)]^p t^\beta}{(t+i)^{\mu+1} (t-i)^\nu} dt, \end{aligned}$$

где $\beta = [\mu + \nu]$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\ln y + \ln(t+i)]^q [\ln y + \ln(t-i)]^p t^\beta}{(t+i)^{\mu+1} (t-i)^\nu} dt = \\ = \sum_{\alpha=0}^q \sum_{\gamma=0}^p \ln^{\alpha+\gamma} y C_q^\alpha C_p^\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^{q-\alpha}(t+i) \ln^{p-\gamma}(t-i) t^\beta}{(t+i)^{\mu+1} (t-i)^\nu} dt. \end{aligned}$$

Интегралы под знаком суммы сходятся, поэтому правая часть (14) при $y > 0$ определена. Вычислим главный член асимптотики при $y \rightarrow +0$ второго интеграла в правой части (14). В силу приведенных формул

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{q,p,\mu+1,\nu}(x,y) x^\beta dx = y^{[\mu+\nu]-(\mu+\nu)} \ln^{p+q} y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^\beta}{(t+i)^{\mu+1} (t-i)^\nu} dt (1 + o(y)).$$

Из сказанного выше следует, что производная dF/dy может быть представлена в виде суммы регуляризации функций $F_{q-1,p,\mu+1,\nu}$, $F_{q,p-1,\mu,\nu+1}$, $F_{q,p,\mu+1,\nu}$, $F_{q,p,\mu,\nu+1}$,

$$\frac{\delta^{[\mu+\nu]}(x)}{[\mu+\nu]!} y^{[\mu+\nu]-(\mu+\nu)} \ln^{p+q} y (C_{\beta,\mu,\nu} + o(y)), \quad C_{\beta,\mu,\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^\beta}{(t+i)^{\mu+1} (t-i)^\nu} dt.$$

Обозначим $\gamma = [\mu + \nu] - (\mu + \nu)$. Ясно, что $-1 < \gamma < 0$ и, следовательно, при дифференцировании по y регуляризации распределения $F_{q,p,\mu-1,\nu}$ возникает регуляризация производной (непрерывная при $y \rightarrow +0$) плюс слабосингулярная добавка $\sim y^\gamma \ln^{p+q} y$. Формула Тейлора в этом случае непосредственно неприменима, однако, т.к. в этой формуле производная

$$\frac{d^\alpha F}{dy^\alpha}(y)$$

умножается на y^α и все члены формально определены при $y \geq 0$, можно предположить, что упомянутая слабосингулярная добавка вносит на самом деле вклад в регулярную (стремящуюся к нулю) часть слабой асимптотики $F_{q,p,\mu,\nu}(x,y)$ при $y \rightarrow +0$.

Более точно, при $y > 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} F_{q,p,\mu,\nu} = i(qF_{q-1,p,\mu+1,\nu} - pF_{q,p-1,\mu,\nu+1} - \mu F_{q,p,\mu+1,\nu} + \nu F_{q,p,\mu,\nu+1}).$$

Далее, каждое слагаемое в правой части мы представим в виде, аналогичном (14). Обозначая распределение, отвечающее первому слагаемому в правой части (14), черз $F_{q,p,\mu-1,\nu}^r$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dy} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y} F_{q,p,\mu,\nu}, \varphi \right\rangle = \\ &= i \langle qF_{q-1,p,\mu+1,\nu}^r - pF_{q,p-1,\mu,\nu+1}^r - \mu F_{q,p,\mu+1,\nu}^r + \nu F_{q,p,\mu,\nu+1}^r, \varphi \rangle + i \frac{\varphi^{[\mu+\nu]}(0)}{[\mu+\nu]!} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} (qF_{q-1,p,\mu+1,\nu} - pF_{q,p-1,\mu,\nu+1} - \mu F_{q,p,\mu+1,\nu} + \nu F_{q,p,\mu,\nu+1}) x^{[\mu+\nu]} dx \equiv \\ &\equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Заметим, что dF/dy – локально интегрируемая функция при $y \geq 0$ и $F(y)$ непрерывна при $y \geq 0$, поэтому

$$F(y) - F(0) = \int_0^y I_1 dy + \int_0^y I_2 dy.$$

Второй интеграл в правой части последнего выражения вычисляется и дает вклад в регулярную часть асимптотического разложения $F(y)$, а во всех слагаемых под знаком первого интеграла можно выполнить те же операции, что и с исходным распределением $F_{q,p,\mu,\nu}$.

Таким образом, в отличие от рассмотренного выше первого случая асимптотическое разложение (по формулам типа формул Тейлора) регуляризованного интеграла не является разложением по целым степеням y .

Аналогично рассматривается случай $\mu + \nu \geq 1$, $\mu + \nu \in \mathbb{Z}$.

В. Ясно, что при $\mu + \nu < 1$ функция $F_{q,p,\mu,\nu}(x, y)$ локально суммируема по x равномерно по $y \geq 0$. Поэтому согласно теореме 4.1 существует слабый предел $F_{q,p,\mu,\nu}(x, 0)$ при $y \rightarrow +0$. Для построения разложения в этом случае используем аналог алгоритма из пункта Б нашего доказательства. Если при вычислении производной

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k} F_{q,p,\mu,\nu}(x, y), \quad k \geq 1,$$

оказывается, что полученная функция имеет степень однородности $\alpha_k > -1$, то ее слабый предел при $y \rightarrow +0$ существует; если же $\alpha_k \leq -1$, то мы применяем алгоритм регуляризации, описанный выше в пункте Б.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что псевдофункции $\text{P.f. } f^*(x, 0)$ степени однородности ν , упомянутые в теореме 4.2 и возникающие в только что описанном алгоритме разложения, сводятся к линейным комбинациям распределений (см. [36, §3 §4]) вида $P(x_{\pm}^{\nu+s} \ln^j(x_{\pm}))$, $j = 0, 1, \dots$, $s = 0, 1, \dots$.

СЛЕДСТВИЕ. Каждый элемент $f^*(x, y)$ алгебры h_0^* имеет однозначное каноническое представление в виде асимптотического [38] в слабом смысле ряда

$$f^*(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_0(m)} f_{\alpha_m, n}(x) y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y \quad (15)$$

с коэффициентами $f_{\alpha_m, n}(x)$ – распределениями из пространства E_0 , и для всех $m \geq 0$ и $n = 0, 1, \dots, n_0$ получаем

$$\begin{aligned} \langle f_{\alpha_m, n}(x), \varphi(x) \rangle &= \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} \left[\langle f^*(x, y), \varphi(x) \rangle - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \langle f_{\alpha_k, j}(x), \varphi(x) \rangle y^{\alpha_k} \ln^{n_0-j} y \right] y^{-\alpha_m} \ln^{-(n_0-n)} y. \end{aligned}$$

В частности, если элемент $f^*(x, y) \in h_0 \subset h_0^*$, то его каноническое представление, даваемое теоремой 4.3, становится его тейлоровским разложением.

Приведем примеры получения асимптотических разложений.

ПРИМЕР А. Пусть $f(x, y) = (x + iy)^{-1} \in h_0$. Обозначим $F(y) = \langle (x + iy)^{-1}, \varphi(x) \rangle$, $y > 0$. Имеем $D_y^m F(y) = (-i)^m m! \langle (x + iy)^{-m-1}, \varphi(x) \rangle$, $m = 0, 1, \dots$, и для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ существуют пределы $\lim_{y \rightarrow +0} D_y^m F(y) = (-i)^m m! \langle (x + i0)^{-m-1}, \varphi(x) \rangle$. Отсюда находим, что

$$f(x, y) = \frac{1}{x + iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iy)^k}{(x + i0)^{k+1}}, \quad y \rightarrow +0.$$

ПРИМЕР Б. Пусть $f^*(x, y) = (x + iy)^{-1/4}(x - iy)^{-1/4} \in h_0^* \setminus h_0$. Порядок однородности этой функции равен $\nu = -1/2 > -1$, и потому она разлагается в ряд по положительным степеням y . Рассмотрим функцию

$$F(y) = \langle (x + iy)^{-\frac{1}{4}}(x - iy)^{-\frac{1}{4}}, \varphi(x) \rangle, \quad y \rightarrow +0.$$

Ясно, что $F(y)$ непрерывна при $y \geq 0$ и (см. замечание 4.1)

$$F(0) = \lim_{y \rightarrow +0} F(y) = \langle P(|x|^{-\frac{1}{2}}), \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Теперь найдем производную функции $F(y)$:

$$\begin{aligned} F'(y) = & -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(x + iy)^{\frac{5}{4}}(x - iy)^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{(x + iy)^{\frac{1}{4}}(x - iy)^{\frac{5}{4}}} \right] (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \\ & + \frac{i}{4} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(x + iy)^{\frac{5}{4}}(x - iy)^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{(x + iy)^{\frac{1}{4}}(x - iy)^{\frac{5}{4}}} \right] dx. \end{aligned}$$

Делая в последнем интеграле замену $x = ty$, получим

$$F'(y) = \langle F^r(x, y), \varphi(x) \rangle + y^{-\frac{1}{2}} \varphi(0) I_0,$$

где

$$I_0 = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(t + i)^{\frac{5}{4}}(t - i)^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{(t + i)^{\frac{1}{4}}(t - i)^{\frac{5}{4}}} \right] dt$$

— сходящийся интеграл и

$$\begin{aligned} \langle F^r(x, y), \varphi(x) \rangle = & \\ = & -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(x + iy)^{\frac{5}{4}}(x - iy)^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{(x + iy)^{\frac{1}{4}}(x - iy)^{\frac{5}{4}}} \right] (\varphi(x) - \varphi(0)) dx = \\ = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{1}{(x + iy)^{\frac{5}{4}}(x - iy)^{\frac{1}{4}}} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$F(y) = F(0) + \int_0^y F'(y) dy = \langle P(|x|^{-\frac{1}{2}}), \varphi(x) \rangle + 2y^{\frac{1}{2}} \varphi(0) I_0 + \int_0^y \langle F^r(y), \varphi(x) \rangle dy.$$

Чтобы получить следующий член разложения, применим наш алгоритм к функции $F_1(y) = \langle F^r(x, y), \varphi(x) \rangle$. Заметим, что (см. замечание 4.1)

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x \pm iy)^{\frac{5}{4}}(x \mp iy)^{\frac{1}{4}}} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx = \langle P(|x|^{-\frac{3}{2}}), \varphi(x) \rangle$$

и, следовательно, $F_1(0) = \lim_{y \rightarrow +0} F_1(y) = 0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} F_1'(y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(x + iy)^{\frac{5}{4}}(x - iy)^{\frac{1}{4}}} \right] (\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \varphi'(0) \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(x + iy)^{\frac{5}{4}}(x - iy)^{\frac{1}{4}}} \right] dx. \end{aligned}$$

Полагая $x = ty$, приведем последний интеграл к виду $y^{-1/2} \varphi'(0) I_1$, где

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(t + iy)^{\frac{5}{4}}(t - iy)^{\frac{1}{4}}} \right] \Big|_{y=1} dt = 0.$$

Тогда $F_1'(y) = \langle F_1^r(x, y), \varphi(x) \rangle$, где

$$\langle F_1^r(x, y), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(x + iy)^{\frac{5}{4}}(x - iy)^{\frac{1}{4}}} \right] (\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)) dx.$$

Таким образом, т.к. $F_1(0) = 0$, то

$$F_1(y) = \int_0^y F_1'(y) dy = \int_0^y \langle F_1^r(x, y), \varphi(x) \rangle dy.$$

Подставляя $F_1(y)$ в выражение для $F(y)$, получим

$$\begin{aligned} F(y) &= F(0) + 2y^{\frac{1}{2}} \varphi(0) I_0 + \int_0^y F_1(y) dy = \\ &= F(0) + 2y^{\frac{1}{2}} \varphi(0) I_0 + \int_0^y \left(\int_0^y \langle F_1^r(x, y), \varphi(x) \rangle dy \right) dy. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \langle F_1^r(x, y), \varphi(x) \rangle = -\frac{1}{2} \langle P(|x|^{-\frac{5}{2}}), \varphi(x) \rangle,$$

и применяя наш алгоритм к функции $F_2(y) = \langle F_1^r(x, y), \varphi(x) \rangle$, находим

$$F(y) = \langle |x|^{-\frac{1}{2}}, \varphi(x) \rangle + 2y^{\frac{1}{2}} \varphi(0) I_0 - \frac{1}{2} y^2 \langle P(|x|^{-\frac{5}{2}}), \varphi(x) \rangle + O(y^{\frac{5}{2}}).$$

Таким образом,

$$(x + iy)^{-\frac{1}{4}}(x - iy)^{-\frac{1}{4}} = P(|x|^{-\frac{1}{2}}) + 2y^{\frac{1}{2}} I_0 \delta(x) - \frac{1}{2} y^2 P(|x|^{-\frac{5}{2}}) + O_{\mathcal{D}'}(y^{\frac{5}{2}}), \quad y \rightarrow +0,$$

где I_0 – константа, определенная выше.

Здесь под $O_{\mathcal{D}'}(y^{M-1})$ понимается такое распределение $g(x, y)$, что для любой функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеем $\langle g(x, y), \varphi(x) \rangle = O(y^{M-1})$, $y \rightarrow +0$, где в последнем равенстве знак $O(y^{M-1})$ используется в общепринятом смысле. Ниже во всех равенствах, включающих обобщенные функции, O -оценки понимаются в указанном смысле.

4.2. Пусть $f^*(x, y) \in h_0^*$ – простейшая функция (12). Введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1 (ср. [26, 28]). Назовем *асимптотическим распределением* $f_y^*(x) = A_0^*[f^*(x, y)]$ следующее:

- 1) слабый предел $f^*(x) = A_0^*[f^*(x, y)] = \lim_{y \rightarrow +0} f^*(x, y) \in E_0$, если $f^*(x, y) \in h_0$;
- 2) асимптотическое разложение

$$f_y^*(x) = A_0^*[f^*(x, y)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_0} f_{\alpha_m, n}(x) y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y, \quad y \rightarrow +0, \quad (16)$$

даваемое следствием из теоремы 4.3, если $f^*(x, y) \in h_0^* \setminus h_0$.

Произвольная функция $f^*(x, y) \in h_0^*$ однозначно представима в виде $f^*(x, y) = f_0^*(x, y) + f_1^*(x, y)$, где $f_0^*(x, y) \in h_0$ и $f_1^*(x, y) \in h_0^* \setminus h_0$, и потому асимптотическое распределение $A_0^*[f^*(x, y)]$ определяется как сумма асимптотических распределений $A_0^*[f_0^*](x, y) + A_0^*[f_1^*](x, y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f^*(x, y) \in h_0^*$, то $A_0^*[f^*(x, y)] = 0$ тогда и только тогда, когда $f^*(x, y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f^*(x, y) = 0$, то очевидно, что $A_0^*[f^*(x, y)] = 0$. Предположим, что $f^*(x, y) \neq 0$, но $A_0^*[f^*(x, y)] = 0$. Если $f^*(x, y) \in h_0$ или $f^*(x, y) \in h_0^* \setminus h_0$, то сделанное предположение невозможно в силу линейной независимости простейших функций (12). Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $f^*(x, y) = f_0^*(x, y) + f_1^*(x, y)$, где $f_0^*(x, y) \in h_0$ и $f_1^*(x, y) \in h_0^* \setminus h_0$. При этом наше предположение означает, что элемент $f_1^*(x, y) \neq 0$ имеет асимптотическое разложение, даваемое теоремой 4.3, в котором равны нулю все слагаемые, содержащие множители $y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y$, где либо $\alpha_m \neq 0$, либо $n_0 \neq 0$. В свою очередь, это означает, что

$$\frac{d^s}{dy^s} \langle f_1^*(x, y), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

при всех $s \geq 1$, что невозможно, если $f_1^*(x, y) \neq \text{const}$. Предложение доказано.

Обозначим через $E_0^* = A_0^*[h_0^*]$ линейное пространство всех асимптотических распределений $f_y^*(x) = A_0^*[f^*(x, y)]$, $f^*(x, y) \in h_0^*$. Здесь нижний индекс y в $f_y^*(x)$ обозначает зависимость разложения от асимптотической последовательности, являющейся функцией параметра аппроксимации y . В силу доказанного выше предложения для каждого элемента $f_y^*(x) \in E_0^*$ существует прообраз $f^*(x, y) \in h_0^*$. Согласно определению 4.1 $A_0^*|_{h_0} = A_0$ и $A_0^*[h_0] = E_0$, поэтому $E_0 \subset E_0^*$. Отметим, что E_0^* – подпространство в пространстве формальных рядов по системе функций $y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y$ с коэффициентами, являющимися распределениями из E_0 .

Теперь введем на пространстве асимптотических распределений E_0^* и тем самым для распределений из E_0 операцию умножения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Произведением асимптотических распределений $f_{y,1}^*(x)$ и $f_{y,2}^*(x)$ из E_0^* называется асимптотическое распределение

$$f_y^*(x) = f_{y,1}^*(x) \circ f_{y,2}^*(x) = A_0^*[f_1^*(x, y)f_2^*(x, y)] \in E_0^*, \quad (17)$$

где $f_k^*(x, y) \in h_0^*$ – аппроксимации асимптотических распределений $f_{y,k}^*$, $k = 1, 2$.

Поскольку h_0^* – ассоциативная и коммутативная алгебра функций и $A_0^*: h_0^* \rightarrow E_0^*$ – изоморфизм, умножение (17) ассоциативно и коммутативно. Согласно (16) умножение (17) есть умножение асимптотических рядов.

Теперь перенесем нашу алгебраическую конструкцию на более общий случай. Введем линейное пространство распределений E , элементами которого являются конечные суммы вида

$$\hat{f}_y^*(x) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{n_0} f_{\alpha_m, n}(x) y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y, \quad (18)$$

где $f_{\alpha_m, n}(x)$ – распределения из E_0 и $\alpha_m \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots$, а $n_0 = n_0(m) \in \mathbb{N} \cup 0$, $M = M(\hat{f}_y^*) \cup \mathbb{N}$.

Для того чтобы перемножить элементы E , введем ассоциативную и коммутативную дифференциальную (по переменной x) алгебру h^* функций $\hat{f}^*(x, y)$, которые являются конечными линейными комбинациями элементов вида

$$\hat{F}_{q,p,\mu,\nu;\alpha_m,n}^*(x, y) = F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) y^{\alpha_m} \ln^n y, \quad y > 0, \quad (19)$$

где $F_{q,p,\mu,\nu}(x, y)$ – простейшие функции (12).

Пусть элемент $\hat{f}^*(x, y) \in h^*$ – линейная комбинация линейно независимых функций $F_{q,p,\mu,\nu}(x, y) y^{\alpha_m} \ln^n y$ при $\alpha_m < 1$. По аналогии с определением 4.1 назовем *асимптотическим распределением* $\hat{f}_y^*(x) = A_0^*[\hat{f}^*(x, y)]$ асимптотическое разложение, являющееся линейной комбинацией асимптотических разложений $y^{\alpha_m} \ln^n y A_0^*[F_{q,p,\mu,\nu}(x, y)]$.

Аналогично доказанному выше предложению видим, что если $\hat{f}^*(x, y) \in h^*$, то $A_0^*[\hat{f}^*(x, y)] = 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}^*(x, y) = 0$. Доказательство сводится к тому, что если элемент $\hat{f}^*(x, y) \neq 0$, но $A_0^*[\hat{f}^*(x, y)] = 0$, то $\hat{f}^*$ имеет асимптотическое разложение, в котором равны нулю все слагаемые, содержащие множители $y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y$, где либо $\alpha_m \neq 0$, либо $n_0 - n \neq 0$. В свою очередь, это означает, что

$$\frac{d^s}{dy^s} \langle \hat{f}^*(x, y), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

при всех $s \geq 0$, что невозможно, если $\hat{f}^*(x, y) \neq 0$.

Обозначим через E^* линейное пространство асимптотических распределений $\hat{f}_y^*(x) = A_0^*[\hat{f}^*(x, y)]$, где $\hat{f}^*(x, y)$ пробегает все пространство h^* . Очевидно, что $h_0^* \subset h^*$ и изоморфизм $A_0^*: h_0^* \rightarrow E_0^*$ продолжается до изоморфизма $A_0^*: h^* \rightarrow E^* = A_0^*[h^*]$.

По построению E^* – ассоциативная и коммутативная алгебра. Заметим, что E^* лежит в пространстве упомянутых выше формальных рядов по системе функций

$y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y$ с коэффициентами – распределениями из E_0 ; E^* содержит E_0^* как подпространство. Ясно, что E_0 вкладывается в пространство E^* тождественно, а, например, подпространство yE_0 вкладывается в пространство E^* как подпространство соответствующих асимптотических распределений – асимптотических разложений в слабом смысле для аппроксимаций элементов из yE_0 .

На пространстве E_0^* определена операция дифференцирования, поскольку если $f^*(x, y) \in h_0^*$ есть аппроксимация асимптотического распределения $f_y^*(x) \in E_0^*$, то

$$A_0^*[D_x^s f^*(x, y)] = D_x^s f_y^*(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_0} D_x^s f_{\alpha_m, n}(x) y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y.$$

Очевидно, что эта операция распространяется также и на элементы пространства E^* .

Определим *умножение асимптотических распределений* $\hat{f}_y^*(x) \in E^*$ на *функции* из $C^\infty(\mathbb{R})$, рассматривая произведения $g(x)\hat{f}_y^*(x)$ как элементы тензорного произведения EC алгебр E^* и $C^\infty(\mathbb{R})$. Ясно, что EC – ассоциативная и коммутативная алгебра. Произведение элементов из EC есть линейная комбинация произведений гладких функций на асимптотические распределения из E^* .

Обозначим через hC пространство аппроксимаций EC , элементами которого являются функции $g(x)\hat{f}^*(x, y)$, где $\hat{f}^*(x, y) \in h^*$.

Операция дифференцирования на элементах EC определяется естественным образом по формуле Лейбница.

Сопоставим элементу EC асимптотическое распределение $\hat{A}_\infty[g(x)\hat{f}_y^*(x)]$. Для этого заметим, что $E^* = E_0 \oplus (E^* \setminus E_0)$, т.е. для любого элемента $\hat{f}_y^*(x)$ справедливо однозначное представление в виде суммы

$$\hat{f}_y^*(x) = \hat{f}_1^*(x) + \hat{f}_{y,2}^*(x), \quad \hat{f}_1^*(x) \in E_0, \quad \hat{f}_{y,2}^*(x) \in E^* \setminus E_0.$$

Введем оператор $A_s \oplus I$, который действует на $E^* \setminus E_0$ как тождественный и сопоставляющий элементу $\hat{f}_1^*(x) \in E_0$ асимптотическое распределение $A_s[\hat{f}_{y,1}^*(x)]$, получающееся после разложения аппроксимации $\hat{f}_1^*(x, y) \in h_0$ в ряд Тейлора согласно теореме 4.3.

Положим

$$\hat{A}_\infty[g(x)\hat{f}_y^*(x)] = g(x)(A_s \oplus I)[\hat{f}_y^*(x)],$$

где в правой части умножение гладкой функции на асимптотическое распределение понимается в смысле теории распределений.

Введем понятие эквивалентности формальных рядов вида

$$r_y = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^{n_0(m)} c_{\alpha_m, n} y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y,$$

где $c_{\alpha_m, n}$ – комплексные числа, $\alpha_m \in \mathbb{R}$ – возрастающая последовательность и $n_0(m) \in \mathbb{N} \cup 0$.

Для любого ряда r_y положим $\alpha(r_y) = \min_m \alpha_m$, $n(r_y) = \max_n (n_0(m) - n)$, где α_m и $(n_0 - n)$ – показатели степеней, для которых $c_{\alpha_m, n} \neq 0$.

Будем говорить, что *ряды* $r_{y,1}$ и $r_{y,2}$ *эквивалентны*, записывая это как $r_{y,1} \approx r_{y,2}$, если $\alpha(r_{y,1}) = \alpha(r_{y,2})$, $n(r_{y,1}) = n(r_{y,2})$ и $c_{\alpha(r_{y,1}), n(r_{y,1})} = c_{\alpha(r_{y,2}), n(r_{y,2})}$.

Будем говорить, что *элементы* $X_1, X_2 \in EC$ *эквивалентны*, записывая это как $X_1 \approx X_2$, если для любой основной функции $\langle \hat{A}_\infty[X_1], \varphi(x) \rangle \approx \langle \hat{A}_\infty[X_2], \varphi(x) \rangle$.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ:

- 1) $\hat{f}_y^*(x) \circ 1 = \hat{f}_y^*(x)$, $\hat{f}_y^*(x) \in E^*$;
- 2) $\hat{f}_{y,1}^*(x) \circ (\hat{f}_{y,2}^*(x) + \hat{f}_{y,3}^*(x)) = \hat{f}_{y,1}^*(x) \circ \hat{f}_{y,2}^*(x) + \hat{f}_{y,1}^*(x) \circ \hat{f}_{y,3}^*(x)$, где $\hat{f}_{y,1}^*(x), \hat{f}_{y,2}^*(x), \hat{f}_{y,3}^*(x) \in E^*$;
- 3) $P(x) \circ \hat{f}_y^*(x) \approx P(x)\hat{f}_y^*(x)$, где $P(x)$ — полином. В частности, если m и n — натуральные числа, то $x^m \circ x^n = x^{m+n} + O(y)$, $y \rightarrow +0$;
- 4) если $X_1 \approx X_2$, то, вообще говоря, $(X_1)^n \not\approx (X_2)^n$, где $n \geq 2$. Так, например,

$$[y\delta(x)]^3 \approx \frac{6}{(4\pi)^2} [y\delta(x)], \quad y \rightarrow +0, \quad [y\delta(x)]^2 \approx \frac{1}{2\pi} [y\delta(x)], \quad y \rightarrow +0,$$

и, следовательно, $[y\delta(x)]^3 \not\approx [y\delta(x)]^2 \circ [y\delta(x)]$.

В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, мы будем опускать знак произведения $\circ$ при сомножителях-распределениях.

Вычислим произведения некоторых распределений:

ПРИМЕР А. $(x + i0)^{-1} \circ 1 = (x + i0)^{-1}$. Аппроксимацией распределения $(x + i0)^{-1}$ будет функция $f(x, y) = (x + iy)^{-1} \in h_0$. Разложение этой функции было получено в примере А пункта 4.1. Так как мы отождествляем распределение из E_0 с асимптотическим распределением из E^* , являющимся разложением в ряд Тейлора, то

$$(x + i0)^{-1} \circ 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iy)^k}{(x + i0)^{k+1}} \Big|_{y \rightarrow +0} \equiv (x + i0)^{-1}.$$

ПРИМЕР Б.

$$\begin{aligned} (x + i0)^{-m} \circ (x - i0)^{-n} &= A_0^*[z^{-m}\bar{z}^{-n}] = \\ &= (-1)^{m-1} \left(\frac{i}{2}\right)^{m+n-2} \pi \sum_{s=0}^{m+n-2} B_s^+ \frac{i^s}{s!} \delta^{(s)}(\tau) y^{-m-n+s+1} + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{i\pi}{(m+n-1)!} [(-1)^m + 2^{-m-n+2} B_{m+n-1}^+] \delta^{(m+n-1)}(\tau) + \\ &+ P(\tau^{-m-n}) + (-1)^{m-1} (i/2)^{m+n-1} \sum_{s=m+n}^{\infty} i^s [(-1)^s (\tau + i0)^{-s-1} B_s^+ - \\ &- (\tau - i0)^{-s-1} B_s^-] y^{-m-n+s+1} \in E^*, \quad y \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $m, n = 1, 2, \dots$; $B_s^+ = B_s(m, n)$, $B_s^- = B_s(n, m)$, а коэффициенты $B_s(m, n)$ имеют вид

$$B_s(m, n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^s C_{m+n-k-2}^{n-1} C_s^k (-2)^k, & 0 \leq s \leq m-1, \\ \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+n-k-2}^{n-1} C_s^k (-2)^k, & s \geq m. \end{cases}$$

При выводе этого разложения существенно использовались комбинаторные тождества, доказанные А. П. Южаковым по просьбе одного из авторов.

ПРИМЕР В.

$$(x+i0)^{-\frac{1}{4}} \circ (x-i0)^{-\frac{1}{4}} = P(|x|^{-\frac{1}{2}}) + 2y^{\frac{1}{2}} I_0 \delta(x) - \frac{1}{2} y^2 P(|x|^{-\frac{5}{2}}) + O_{\mathcal{D}'}(y^{\frac{5}{2}}), \quad y \rightarrow +0,$$

где I_0 – константа, определенная в примере Б пункта 4.1.

Для вычисления произведения распределений $(x+i0)^{-1/4} \circ (x-i0)^{-1/4}$ заметим, что аппроксимацией этого произведения будет функция $f^*(x, y) = (x+iy)^{-1/4} (x-iy)^{-1/4}$. Из разложения этой функции, полученного в примере Б пункта 4.1, следует наше утверждение.

ПРИМЕР Г.

$$[\delta(x)]^2 = \frac{1}{2\pi} y^{-1} \delta(x) + \frac{1}{4\pi} y \delta''(x) + \frac{1}{\pi^2} y^2 P(x^{-4}) + O_{\mathcal{D}'}(y^3), \quad y \rightarrow +0.$$

Для доказательства этого соотношения построим для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ при $y \rightarrow +0$ асимптотику интеграла

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x, y)]^2 \varphi(x) dx = \frac{y^2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \varphi(x) dx = \\ &= \frac{y^2}{\pi^2} \left\{ \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx + \varphi'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \varphi''(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{1}{6} \varphi'''(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \chi(x)}{(x^2 + y^2)^2} dx + \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left[\varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \frac{1}{2} \varphi''(0)x^2 - \frac{1}{6} \varphi'''(0)x^3 \chi(x) \right] dx \right\}, \end{aligned}$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция отрезка $[-1, 1]$. Сделав в первых четырех интегралах замену $x = ty$ и учитывая, что последний интеграл при $y \rightarrow +0$ стремится к $\langle P(x^{-4}), \varphi(x) \rangle$ (см. [36, гл. I, § 4]), находим

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{y^{-1}}{\pi^2} \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt + \\ &\quad + \frac{y}{2\pi^2} \varphi''(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2} dt + \frac{y^2}{\pi^2} \text{P.f.} \int_{-\infty}^{\infty} x^{-4} \varphi(x) dx + O(y^3). \end{aligned}$$

Вычисляя в последнем соотношении интегралы, получим требуемый результат. В работе [28] с использованием формулы (20) найдено полное асимптотическое разложение $[\delta(x)]^2$, в работе [30] получен главный член этого представления.

ПРИМЕР Д.

$$x \circ \delta(x) = \pi^{-1} y P(x^{-1}) + O_{\mathcal{D}'}(y^2), \quad y \rightarrow +0.$$

По определению сначала следует вычислить произведение аппроксимаций:

$$x \circ \delta(x) \rightarrow \frac{1}{2} (z + \bar{z}) \cdot \frac{-1}{2\pi i} (z^{-1} + \bar{z}^{-1}) = \frac{1}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad z = x + iy.$$

Далее при $y \rightarrow +0$ найдем, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi} y [\langle P(x^{-1}), \varphi(x) \rangle + O(y)] = \frac{1}{\pi} y \langle P(x^{-1}), \varphi(x) \rangle + O(y^2).$$

5. АЛГЕБРА, ПОРОЖДЕННАЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ИЗ $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$

Используя конструкции разделов 3, 4, построим для случая многих переменных специальную алгебру асимптотических распределений, включающую некоторые распределения. В этой алгебре мы и будем искать обобщенные решения нелинейных систем (3).

Так как $\nabla_x S(x, t)|_{S=0} \neq 0$, то в окрестности любой точки поверхности $S = 0$ можно ввести нормальные локальные координаты (τ, τ') , в которых $\tau = S(x, t)$, а остальные координаты τ' выбрать так, что формулы перехода от (x, t) к (τ, τ') будут задаваться бесконечно дифференцируемыми функциями с положительным якобианом

$$D \begin{pmatrix} x, t \\ \tau, \tau' \end{pmatrix}.$$

Обозначим этот переход через $U: (x, t) \rightarrow (\tau, \tau')$, $(x, t) \in \Omega$. Будем предполагать, что нормальные координаты можно ввести глобально в Ω . Это предположение позволяет ввести *линейное пространство* $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ *распределений* вида $f(S)$, $f(\tau) \in \mathcal{E}_0$. Определим *операцию умножения* для элементов из $\mathcal{E}_0$, вкладывая его, как и в разделе 4, в пространство $\mathcal{E}_0^*$ асимптотических распределений

$$A^*[f^*(\tau, y)]|_{\tau=S(x, t)}, \quad f^*(\tau, y) \in h_0^*.$$

Далее, аналогично разделу 4 введем *ассоциативную и коммутативную алгебру* $\mathcal{E}^*$, элементы которой имеют вид

$$\hat{f}_y^*(S) = A^*[\hat{f}^*(\tau, y)]|_{\tau=S(x, t)}, \quad f^*(\tau, y) \in h^*.$$

По построению $\mathcal{E}^*$ содержит $\mathcal{E}_0$ как подпространство.

Определим *умножение асимптотических распределений* $\hat{f}_y^*(S) \in \mathcal{E}^*$ на *функции* $g(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, рассматривая произведения $g(x, t)\hat{f}_y^*(S)$ как элементы тензорного произведения $\mathcal{EC}$ алгебр $\mathcal{E}^*$ и $C^\infty(\bar{\Omega})$. Ясно, что $\mathcal{EC}$ – ассоциативная и коммутативная алгебра. Операция дифференцирования на элементах $\mathcal{EC}$ определяется по аналогии с операцией на EC .

Как и в разделе 4, сопоставим элементу $\mathcal{EC}$ асимптотическое распределение $\hat{A}_\infty[g(x, t)\hat{f}_y^*(S)]$, полагая

$$\hat{A}_\infty[g(x, t)\hat{f}_y^*(S)] = g(x, t)(A_s \oplus I)[\hat{f}_y^*(\tau)]|_{\tau=S(x, t)},$$

где в правой части умножение гладкой функции на асимптотическое распределение понимается в смысле теории распределений.

Произвольный элемент $F_y^*(x, t) \in \hat{A}_\infty[\mathcal{EC}]$ в силу (16) может быть представлен в виде ряда

$$F_y^*(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_0(m)} g_{\alpha_m, n}(x, t) f_{\alpha_m, n}(S(x, t)) y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y, \quad (21)$$

где $g_{\alpha_m, n}(x, t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f_{\alpha_m, n}(\tau)$ – распределения из E_0 , $\alpha_m \in \mathbb{R}$ – возрастающая последовательность и $n_0(m) \in \mathbb{N} \cup 0$. В силу конструкции из раздела 4 ряд в правой части равенства (21) является слабой асимптотикой элемента $F_y^*(x, t)$, т.е. для любого M имеем

$$F_y^*(x, t) - \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{n_0(m)} g_{\alpha_m, n}(x, t) f_{\alpha_m, n}(S(x, t)) y^{\alpha_m} \ln^{n_0-n} y = O_{\mathcal{D}'}(y^{M-1}), \quad y \rightarrow +0.$$

Аналогично разделу 4 вводится понятие эквивалентности ($\approx$) элементов из $\mathcal{EC}$.

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПОДАЛГЕБРЫ В $\mathcal{EC}$

6.1. Введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Подмножество $\mathcal{A}_N^* \subset \mathcal{EC}$ называется *нетривиальной асимптотической подалгеброй порядка N* , если для любого конечного числа элементов $f_k^*(x, t) \in \mathcal{A}_N^*$, $k = 1, 2, \dots, s$, имеет место представление

$$\circ_{k=1}^s f_k^*(x, t) = \sum_j A_j g_j^*(x, t) + g_{N,p}^*(x, t).$$

Здесь A_j – константы, $g_j^*(x, t) \in \mathcal{A}_N^*$ и $g_{N,p}^*(x, t) \approx y^N \ln^p y g_0(x, t)$, где $g_0(x, t) \neq 0$ – распределение, p – целое число, зависящее от набора элементов f_k^* и все $g_k^*(x, t) \approx y^{N_k} \ln^{s_k} y g_{k,0}(x, t)$, где $g_{k,0}(x, t)$ – распределения, причем или $N_k < N$ для всех k , или, если $N_k = N$, то $s_k > p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Подмножество $\mathcal{C}_M^* \subset \mathcal{EC}$ называется *нетривиальной подалгеброй, асимптотической по гладкости порядка M* , если для любого конечного числа элементов $f_k^*(x, t) \in \mathcal{C}_M^*$, $k = 1, 2, \dots, s$, имеет место представление

$$\circ_{k=1}^s f_k^*(x, t) = \sum_j B_j g_j^*(x, t) + g^*(x, t),$$

где B_j – константы, $g_j^*(x, t) \in \mathcal{C}_M^*$, а $w\text{-}\lim_{y \rightarrow 0} g^*(x, t) \in C^M(\overline{\Omega})$, $g(x, t) \neq 0$ и, если $w\text{-}\lim_{y \rightarrow 0} \hat{A}_\infty[g_k^*(x, t)]$ – регулярные распределения, то они не принадлежат $C^M(\overline{\Omega})$.

6.2. Рассмотрим в алгебре $\mathcal{EC}$ несколько нетривиальных асимптотических подалгебр, которые нам понадобятся в дальнейшем.

ЛЕММА 6.1. Множество

$$\{a(x, t) + b(x, t)\theta(S) : a(x, t), b(x, t) \in C^\infty(\overline{\Omega})\},$$

где $S = S(x, t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, образует асимптотическую подалгебру по mod $o(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на том, что $[\theta(\tau)]^n = \theta(\tau) + o_{\mathcal{D}'}(1)$, $y \rightarrow +0$.

У нас, как и в работах [18, 23], $[\theta(\tau)]^n \neq \theta(\tau)$ как элементы E^* , но в смысле слабого равенства $[\theta(\tau)]^n \approx \theta(\tau)$ по mod $o_{\mathcal{D}'}(1)$, $y \rightarrow +0$.

ЛЕММА 6.2. *Множество*

$$\{a(x, t) + b(x, t)y\delta(S) + c(x, t)y\theta(S), \quad y \rightarrow +0: \quad a(x, t), b(x, t), c(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})\},$$

где $S = S(x, t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, образует асимптотическую подалгебру по mod $o(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = \tau + iy$. Для любого целого $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} [y\delta(\tau)]^n &= A^* \left[\left\{ y \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) (z^{-1} - \bar{z}^{-1}) \right\}^n \right] = \\ &= A^* \left[\frac{y^n i^n}{(2\pi)^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} z^{-k} \bar{z}^{-n+k} \right] = \\ &= \frac{i^n}{(2\pi)^n} A^* \left[y^n (z^{-n} + (-1)^n \bar{z}^{-n}) + y^n \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (-1)^{n-k} z^{-k} \bar{z}^{-n+k} \right]. \end{aligned}$$

Применяя к $z^{-k} \bar{z}^{-n+k}$ представление (20), находим, что

$$[y\delta(\tau)]^n \approx \frac{1}{(4\pi)^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} B_0^+(k, n-k) y\delta(\tau), \quad y \rightarrow +0,$$

где $B_0^+(k, n-k) = C_{n-2}^{k-1}$. Замечая, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k C_{n-2}^{k-1} = C_{2n-2}^{n-1},$$

получим

$$[y\delta(S)]^n \approx A_n y\delta(S), \quad y \rightarrow 0, \quad A_n = (4\pi)^{1-n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

Согласно лемме 6.1 $[\theta(S)]^n = \theta(S) + o_{\mathcal{D}'}(1)$, $y \rightarrow +0$. Можно найти также $[\theta(\tau)]^r \circ [y\delta(\tau)]^s = B_{r,s} y\delta(\tau) + o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$, где $B_{r,s}$ — вычисляемые константы. Отсюда следует утверждение леммы.

7. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

7.1. Дадим определения обобщенных решений $u^*(x, t) = (u_1^*(x, t), \dots, u_m^*(x, t))$ системы (3) в пространстве $\tilde{\mathcal{E}}$, где $\tilde{\mathcal{E}}$ состоит из m -мерных векторов, компоненты которых принадлежат алгебре $\mathcal{EC}$. Везде ниже значок $\sim$ над символом пространства обозначает m -кратное прямое произведение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Точным обобщенным решением* системы (3) в пространстве $\tilde{\mathcal{E}}$ называется такой элемент $u^*(x, t) \in \tilde{\mathcal{E}}$, что

$$\hat{A}_\infty^* L[u^*(x, t)] = 0.$$

Каждому асимптотическому распределению $\hat{A}_\infty^* u^*(x, t)$ сопоставим конечный отрезок соответствующего ему асимптотического ряда $\hat{A}_N^* u^*(x, t)$ так, что

$$\hat{A}_N^* u^*(x, t) - \hat{A}_\infty^* u^*(x, t) = O_{\mathcal{D}'}(y^{N+1}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2 [5, 6]. *Нетривиальным асимптотическим обобщенным решением системы (3) по mod $O_{\mathcal{D}'}(y^{N+1})$ в пространстве $\tilde{\mathcal{E}}$ будем называть такой элемент $u^*(x, t) \in \tilde{\mathcal{E}}$, что*

$$\hat{A}_N^* L[u^*(x, t)] = O_{\mathcal{D}'}(y^{N+1}).$$

ЛЕММА 7.1. *Если система (3) обладает классическим $\tilde{C}^\infty$ -решением, то это решение будет точным решением как элемент пространства $\tilde{\mathcal{E}}$ в смысле определения 7.1.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3 (ср. [39, гл. VI, § 4.3]). Нетривиальным асимптотическим по гладкости mod $\tilde{C}^M(\bar{\Omega})$ решением системы (3) будем называть такой элемент $u^*(x, t) \in \tilde{\mathcal{E}}$, что

$$w\text{-}\lim_{y \rightarrow 0} \hat{A}_\infty L[u^*(x, t)] \in \tilde{C}^M(\bar{\Omega}),$$

причем, если $w\text{-}\lim_{y \rightarrow 0} \hat{A}_\infty u^*(x, t)$ – регулярное распределение, то оно не принадлежит $\tilde{C}^M(\bar{\Omega})$.

7.2. Хотя в качестве пространства решений системы (3) может выступать $\tilde{\mathcal{E}}$, мы будем рассматривать только решения $u^*(x, t)$ из подпространства $\tilde{\mathcal{G}} \subset \tilde{\mathcal{E}}$, состоящего из конечных сумм вида

$$f^*(x, t) = \sum_{i=1}^I g_{1,i}(x, t) f_{1,i}(S) + y \sum_{j=1}^J g_{2,j}(x, t) f_{2,j}(S),$$

где векторы $g_{1,i}(x, t), g_{2,j}(x, t) \in \tilde{C}^\infty(\bar{\Omega})$, а $f_{1,i}(S), f_{2,j}(S)$ – распределения из $\mathcal{E}_0$.

Пространство $\tilde{\mathcal{G}}$ инвариантно относительно операции дифференцирования, но произведение элементов этого пространства в общем случае может принадлежать $\tilde{\mathcal{E}} \setminus \tilde{\mathcal{G}}$. Из записи же системы (3) в виде

$$\frac{\partial u^*}{\partial t}(x, t) = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x, t, u^*)$$

ясно, что для нахождения ее асимптотических решений достаточно найти подмножества таких асимптотических распределений $u^*(x, t) \in \tilde{\mathcal{G}}$, на которых полиномиально нелинейные отображения

$$u^* \rightarrow F_k(x, t, u^*), \quad k = 1, \dots, n, \quad (22)$$

с точностью до $O_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$, и с точностью до умножения на функции из $\tilde{C}^\infty(\bar{\Omega})$ являются автоморфизмами.

Ниже мы найдем подпространства векторов – элементов из $\tilde{\mathcal{G}}$, все компоненты которых принадлежат асимптотическим подалгебрам в $\mathcal{EC}$ и на которых отображения (22) будут асимптотическими (по mod $O_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$) автоморфизмами. Решения систем (3) будем искать в виде линейных комбинаций элементов этих алгебр.

Из определения 6.1 следует, что если элемент из $\mathcal{EC}$ принадлежит асимптотической подалгебре, то любая его степень также должна принадлежать этой подалгебре.

Ниже проводится алгебраический анализ, позволяющий выделить асимптотические подалгебры.

ЛЕММА 7.2. Пусть элемент $f_y^*(S(x, t)) \in \mathcal{E}^*$ имеет вид $f(S(x, t))$ или $yf(S(x, t))$, где распределение $f(\tau) \in E_0$ обладает степенью однородности $\nu < 0$, и пусть для любого целого $N \geq 2$ справедливо $[f_y^*(S(x, t))]^N \in \mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ с точностью до $o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$. Тогда либо $f_y^*(S(x, t)) = y\delta(S)$, либо $f_y^*(S(x, t)) = yP(S^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если распределение $f(S) \in \mathcal{E}_0$ имеет степень однородности $\nu \leq -1$, то его N -я степень обладает степенью однородности $\nu N \leq -N$, $N = 2, 3, \dots$, и согласно теореме 4.2 можно записать

$$\begin{aligned} [f(S)]^N &= \delta^{(k)}(S) y^{\nu N + k + 1} \sum_{j=0}^s A_{N+k,j} \ln^{s-j} y + o_{\mathcal{D}'}(y^{\nu N + k + 1}) \approx \\ &\approx \delta^{(k)}(S) y^{\nu N + k + 1} \sum_{j=0}^s A_{N+k,j} \ln^{s-j} y, \end{aligned}$$

где $A_{N+k,j}$ и $s \geq 0$ – некоторые целые числа, причем здесь $k = 0, 1$ в зависимости от связи четностей ν , N и четности распределения $f(S)$. Таким образом, главный член асимптотики имеет вид

$$[y^r f(S)]^N \approx \delta^{(k)}(S) y^{(\nu+r)N + k + 1} \sum_{j=0}^s A_{N+k,j} \ln^{s-j} y, \quad r = 0, 1, \quad (23)$$

где k равно 0 или 1.

Из (23) видно, что только асимптотические распределения вида $yf(S)$, у которых $f(S)$ – однородное распределение степени $\nu = -1$ и для которых $A_{N+k,j} = 0$, $j = 0, 1, \dots, s-1$, при возведении в любую степень $N \geq 2$ с точностью до $o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$, остаются в пространстве $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$. В частности, если нечетны как распределение $f(S)$, так и степень N , то $A_{N,s} = 0$. Таким образом, только асимптотические распределения $y\delta(S)$, $yP(S^{-1})$, $yS_{\pm}^{-1} \ln^p(S_{\pm})$ при возведении в произвольную степень $N \geq 2$ имеют главный член, с точностью до $o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$, остающийся в пространстве $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$.

Однако, проделав довольно громоздкие вычисления, можно показать, что при возведении в степень $N \geq 2$ вектор-распределений $yS_{\pm}^{-1} \ln^p(S_{\pm})$, $p = 0, 1, 2, \dots$, возникают отличные от нуля члены, имеющие порядок малости $y \ln^j y$, $y \rightarrow +0$, $j = 1, 2, \dots$, который меньше, чем y . Поэтому этими членами пренебречь нельзя; так, например,

$$[yx_-^{-1}]^N = A^* \left[\left\{ -y \frac{1}{2\pi i} [z^{-1} \ln z - \bar{z}^{-1} \ln \bar{z}] \right\}^N \right], \quad x \in \mathbb{R}, \quad z = x + iy.$$

Аппроксимация главного члена последнего выражения имеет вид

$$y^N \frac{1}{(2\pi i)^N} \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j C_N^j \frac{\ln^j z \ln^{N-j} \bar{z}}{z^j \bar{z}^{(N-j)}}.$$

После замены $x = yt$ отсюда вследствие алгоритма теоремы 4.3 получим

$$\begin{aligned} [yx^{-1}]^N &\approx y\delta(x) \frac{1}{(2\pi i)^N} \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j C_N^j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\ln y + \ln(t+i))^j (\ln y + \ln(t-i))^{N-j}}{(t+i)^{nj} (t-i)^{n(N-j)}} dt = \\ &= \delta(x) \sum_{k=0}^N A_{N,s} y \ln^k y, \end{aligned}$$

где $A_{N,s}$ – некоторые константы.

Итак, в рассматриваемом случае остаются элементы $y\delta(S)$ и $yP(S^{-1})$.

Если распределение $f(S)$ имеет степень однородности $-1 < \nu < 0$, то согласно формуле (23) ни оно само, ни асимптотическое распределение $yf(S)$ при возведении в произвольную степень не остаются в пространстве $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$.

ЛЕММА 7.3. *Произведения распределений $[\text{sign}(S)]^N$, $[\theta(\pm S)]^N$, $[\theta(S)]^r \circ [\theta(-S)]^s$, $N = 2, 3, \dots$, $r, s = 1, 2, \dots$, принадлежат пространству $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ по $\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(1)$ и не принадлежат ему по $\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$. Здесь $\text{sign}(S) = \theta(S) - \theta(-S)$. Степени распределений $[S_{\pm}^n \ln^p S_{\pm}]^N$, $[S_{\pm}^{\lambda} \ln^p S_{\pm}]^N$, $[S_{+}^m \ln^p S_{+}]^r \circ [S_{-}^n \ln^q S_{-}]^s$, $[S_{+}^{\lambda} \ln^p S_{+}]^r \circ [S_{-}^{\mu} \ln^q S_{-}]^s$ при $m, n = 1, 2, \dots$, $\lambda, \mu > 0$, $M, N = 2, 3, \dots$, $r, s = 1, 2, \dots$, $p, q = 0, 1, 2, \dots$, принадлежат пространству $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ по $\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале найдем разложение (16) для N -й степени аппроксимации распределения $\text{sign}(\tau)$, когда

$$J(y) = \langle [\text{sign}(\tau, y)]^N, \varphi(\tau) \rangle = \left(\frac{2}{\pi} \right)^N \int_{-\infty}^{\infty} [\arctg(\tau/y)]^N \varphi(\tau) d\tau.$$

Для этого, продифференцировав $J(y)$ по y , применим алгоритм теоремы 4.3 (ср. [37, гл. I, § 4]):

$$\begin{aligned} J'(y) &= -N \left(\frac{2}{\pi} \right)^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{\tau^2 + y^2} [\arctg(\tau/y)]^{N-1} \varphi(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{2N}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{\tau^2 + y^2} [(2/\pi) \arctg(\tau/y)]^{N-1} [\varphi(\tau) - \varphi(0)\chi(\tau)] d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \varphi(0) \left(\frac{2}{\pi} \right)^{N-1} \int_{-1}^{+1} \frac{\tau}{\tau^2 + y^2} [\arctg(\tau/y)]^{N-1} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Первый интеграл в (24) равен $\langle P((\tau \text{sign}^{N-1} \tau)^{-1}), \varphi(\tau) \rangle + o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$. Сделав во втором интеграле (24) замену $\tau = ty$, найдем

$$\int_{-1/y}^{+1/y} \frac{t}{t^2 + 1} [\arctg t]^{N-1} dt,$$

который при нечетном N равен нулю. При $N = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{-1/y}^{+1/y} \frac{t}{t^2 + 1} [\arctg t]^{2k-1} dt &\approx \\ &\approx \left(\frac{\pi}{2} - y\right)^{2k-1} (y^2 - 2 \ln y) - (2k-1) \int_0^{+1/y} \frac{\ln(t^2 + 1)}{t^2 + 1} [\arctg t]^{2k-2} dt. \end{aligned}$$

Кроме того, несложно показать, что

$$\int_0^{+1/y} \frac{\ln(t^2 + 1)}{t^2 + 1} [\arctg t]^{2k-2} dt = I_0 + 2(\pi/2)^{2k-2} y \ln y + o_{\mathcal{D}'}(y \ln y), \quad y \rightarrow +0,$$

где

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2 + 1)}{t^2 + 1} [\arctg t]^{2k-2} dt.$$

Объединяя предыдущие вычисления, получим при $N = 2k$

$$\begin{aligned} [\text{sign}^N(\tau, y)]'_y &= \\ &= -\frac{4k}{\pi} \left[P(|\tau|^{-1}) - 2(2k-1) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k-1} I_0 \delta(\tau) - 2 \ln y \delta(\tau) \right] + o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0, \end{aligned}$$

а при $N = 2k - 1$ –

$$[\text{sign}^N(\tau, y)]'_y = -\frac{4k}{\pi} P(\tau^{-1}) + o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Интегрируя эти разложения по y , заменяя τ на $S(x, t)$ и учитывая, что слабые пределы

$$\lim_{y \rightarrow +0} [\text{sign}(\tau, y)]^{2k} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow +0} [\text{sign}(\tau, y)]^{2k-1} = \text{sign}(\tau),$$

будем иметь при $k = 1, 2, \dots$

$$\text{sign}^N(S) = \begin{cases} 1 - \frac{4k}{\pi} \left\{ P(|S|^{-1}) - \left[2 - 2(2k-1) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k-1} I_0 \right] \delta(S) \right\} y + \\ \quad + \frac{8k}{\pi} \delta(S) y \ln y + o_{\mathcal{D}'}(y), & N = 2k; \\ \text{sign}(S) - \frac{4k}{\pi} P(x^{-1}) y + o_{\mathcal{D}'}(y), & N = 2k - 1, \quad y \rightarrow +0. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом в общем случае распределение $\text{sign}^N(S)$ не принадлежит пространству $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ по $\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(y)$, поскольку содержит члены порядка $y \ln y$, $y \rightarrow +0$, которыми нельзя пренебречь. Однако $\text{sign}^N(S)$ принадлежит $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ по $\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(1)$.

Используя (25) и формулу

$$\theta(\pm S) = \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(S)),$$

можно показать, что при $N = 2, 3, \dots$ и $r, s = 1, 2, \dots$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [\theta(\pm S)]^N, \quad [\theta(S)]^r \circ [\theta(-S)]^s &\stackrel{\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(y)}{\notin} \mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0; \\ [\theta(\pm S)]^N, \quad [\theta(S)]^r \circ [\theta(-S)]^s &= 0 \stackrel{\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(1)}{\in} \mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Путем перемножения аппроксимации распределений (см. раздел 3) можно также показать, что если $m, n = 1, 2, \dots$, $\lambda, \mu > 0$, $p, q = 0, 1, 2, \dots$, то при $M, N = 2, 3, \dots$, $r, s = 1, 2, \dots$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} [S_{\pm}^n \ln^p S_{\pm}]^N, \quad [S_{\pm}^{\lambda} \ln^p S_{\pm}]^N, \quad [S_{+}^m \ln^p S_{+}]^r \circ [S_{-}^n \ln^q S_{-}]^s &\stackrel{\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(y)}{\in} \mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0, \\ [S_{+}^{\lambda} \ln^p S_{+}]^r \circ [S_{-}^{\mu} \ln^q S_{-}]^s, \\ [S_{\pm}^{\lambda} \ln^p S_{\pm}]^r \circ [S_{\pm}^{\mu} \ln^q S_{\pm}]^s &\approx S_{\pm}^{\mu+\lambda} \ln^{p+q}(S_{\pm}) \stackrel{\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(y)}{\in} \mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Суть доказательства в том, что в этом случае члены, которые могли бы вывести эти произведения из пространства $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$, имеют вид $y \ln y S^{\nu} \circ \delta(S) = o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$, поскольку $\nu > 0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть асимптотическое распределение $f_y^*(S(x, t)) \in \mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ имеет вид $f(S(x, t))$ или $yf(S(x, t))$, где распределение $f(\tau) \in E_0$ обладает степенью однородности $\nu \geq 0$ и любая целая степень $[f^*(S)]^N$, $N \geq 2$, принадлежит пространству $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ по $\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(y)$. Тогда либо $f_y^*(S(x, t)) = S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})$, $\lambda > 0$, либо $f_y^*(S(x, t)) = yS_{\pm}^{\mu} \ln^p(S_{\pm})$, $\mu \geq 0$, $p = 0, 1, \dots$.

Если же $[f^*(S)]^N$, $N \geq 2$, принадлежит пространству $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ по $\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(1)$, то $f_y^*(S(x, t)) = S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})$, где $\lambda \geq 0$, $p = 0, 1, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть распределение $f(S) \in \mathcal{E}_0$ имеет степень однородности $\nu \geq 0$. Согласно теореме 4.1 при возведении его в степень $N \geq 2$ получающееся асимптотическое распределение по крайней мере с точностью до $o_{\mathcal{D}'}(1)$, $y \rightarrow +0$ остается в пространстве $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$. Применяя лемму 7.3 к этому случаю, видим, что при $p = 0, 1, \dots$

$$[S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})]^N \stackrel{\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(y)}{\in} \mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0, \quad \lambda > 0; \quad [S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})]^N \stackrel{\text{mod } o_{\mathcal{D}'}(1)}{\in} \mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0, \quad \lambda \geq 0.$$

Соотношение $[yf(S)]^N = o_{\mathcal{D}'}(y)$ при $N \geq 2$ (мы отождествляем такой элемент с нулем в $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$) дает в смысле слабого равенства нуль, не выводя эту степень элемента $yf(S)$ из $\mathcal{G}$. Поэтому в этом случае условиям теоремы удовлетворяют элементы $yS_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})$, $y \rightarrow +0$, где $\lambda \geq 0$, $p = 0, 1, \dots$.

7.3. Из двух последних лемм и следствия следует теорема, выделяющая в множестве сингулярных образующих пространства $\mathcal{G}$ асимптотические подалгебры.

ТЕОРЕМА 7.1. В пространства $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ имеются только следующие асимптотические алгебры:

1) алгебра $\mathcal{A}_{\delta,P}^*$ порядка $N = 2$ с образующими

$$\{1, y\delta(S), yP(S^{-1}), yS_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm}), y \rightarrow +0: \lambda \geq 0, p = 0, 1, \dots\}$$

с асимптотической подалгеброй $\mathcal{A}_{\delta}^*$ порядка $N = 2$, имеющей образующие

$$\{1, y\delta(S), yS_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm}), y \rightarrow +0: \lambda \geq 0, p = 0, 1, \dots\} \subset \mathcal{A}_{\delta,P}^*;$$

2) асимптотическая алгебра $\mathcal{A}_{\theta}^*$ порядка $N = 1$ с образующими $\{1, \theta(S)\}$;

3) асимптотическая по гладкости алгебра $\mathcal{C}^*$ порядка $N = 1$ с образующими

$$\{1, S_{+}^{\lambda} \ln^p(S_{+}), S_{-}^{\lambda} \ln^p(S_{-}): \lambda \geq 0, p = 0, 1, \dots\}$$

с подалгебрами $\mathcal{C}_{\pm}^*$ порядка $N = 1$, имеющими образующие $\{1, S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm}): \lambda \geq 0, p = 0, 1, \dots\}$;

4) асимптотическая по гладкости алгебра $\mathcal{C}_{\delta,P}^*$ порядка $N = 2$ с образующими

$$\{1, y\delta(S), yP(S^{-1}), yS_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm}), yS_{\pm}^{\mu} \ln^q(S_{\pm}), y \rightarrow +0: \lambda \geq 1, \mu \geq 0, p, q = 0, 1, \dots\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы среди элементов, отобранных с помощью лемм 7.2, 7.3 и следствия, выделить элементы, порождающие асимптотические алгебры, вычислим парные произведения асимптотических распределений $S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})$, $yS_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})$, $y\delta(S)$, $yP(S^{-1})$, $y \rightarrow +0$, $\lambda \geq 0$, $p = 0, 1, \dots$.

Согласно формулам (25)

$$\begin{aligned} [y\delta(S)]^r \circ [\theta(\pm S)]^s &= B_{r,s} y\delta(S) + o_{\mathcal{D}'}(y), \\ [y\delta(S)]^r \circ [S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})]^s &= o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\lambda > 0$, $B_{r,s}$ — константа, которую можно вычислить, и

$$[y\delta(S)]^r \circ [yS_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})]^s = o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0, \quad \lambda \geq 0.$$

Таким образом, эти произведения принадлежат пространству $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ по mod $o_{\mathcal{D}'}(y)$.

Применяя (20), получим

$$[yP(S^{-1})]^k = \begin{cases} B_k y\delta(S) + O_{\mathcal{D}'}(y^2), & k = 2j, \quad j = 1, 2, \dots, \\ O_{\mathcal{D}'}(y^2), & k = 2j + 1, \quad j = 1, 2, \dots, \quad y \rightarrow +0, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$B_{2j} = \frac{\pi}{2^{4j-3}} C_{2j-2}^{j-1}$$

— константы.

Из (27) с помощью (20) легко получить, что при $r, s = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} [y\delta(S)]^r \circ [yP(S^{-1})]^s &= \begin{cases} C_{r,s}y\delta(S) + O_{\mathcal{D}'}(y^2), & s = 2j, \quad j = 1, 2, \dots, \\ O_{\mathcal{D}'}(y), & s = 2j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, \quad y \rightarrow +0, \end{cases} \\ [yP(S^{-1})]^k \circ [\theta(\pm S)]^s &= \begin{cases} D_{r,s}y\delta(S) + o_{\mathcal{D}'}(y), & k = 2j, \quad j = 1, 2, \dots, \\ o_{\mathcal{D}'}(y), & k = 2j + 1, \quad j = 1, 2, \dots, \quad y \rightarrow +0, \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

где $C_{r,s}$ и $D_{r,s}$ – вычисляемые константы. Отсюда следует, что эти произведения также принадлежат пространству $\mathcal{E}_0 \oplus y\mathcal{E}_0$ по mod $o_{\mathcal{D}'}(y)$.

Из [30, §4] и [31, §3] имеем

$$\begin{aligned} yP(S^{-1}) \circ \theta(S) &= y \ln y \delta(S) + Cy\delta(S) + yS_+^{-1} + o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0; \\ y\delta(S) \circ \ln |S| &= y \ln y \delta(S) + y \ln 2\delta(S) + O_{\mathcal{D}'}(y^2 \ln^2 y), \quad y \rightarrow +0; \\ yP(S^{-1}) \circ \ln |S| &= o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0, \end{aligned}$$

здесь C – константа. Аналогичным образом и произведение $[y\delta(S)]^r \circ [\ln S_{\pm}]^s$ содержит члены с $y \ln y$.

Можно показать, что если $0 < \lambda < 1$, то

$$yP(S^{-1}) \circ S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm}) \approx AyP(S_{\pm}^{\lambda-1} \ln^p(S_{\pm})), \quad y \rightarrow +0,$$

и потому согласно лемме 7.2 такой элемент не может входить в асимптотическую алгебру; при $\lambda \geq 1$ это произведение может принадлежать асимптотической алгебре.

Таким образом, следующие асимптотические распределения не могут входить в одну и ту же асимптотическую алгебру: $\theta(S)$ и $yP(S^{-1})$; $S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})$, $0 < \lambda < 1$, и $yP(S^{-1})$; $\ln |S|$ и $yP(S^{-1})$; $\ln |S|$ и $y\delta(S)$.

Заметим, что только асимптотические по гладкости алгебры должны включать асимптотические распределения $S_{\pm}^{\lambda} \ln^p(S_{\pm})$, $\lambda \geq 0$, $p = 0, 1, \dots$.

Из лемм 7.2, 7.3 и анализа полученных парных произведений следует доказываемый результат.

Далее мы будем рассматривать решения из подпространств $\mathcal{G}$, компоненты векторов которых в качестве сомножителей-распределений имеют элементы из асимптотических алгебр, перечисленных в теореме 7.1. За этими подпространствами мы сохраним обозначения соответствующих асимптотических подалгебр.

7.4. Начнем рассмотрение с изучения решений, принадлежащих подпространствам $\mathcal{C}_{\pm}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Решение системы (3) в пространстве $\mathcal{C}^*$ назовем нетривиальным, если

$$\begin{aligned} u^*(x, t) &= u_0(x, t) + g_0(x, t)\theta(S) + u_1^*(x, t) + \sum_{j=2}^{\infty} u_j^*(x, t), \quad u_0(x, t), g_0(x, t) \in C^{\infty}(\Omega); \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial S} &\rightarrow \infty \quad \text{при } S \rightarrow +0 \text{ или } S \rightarrow -0; \quad u_j^*(x, t) \in \mathcal{C}^* \cap \tilde{C}^{\alpha_j}(\bar{\Omega}), \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$, и для любого $r = 1, 2, \dots$ имеем $L[u_{(r)}^*] \in C^{[\alpha_r]+1}$ (см. определение 7.3), где

$$u_{(r)}^*(x, t) = u_0(x, t) + g_0(x, t)\theta(S) + \sum_{j=1}^r u_j^*(x, t).$$

Естественно, что вне поверхности $S = 0$ для любого $r = 1, 2, \dots$ имеем $L[u_{(r)}^*] \in C^\infty$.

Заметим, что идея рассмотрения такого рода решения для гиперболических систем имеется у Куранта [39, гл. VI, § 4.3] (см. также [40, гл. 5, 6]).

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть в подалгебре C_+^* элемент

$$u^*(x, t) = u_0(x, t) + g_0(x, t)\theta(S) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{M_j} g_{\alpha_j, p_{\alpha_j, s}}(x, t) S_+^{\alpha_j} \ln^{p_{\alpha_j, s}}(S_+), \quad (29)$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \quad p_{\alpha_j, s} < p_{\alpha_j, r}, \quad 0 \leq s < r, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $0 \leq M_j < \infty$, $g_{\alpha_j, p_{\alpha_j, s}}|_{S=0} \neq 0$, является нетривиальным асимптотическим по гладкости решением системы (3). Тогда $g_0(x, t) \neq 0$, $\alpha_j = j/2$, $j = 1, 2, \dots$ и все $p_j = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (29) в систему (3), перейдем к нормальным координатам, разложим гладкие коэффициенты, получившиеся при распределениях $\theta(S)$, $S_+^{\alpha_j} \ln^{p_{\alpha_j, s}}(S_+)$ по степеням S и рассмотрим баланс степеней α_j и p_j .

Пусть все $p_j = 0$. В этом случае

$$u^*(x, t) = u_0(x, t) + g_0(x, t)\theta(S) + \sum_{j=1}^{\infty} g_{\alpha_j}(x, t) S_+^{\alpha_j},$$

и, следовательно,

$$L[u^*] = L[u_0^*] + B_0(x, t)\delta(S) + A_0(x, t)\theta(S) + \sum_{r \geq 1} A_{\gamma_r}(x, t) S_+^{\gamma_r} + o(1), \quad y \rightarrow +0, \quad (30)$$

где $B_0, A_0, A_{\gamma_r} \in C_S^\infty(\bar{\Omega})$. Поскольку $L[u^*] \in \tilde{C}^{\alpha_j}(\bar{\Omega})$, то в силу линейной независимости распределений различной степени однородности [36, гл. I, § 4] получим, что $L[u_0^*]|_{S < 0} = 0$ и $B_0 = 0$, $A_0 = 0$, $A_{\gamma_r} = 0$ при $S = 0$.

Разложив многочлены $F_k(x, t, u)$ по степеням S_+ , видим, что минимальный показатель степени S_+ есть $\alpha_1 - 1$. Коэффициент при этой степени $A_{\alpha_1}(x, t)$ в (30) имеет вид

$$A_{\alpha_1-1}(x, t) = \alpha_1 \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] g_{\alpha_1}(x, t),$$

где

$$\frac{\partial F_k}{\partial u} g_{\alpha_1} = \sum_{p=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial u_p} g_{\alpha_1, p},$$

а $g_{\alpha_1, p}$ – компоненты вектора g_{α_1} .

Так как $A_{\alpha_1} = 0$, то $g_{\alpha_1}(x, t)$ – правый собственный вектор характеристической матрицы (5) системы (3), соответствующий значению $\xi = S_{x_k}/|\nabla_x S|$ и собственному числу $\lambda_k = S_t/|\nabla_x S|$ при некотором $k \in 1, 2, \dots, m$. Следовательно, у матрицы системы существует соответствующий этим значениям λ_k , ξ левый собственный вектор L_k .

В силу определения 7.4 имеем $0 < \alpha_1 < 1$. В этом случае $2\alpha_1 - 1 < \alpha_1$ и ясно, что $2\alpha_1 - 1 \neq \alpha_1 - 1, \alpha_1$. Коэффициент при $S_+^{2\alpha_1+1}$ есть

$$\alpha_1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F_k}{\partial u^2} S_{x_k} (g_{\alpha_1})^2 \quad (31)$$

и должен быть равен нулю, если $2\alpha_1 - 1 \neq 0$. В этом случае, умножая (31) слева скалярно на L_k , в силу леммы 1 и условия Лакса (6) получаем, что выражение (31) обращается в нуль только при $g_{\alpha_1} = 0$. Таким образом, возникает противоречие. Отсюда следует, что $\alpha_1 = 1/2$.

Докажем теперь, что все показатели степеней α_j в (29) имеют вид $\alpha_j = k_j/2$, $k_j \in \mathbb{N}$. Предположив противное, рассмотрим минимальный среди α_j показатель α_m , не представимый в указанном виде. Коэффициент при $S_+^{\alpha_m-1}$ имеет вид

$$A_{\alpha_m-1}(x, t) = \alpha_1 \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] g_{\alpha_m}(x, t).$$

Так как $A_{\alpha_m-1}(x, t) = 0$, то не равный нулю вектор $g_{\alpha_m}(x, t)$ есть правый собственный вектор характеристической матрицы системы (3), соответствующий тем же значениям ξ и индекса k , что и $g_{1/2}(x, t)$.

Рассмотрим коэффициент при степени $S_+^{\alpha_m+1/2-1}$:

$$A_{\alpha_m-\frac{1}{2}}(x, t) = \left(\alpha_m + \frac{1}{2} \right) \times \\ \times \left(\left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] g_{\alpha_m+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F_k}{\partial u^2} S_{x_k} g_{\frac{1}{2}} g_{\alpha_m} \right). \quad (32)$$

Вследствие условий строгой гиперболичности векторы g_1 и g_m отличаются на скалярный множитель. По определению решения имеем, что $A_{\alpha_m-1/2} = 0$. Умножая это равенство скалярно на левый собственный вектор L_1 и предполагая, что $g_{1/2} \neq 0$, в силу условий Лакса и леммы 2.1 получаем равенство $g_{1/2} = 0$, которое противоречит сделанному предположению.

Итак мы доказали, что все показатели степени α_j в (29) являются целыми и полуполыми, причем минимальный показатель равен $1/2$.

Получим необходимые условия существования решения, приравняв коэффициенты при главных особенностях $\delta(S)$, $S_+^{-1/2}$, $\theta(S)$ в (30) нулю:

$$\left\{ g_0 S_t + \sum_{k=1}^n [F(x, t, u_0 + g_0) - F(x, t, u_0)] S_{x_k} \right\} \Big|_{S=0} = 0, \quad (33)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] g_{\frac{1}{2}}(x, t) \right\} \Big|_{S=0} = 0, \quad (34)$$

$$\left\{ g_0 t + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F(x, t, u_0 + g_0) - F(x, t, u_0)] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F_k}{\partial u^2} S_{x_k} (g_{\frac{1}{2}})^2 \right\} \Big|_{S=0} = 0. \quad (35)$$

Из (34) следует, что $g_{1/2}$ есть правый собственный вектор характеристической матрицы системы (3). Поэтому, если $g_0(x, t) = 0$, то в силу уравнения (35), условия Лакса и леммы 2.1 получаем, что $g_{1/2} = 0$. Аналогично можно показать, что условие $g_0(x, t) = 0$ влечет за собой равенство нулю коэффициентов при всех получелых степенях S_+ в (29).

Теперь рассмотрим случай, когда существуют $p_j \neq 0$. Тогда нетривиальное асимптотическое решение имеет вид

$$u^*(x, t) = u_0(x, t) + g_0(x, t)\theta(S) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{M_j} g_{\alpha_j, p_{\alpha_j, s}}(x, t) S_+^{\alpha_j} \ln^{p_{\alpha_j, s}}(S_+),$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \quad p_{\alpha_j, s} < p_{\alpha_j, r}, \quad 0 \leq s < r, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $0 \leq M_j < \infty$, $g_{\alpha_j, p_{\alpha_j, s}}|_{S=0} \neq 0$.

По предположению в этом случае $0 < \alpha_1 \leq 1$. Пусть $\alpha_1 = 1$, тогда $p_{\alpha_1, 0} > 0$. Рассмотрим коэффициент при $p_{1,0} \ln^{p_{1,0}-1}(S_+) + \ln^{p_{1,0}}(S_+)$, полученный в результате подстановки решения в систему (3). Он имеет вид

$$\left\{ \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] g_{1, p_{1,0}}(x, t) \right\} \Big|_{S=0} = 0.$$

Отсюда следует, что $g_{1, p_{1,0}}$ — правый собственный вектор характеристической матрицы (5) системы (3), соответствующий значению $\xi = S_{x_k}/|\nabla_x S|$ и собственному числу $\lambda_k = S_t/|\nabla_x S|$ при некотором $k \in 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим теперь коэффициент при $2S_{\pm} [\ln^{2p_{1,0}}(S_+) + p_{1,0} \ln^{2p_{1,0}-1}(S_+)]$. Он равен

$$\left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] g_{2, 2p_{1,0}} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F_k}{\partial u^2}(x, t, u_0) S_{x_k} g_{1, 2p_{1,0}}^2.$$

При выводе последнего равенства учтено, что $p_{1,0} < p_{1,s}$ при $s > 0$. Приравняв этот коэффициент нулю, получим, что вследствие условия Лакса и леммы 2.1 $g_{1, p_{1,0}} = 0$. Аналогично получим $p_{1,s} = 0$ при $s \geq 0$. Следовательно, $\alpha_1 < 1$ и

по доказанному выше $\alpha_1 = 1/2$. Рассуждая аналогично, можно показать, что все $p_{\alpha_j, s} = 0$.

Теорема доказана.

Аналогичный результат справедлив и для случая подалгебры $\mathcal{C}_-^*$, когда в (29) присутствуют распределения $\theta(-S)$, $S_-^{\alpha_j} \ln^{p_{\alpha_j, s}}(S_-)$.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть в подалгебре $\mathcal{C}_-^*$ элемент

$$u^*(x, t) = u_0(x, t) + g_0(x, t)\theta(-S) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{M_j} g_{\alpha_j, p_{\alpha_j, s}}(x, t) S_-^{\alpha_j} \ln^{p_{\alpha_j, s}}(S_-),$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \quad p_{\alpha_j, s} < p_{\alpha_j, r}, \quad 0 \leq s < r, \quad j = 1, 2, \dots,$$

является нетривиальным асимптотическим по гладкости решением системы (3), где $0 \leq M_j < \infty$, $g_{\alpha_j, p_{\alpha_j, s}}|_{S=0} \neq 0$. Тогда $g_0(x, t) \neq 0$, $\alpha_j = j/2$, $j = 1, 2, \dots$, и все $p_j = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. В силу определения 7.4 доказанные утверждения не влекут за собой никаких условий на степени $\alpha_j \geq 1$. И потому, если нетривиальное решение принадлежит алгебре $\mathcal{C}^*$, то в результате доказанных теорем оно в области $S \geq 0$ ($S \leq 0$) разлагается в ряд по полупелым степеням, а в области $S \leq 0$ ($S \geq 0$) или разлагается в ряд по полупелым степеням, или при $S \rightarrow -0$ ($S \rightarrow +0$) имеет ограниченную производную.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Система уравнений (33)–(35) является, вообще говоря, переопределенной даже в случае $g_0 \neq 0$. Например, не существует нетривиального решения вида (29) в случае $g_{1/2} \neq 0$ для уравнения Хопфа. С другой стороны, решения (29) с полупелыми степенями имеют структуру особенности, сходную со структурой детонационных волн Чэпмена–Жуге. Модели, описывающие распространение таких волн, формулируются в виде систем (3) с источником на фронте. Это означает, что рассматривается неоднородная система уравнений (3) с правой частью вида $f(x, t)\delta(S)$. В этом случае $f(x, t)$ входит в правую часть уравнения (33) и выбирается так, что полученная система оказывается совместной.

Если не ограничиваться вещественными однородными распределениями, то в пространство E можно включить функцию S^λ , $\lambda > 0$, отказываясь от условия вещественности рассматриваемых решений, что в силу нелинейности приводит к потере физического смысла. При этом возникает еще одна асимптотическая по гладкости алгебра $\mathcal{C}_S^*$ и справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть в алгебре $\mathcal{C}_S^*$ элемент

$$u^*(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{j=1}^s g_j(x, t) S^{\alpha_j}, \quad 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots, \quad (36)$$

является нетривиальным асимптотическим по гладкости решением системы (3). Тогда $\alpha_j = j/2$, $j = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится в точности так же, как для теоремы 7.2. На первом шаге доказывается, что все показатели степеней в (36) являются полупелыми (отметим, что слагаемые с целыми показателями степени в данном случае – гладкие функции). На втором шаге следует проанализировать необходимые условия существования решения. В этом случае в отличие от системы уравнений (33)–(35) мы получим только одно уравнение (34). Квадратичное по $g_{1/2}$ слагаемое в уравнении (35), приводившее в условиях теоремы 7.2 к противоречию, в данном случае является гладкой функцией и не входит в необходимые условия существования решения.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМ 7.1, 7.2, 7.3. *Решение системы (3) не может быть суперпозицией бесконечно узкого солитона и ударной волны, но может быть суперпозицией бесконечно узкого солитона и скачка малой амплитуды.*

Необходимые и достаточные условия существования решения второго типа приведены в теореме 8.2 ниже. Здесь мы поясним на примере первое утверждение о том, что не существует решения, являющегося “в главном” суперпозицией ударной волны $\theta(x)$ и бесконечно узкого солитона $y\delta(x)$.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение Хопфа. Предположим, что $u^*(x, t) = A + B\theta(x - vt) + Cy\delta(x - vt)$, где A, B, C – константы. Тогда, учитывая, что

$$[y\delta(x)]^2 = \frac{1}{2\pi}y\delta(x - vt) + O_{\mathcal{D}'}(y^2) \quad \text{и} \quad y\delta(x)\theta(x) = \frac{1}{2}y\delta(x) + o_{\mathcal{D}'}(y) \quad y \rightarrow +0,$$

имеем

$$\begin{aligned} [u^*(x, t)]^2 &= A^2 + 2AB\theta(x - vt) + B^2[\theta(x - vt)]^2 + \\ &+ 2AC + BC + \frac{C^2}{2\pi}y\delta(x - vt) + o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Из (25) можно получить формулу $[\theta(x)]^2 = \theta(x) + ayP(x^{-1}) + by\delta(x) + cy \ln y \delta(x) + o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$, где a, b, c – не равные нулю константы. Отсюда следует, что в $[u^*]^2$ возникают члены, содержащие $y \ln y$.

Подставляя u^* и $[u^*]^2$ в уравнение Хопфа и приравнивая коэффициенты при y^0 , y и $y \ln y$ нулю, получим, в частности, что коэффициент при $y \ln y \delta'(x - vt)$ будет B^2c . Отсюда следует, что $B = 0$.

Теперь предположим, что мы выбрали не гармоническую аппроксимацию, как всюду выше, а гладкую, тогда

$$u^*(x, t) = u_0 + B\omega_1\left(\frac{x - \varphi(t)}{y}\right) + C\omega_2\left(\frac{x - \varphi(t)}{y}\right),$$

где $\omega_1(\xi), \omega_2(\xi) \in C^\infty$; $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(\xi) d\xi = 1$; $\omega_2(\xi) \rightarrow O(|\xi|^{-4})$, $|\xi| \rightarrow \infty$; $\omega_1(\xi) \rightarrow O(|\xi|^{-4})$, $\xi \rightarrow -\infty$, $1 - \omega_1(\xi) \rightarrow O(|\xi|^{-4})$, $\xi \rightarrow +\infty$, а $\varphi(t)$, $C(t)$, $B = B_0(x, t) + yB_1(x, t)$ – подлежащие определению гладкие функции.

Ясно, что в слабом смысле справедливы равенства

$$\begin{aligned}\omega_1\left(\frac{x-\varphi(t)}{y}\right) &= \theta(x-\varphi(t)) + O_{\mathcal{D}'}(y), \\ \omega_2\left(\frac{x-\varphi(t)}{y}\right) &= y\delta(x-\varphi(t)) + O_{\mathcal{D}'}(y^2), \quad y \rightarrow +0.\end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$(u^*)^2 = u_0^2 + B^2(\theta + \alpha_1 y\delta) + C^2 \alpha y\delta + 2u_0 B(\theta + \alpha_2 y\delta) + 2u_0 C y\delta + 2BC \beta y\delta + O_{\mathcal{D}'}(y^2),$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= \int \omega_2^2(\xi) d\xi, & \beta &= \int \omega_1(\xi)\omega_2(\xi) d\xi, \\ \alpha_1 &= \int [\omega_1^2(\xi) - \theta(\xi)] d\xi, & \alpha_2 &= \int [\omega_1(\xi) - \theta(\xi)] d\xi.\end{aligned}$$

Подставляя $u^*(x, t)$ в уравнение Хопфа, вычисляя асимптотику в слабом смысле и приравнявая нулю коэффициенты при главных особенностях $y\delta'(x-\varphi(t))$ и $\delta(x-\varphi(t))$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}(-\varphi_t(C + B_0\alpha_2) + \alpha C^2 + B_0^2\alpha_1 + 2\alpha_2 u_0 B_0 + 2u_0 C + 2\beta B_0 C)|_{x=\varphi} &= 0, \\ (-\varphi_t + B + 2u_0)|_{x=\varphi} &= 0.\end{aligned}\tag{37}$$

Полученные равенства справедливы, если

$$(B_0 C(2\beta - 1) + B^2(\alpha_1 - \alpha_2))|_{x=\varphi} + \alpha C^2 = 0.\tag{38}$$

Таким образом, если последнее равенство справедливо при $B_0 \neq 0$, $C \neq 0$, то решение уравнения Хопфа с постоянными u_0 , B_0 , C существует в асимптотическом смысле, т.е. удовлетворяет уравнению с точностью $O_{\mathcal{D}'}(y^2)$.

Однако, когда $u_0 \neq \text{const}$, коэффициенты B и C зависят от x и t и равенство (38) не сохраняется по t , даже если оно выполняется при $t = 0$.

В самом деле, при $x > \varphi$ и $x < \varphi$ получаем следующие уравнения:

$$u_{0t} + (u_0^2)_x = 0, \quad (u_0 + B_0)_t + (u_0 + B_0^2)_x = 0.\tag{39}$$

Вместе с первым уравнением (37) при условии $B_0 < 0$, являющимся условием устойчивости решений типа ударной волны, эта система (по крайней мере при малых t) может быть решена методом характеристик [17]. Функции $\varphi(t)$, $u_0(x, t)$ при $x \leq \varphi$ и $u_0(x, t) + B_0(x, t)$ при $x \geq \varphi$ однозначно определяются. Отсюда из-за условия совместности системы уравнений (38) вычисляется амплитуда $C(t)$ бесконечно узкого солитона.

Далее, приравнивая нулю коэффициент при $y\delta$, получим уравнение

$$C_t + L(\varphi_t, u_0, B_0, B_1)|_{x=\varphi} = 0, \quad (40)$$

где L – дифференциальный оператор первого порядка, который легко может быть выписан, но его явный вид в данном случае неважен.

Казалось бы, мы не получаем противоречия, т.к. в (40) входит новая неизвестная функция $B_1|_{x=\varphi}$, однако, приравнивая при $x \geq \varphi$ слагаемые порядка y , в результате подстановки решения u^* в уравнение Хопфа получим, что

$$B_1 + 2\frac{\partial}{\partial x}[(u_0 + B_0)B_1] = 0. \quad (41)$$

В силу неравенства $2(u_0 + B_0)|_{x=\varphi} = \varphi_t + B_0|_{x=\varphi} < \varphi_t$ значения решения уравнения (41) $B_1|_{x=\varphi}$ определяются начальными условиями $B_1|_{t=0, x>\varphi}$. Поэтому в уравнении (40) производная C_t определяется начальными данными для u^* . Следовательно, для определения $C(t)$ мы получили два уравнения – (38) и (40), т.е. наш выбор структуры u^* (при условии $B_0 < 0$, являющемся условием устойчивости разрыва) приводит к переопределенной системе.

Смысл полученного противоречия состоит в том, что сингулярность $y\delta$ и сингулярность θ порождают разные условия типа Гюгонио (два уравнения в системе (37)), связывающие скорость и амплитуду. Эти условия могут выполняться только при дополнительных предположениях (например, амплитуда и скорость постоянны).

7.5. В этой работе мы рассматривали асимптотические подалгебры из $\mathcal{G}$ не выше второго порядка. Однако, как следует из [27, 28], исследования алгебр более высокого порядка необходимы. В данной статье было доказано, что асимптотическое распределение (1) является обобщенным решением уравнения Хопфа в силу того, что $[u^*(x)]^2 = Cy\delta(x-vt) + Dy^3\delta''(x-vt) + O_{\mathcal{D}'}(y^6)$, $y \rightarrow +0$, где A, B, C, D – константы. Более того, можно доказать, что элементы вида $u^*(x)$ образуют в E^* асимптотическую подалгебру порядка $N = 6$.

Можно также показать, используя формулы (8), (9) из работы [41], что

$$\begin{aligned} [y^{2k+1}\delta^{(2k)}(x)]^2 &= ((2k)!)^2/(\pi 2^{4k+1}) \sum_{r=0}^{2k} \frac{(-1)^r}{(2r)!} B_{2r}^+(2k+1, 2k+1) y^{2r+1}\delta^{(2r)}(x) + \\ &+ O_{\mathcal{D}'}(y^{4k+2}), \quad y \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Потому естественно ожидать, что как уравнение Хопфа, так и система (3) будут иметь решения с сингулярными образующими вида

$$u^*(x) = \sum_{r=0}^M y^{2r+1}\delta^{(2r)}(S(x, t)), \quad y \rightarrow +0,$$

которые дадут асимптотическую подалгебру порядка $N = 4M + 2$. Доказательство этого факта явилось бы развитием идей работ [1, 2].

8. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ РЕШЕНИЙ

Докажем теоремы, выражающие необходимые и достаточные условия разрешимости системы (3) в различных асимптотических подалгебрах. Так как структура решения обусловлена выбором асимптотической подалгебры, построение обобщенного асимптотического решения сводится к определению (гладких) коэффициентов в представлении вида (21) и определению сингулярного носителя решения, т.е. функции $S(x, t)$. Соответственно необходимые и достаточные условия разрешимости, о которых идет речь, формулируются в виде системы уравнений для гладких функций вне сингулярного носителя и условий в точках сингулярного носителя.

8.1. Случай асимптотической алгебры $\mathcal{A}_\theta^*$.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть векторы $u_0(x, t), g(x, t) \in \tilde{C}^\infty(\bar{\Omega})$ таковы, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеем включение $u_0(x, t) + \alpha g(x, t) \in D$, где D – область строгой гиперболичности системы (3). Чтобы вектор $u^*(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)) = u_0(x, t) + g(x, t)\theta(S(x, t))$ был решением системы (3), необходима и достаточна совместность системы уравнений

$$\begin{aligned} L[u_0] &= 0, & S < 0, \\ L[u_0 + g] &= 0, & S > 0, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\left[g(x, t)S_t + \sum_{k=1}^n [F_k(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)]S_{x_k} \right] \Big|_{S=0} = 0.$$

Условие при $S = 0$ в (42) есть известное условие Ренкина–Гюгонио.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 7.1 образующие компонент $u_j^*(x, t)$ вектора $u^*(x, t)$ принадлежат асимптотической алгебре $\mathcal{A}_\theta^*$ порядка $N = 1$. Поэтому для $r = 2, 3, \dots$ имеем

$$[g_j(x, t)\theta(S)]^r = [g_j(x, t)]^r \theta(S) + o_{\mathcal{D}'}(1), \quad y \rightarrow +0, \quad j = 1, \dots, m.$$

А т.к. вектор-функции $F_k(x, t, u)$ в (3) являются многочленами (4) по переменным $u_1, \dots, u_m$, то

$$F_k(x, t, u) = \sum_{|r|=0}^{M_k} F_{k,r}(x, t) u_1^{r_1} \dots u_m^{r_m}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Из (4) получаем

$$F_k(x, t, u^*) = F_k(x, t, u_0) + [F_k(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)]\theta(S) + o_{\mathcal{D}'}(1), \quad y \rightarrow +0.$$

Подставив это выражение в (3), будем иметь

$$\begin{aligned}\hat{A}_\infty L[u^*] &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + \theta(S) \frac{\partial g}{\partial t} + \delta(S) g S_t + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x, t, u_0) + \theta(S) \frac{\partial}{\partial x_k} [F_k(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] + \right. \\ &\left. + \delta(S) [F_k(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} \right\} = o_{\mathcal{D}'}(1), \quad y \rightarrow +0.\end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{A}_\infty L[u^*] = o_{\mathcal{D}'}(1)$, $y \rightarrow +0$ тогда и только тогда, когда коэффициенты при y^0 , $\theta(S)$ и $\delta(S)$ равны нулю (см. [36, гл. I, § 4] и [15]). Отсюда получим с точностью до $o_{\mathcal{D}'}(1)$, $y \rightarrow +0$ систему условий

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial t}(x, t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x, t, u_0) &= 0, \quad S < 0, \\ \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_k(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] &= 0, \quad S > 0, \\ \left[g(x, t) S_t + \sum_{k=1}^n [F_k(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} \right] \Big|_{S=0} &= 0,\end{aligned}$$

из которой сразу же следует (42).

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Применяя формулу Лагранжа, последнее уравнение в (42) можно записать в виде

$$\left\{ \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0 + \alpha g) S_{x_k} \right] g(x, t) \right\} \Big|_{S=0} = 0, \quad (43)$$

где $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \alpha(u_0(x, t), g(x, t))$. Из (43) следует, что вектор $g(x, t)$, являющийся коэффициентом при скачке решения, отличен от нуля только в том случае, если на поверхности $S = 0$ он является правым собственным вектором матрицы (5) $A(x, t, u_0(x, t) + \alpha g(x, t), \xi)$, соответствующим значению $\xi = S_{x_k} / |\nabla_x S|$ и собственному числу $\lambda_k = S_t / |\nabla_x S|$ при некотором $k \in 1, 2, \dots, m$.

8.2. Случай асимптотической подалгебры $\mathcal{A}_\delta^* \subset \mathcal{A}_{\delta, P}^*$.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть векторы $u_0(x, t), g(x, t), e(x, t) \in \tilde{C}^\infty(\bar{\Omega})$ таковы, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеем включение $u_0(x, t) + \alpha g(x, t) \in D$, где D — область строгой гиперболичности системы (3). Тогда, для того чтобы вектор $u^*(x, t) = u_0(x, t) + g(x, t) y \delta(S(x, t)) + e(x, t) y \theta(S(x, t))$, $y \rightarrow +0$, был решением строго гиперболической системы (3), необходимо и достаточно, чтобы для векторов $u_0(x, t)$, $e(x, t)$, $g(x, t)$ была совместна система уравнений

$$\begin{aligned}L[u_0] &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) e \right] &= 0, \quad S \geq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ gS_t + \sum_{k=1}^n [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} \right\} \Big|_{S=0} = 0, \\
& \left\{ \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] e - \right. \\
& \quad - \sum_{k=1}^n [(F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)) S_{x_k} / S]_t - \\
& \quad \left. - [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)]_{x_k} \right\} \Big|_{S=0} = 0. \tag{44}
\end{aligned}$$

Здесь вектор-многочлен F_k^A получается из вектор-многочлена F_k , если в его разложении по степеням переменных $g_1, \dots, g_m$ умножить коэффициенты при степенях $g_1^{r_1} \dots g_1^{r_m}$ на константы $A_{|r|} = (4\pi)^{1-|r|} C_{2|r|-2}^{|r|-1}$, где C_p^i — биномиальные коэффициенты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 7.1 компоненты $u_j^*(x, t)$ вектора $u^*(x, t)$ принадлежат асимптотической подалгебре порядка $N = 2$, и поэтому, применяя формулы из леммы 6.2, имеем

$$\begin{aligned}
& (u_{0,j}(x, t) + g_j(x, t)y\delta(S) + ye_j(x, t)\theta(S))^r = \\
& = (u_{0,j} + g_j y\delta(S))^r + r(u_{0,j})^{r-1} e_j y\theta(S) + o_{\mathcal{D}'}(y) = \\
& = (u_{0,j})^r + [(u_{0,j} + g_j)_A^r - (u_{0,j})^r] y\delta(S) + r(u_{0,j})^{r-1} e_j y\theta(S) + o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0.
\end{aligned}$$

Индекс A в последней формуле означает, что при разложении $[u_{0,j} + g_j]^r$ по степеням нужно умножать q -ю степень g_j на константу $A_q = (4\pi)^{1-q} C_{2q-2}^{q-1}$.

Подставив $u^*(x, t)$ в многочлены (4) и используя последнее выражение, получим

$$\begin{aligned}
F_k(x, t, u^*) &= F_k(x, t, u_0) + y\delta(S) [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] + \\
&+ y\theta(S) \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) e + o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0.
\end{aligned}$$

Отсюда для левой части системы (3) находим следующее представление:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\infty L[u^*] &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + y\delta(S) \frac{\partial g}{\partial t} + y\delta'(S) gS_t + y\theta(S) \frac{\partial e}{\partial t} + y\delta(S) eS_t + \\
&+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x, t, u_0) + y\delta(S) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] + \\
&+ y\delta'(S) \sum_{k=1}^n [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} + \\
&+ y\theta(S) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) e \right) + \\
&+ y\delta(S) \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} e = o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0.
\end{aligned}$$

Далее перейдем к нормальным координатам и разложим гладкие коэффициенты, получившиеся при распределениях y^0 , $y\theta(S)$, $y\delta(S)$ и $y\delta'(S)$, в ряд Тейлора по S . Ясно, что если $\hat{A}_\infty L[u^*] = o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$, то коэффициенты при y^0 , $y\theta(S)$, $y\delta(S)$ и $y\delta'(S)$ равны нулю. А это с использованием очевидного равенства

$$a(x, t)\delta(S) + b(x, t)\delta'(S) = \left[a(x, t) - \frac{\partial}{\partial S} b(x, t) \right] \Big|_{S=0} \delta(S) + b(x, t) \Big|_{S=0} \delta'(S), \quad (45)$$

где $a(x, t), b(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, дает с точностью до $o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$, систему условий

$$\begin{aligned} y^0: \frac{\partial u_0}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x, t, u_0) &= 0, \\ y\theta: \frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) e \right) &= 0, \quad S \geq 0, \\ y\delta': \left\{ gS_t + \sum_{k=1}^n [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} \right\} \Big|_{S=0} &= 0, \\ y\delta: \left\{ \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] e + \right. \\ &+ \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] - \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial S} \left(gS_t + \sum_{k=1}^n [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} \right) \right\} \Big|_{S=0} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Упростим последнее уравнение системы (46). Предполагая, что в нашей локальной окрестности $\partial S / \partial t \neq 0$, выберем в качестве координат $\tau = S$, $\tau'_k = x_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial S} = \frac{1}{S_t} \frac{\partial}{\partial t}$$

и вторая половина последнего уравнения системы (46) при $S = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \left(gS_t + \sum_{k=1}^n [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} \right) &= \\ &= g_t + gS_{tt}/S_t + \sum_{k=1}^n \left\{ [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)]_t S_{x_k} / S_t + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k t} / S_t \Big\} = \\
& = g_t - \sum_{k=1}^n \Big\{ [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} S_{tt} / S_t^2 + \\
& + [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k t} / S_t + \\
& + [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)]_t S_{x_k} / S_t \Big\} = \\
& = g_t + \sum_{k=1}^n \Big\{ [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} / S_t \Big\}_t.
\end{aligned}$$

Таким образом, последнее уравнение системы (46) имеет вид

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[S_t + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] e - \sum_{k=1}^n ([F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} / S_t)_t - \right. \\
& \left. - [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)]_{x_k} \right\} \Big|_{S=0} = 0.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Положив в (44) $e(x, t) = 0$, получим, что вектор $u^*(x, t) = u_0(x, t) + g(x, t)y\delta(S)$, $y \rightarrow +0$, будет решением строго гиперболической системы (3) тогда и только тогда, когда совместна система

$$\begin{aligned}
& L[u_0] = 0, \\
& \left[g(x, t) S_t + \sum_{k=1}^n [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} \right] \Big|_{S=0} = 0, \\
& \sum_{k=1}^n \left\{ ([F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)] S_{x_k} / S_t)_t - \right. \\
& \left. - [F_k^A(x, t, u_0 + g) - F_k(x, t, u_0)]_{x_k} \right\} \Big|_{S=0} = 0. \tag{47}
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Так же как и в замечании 8.1 к теореме 8.1, можно заключить, что амплитуды $g(x, t)$ бесконечно узких солитонов $g(x, t)y\delta(S(x, t))$ лежат в собственных подпространствах характеристической матрицы (5) $A(x, t, u_0(x, t) + \alpha g(x, t), \xi)$ системы (3), соответствующих значению $\xi = S_{x_k} / |\nabla_x S|$ и собственному числу $\lambda_k = S_t / |\nabla_x S|$ при некотором $k \in 1, 2, \dots, m$.

8.3. Случай асимптотической алгебры $\mathcal{A}_{\delta, P}^*$.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть в системе (3) хотя бы один из многочленов $F_k(x, t, u)$ имеет степень выше второй по u . Тогда, для того чтобы

вектор $u^*(x, t) = u_0(x, t) + g(x, t)y\delta(S) + e(x, t)yP(S^{-1})$, $y \rightarrow +0$, где компоненты $u_{0,j}(x, t), g_j(x, t), e_j(x, t) \in \tilde{C}^\infty(\bar{\Omega})$, был решением строго гиперболической системы (3), необходима и достаточна совместность системы уравнений

$$\begin{aligned}
y^0: L[u_0] &= 0, \\
yP(S^{-2}): \left\{ \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] e \right\} \Big|_{S=0} &= 0, \\
y\delta'(S): \left(L, \sum_{k=1}^n G_k^C(x, t, u_0, g, e) S_{x_k} \right) \Big|_{S=0} &= 0, \\
y\delta(S): \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) + G_k^C(x, t, u_0, g, e) \right] S_{x_k} / S_t \right)_t - \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) + G_k^C(x, t, u_0, g, e) \right]_{x_k} \right\} \Big|_{S=0} = 0, \\
yP(S^{-1}): \left\{ \frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) e \right] \right\} S + \\
&\quad + \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] e = 0. \tag{48}
\end{aligned}$$

В (48) $L = L(x, t, u_0, \xi)$ – левый собственный вектор матрицы (5) $A(x, t, u_0, \xi)$, соответствующий значению $\xi = S_{x_k}/|\nabla_x S|$ и собственному числу $\lambda_k = S_t/\nabla_x S$ при некотором $k \in 1, 2, \dots, m$, и $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Многочлен $G_k^C(x, t, u_0, g, e)$ по четным степеням g и e определяется формулой

$$G_k^C(x, t, u_0, g, e) = \sum_{s=2}^{M_k} \frac{1}{s!} D_u^s F_k(x, t, u_0) \sum_{i=0}^{[s/2]} C_s^{2i} C_{2i, s-2i} e^{2i} g^{s-2i},$$

где $C_{i, 2j}$ – константы из формулы (28), а C_s^{2i} – биномиальные коэффициенты. В развернутой записи имеем

$$D_u^s F_k(x, t, u_0) e^{2i} g^{s-2i} = \sum_{a_1=1}^m \dots \sum_{a_s=1}^m \frac{\partial^s F_k}{\partial u_{a_1} \dots \partial u_{a_s}}(x, t, u_0) e_{a_1} \dots e_{a_{2i}} g_{a_{2i+1}} \dots g_{a_s}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.3. Теорема 8.3 означает, что если решение $u^*(x, t) = u_0(x, t) + g(x, t)y\delta(S) + e(x, t)yP(S^{-1})$, $y \rightarrow +0$, существует, то весь набор содержащихся в нем обобщенных функций движется так же, как слабый разрыв, описываемый системой уравнений (3), т.е. его движение определяется собственными числами характеристической матрицы $A(x, t, u_0, \xi)$ (5). Если же $e(x, t) = 0$, то движение бесконечно узкого солитона $u^*(x, t)$ определяется собственными числами характеристической матрицы $A(x, t, u_0 + \alpha g(x, t), \xi)$ (см. замечание 8.2.).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 7.1 компоненты $u_j^*(x, t)$ вектора $u^*(x, t)$ принадлежат асимптотической алгебре порядка $N = 2$, и поэтому, используя (27), (28) и формулы леммы 7.1, получим для степеней $r = 2, 3, \dots$ вектор-распределения $v_j(x, t) = g_j(x, t)y\delta(S) + e_j(x, t)yP(S^{-1})$, $y \rightarrow +0$, асимптотическое представление

$$\begin{aligned} v_j^r &= [g_j(x, t)y\delta(S) + e_j(x, t)yP(S^{-1})]^r = \\ &= \sum_{i=0}^{[r/2]} C_r^{2i} C_{2i, r-2i} e_j^{2i} g_j^{r-2i} y\delta(S) + o(y), \quad y \rightarrow +0, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где $C_{2i, r-2i}$ — вычисляемые константы из (28).

Подставляя $u^*(x, t) = u_0(x, t) + v(x, t)$ в вектор-многочлены (4), получим для $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} F_k(x, t, u^*) &= \sum_{s=0}^{M_k} \frac{1}{s!} D_u^s F_k(x, t, u_0) v^s = F_k(x, t, u_0) + \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) e y P(S^{-1}) + \\ &+ \left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) g + G_k^C(x, t, u_0, g, e) \right] y\delta(S) + o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (49)$$

Подставляя (49) в (3), заключаем, что левая часть системы (3) примет вид

$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty L[u^*] &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + y\delta(S) \frac{\partial g}{\partial t} + y\delta'(S) g S_t + yP(S^{-1}) \frac{\partial e}{\partial t} - yP(S^{-2})(S) e S_t + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x, t, u_0) + y\delta(S) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} [F_k(x, t, u_0) + G_k^C(x, t, u_0, g, e)] + \\ &+ y\delta'(S) \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) g + G_k^C(x, t, u_0, g, e) \right] S_{x_k} + \\ &+ yP(S^{-1}) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) e \right) - \\ &- yP(S^{-2})(S) \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} e + o_{\mathcal{D}'}(y), \quad y \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (50)$$

По определению асимптотического решения имеем, что $\hat{A}_\infty L[u^*] = o_{\mathcal{D}'}(y)$, $y \rightarrow +0$. Отсюда следуют уравнение

$$L[u_0] = 0 \quad (51)$$

и равенство нулю на поверхности $S = 0$ коэффициентов при распределениях $y\delta'(S)$ и $yP(S^{-2})$, т.е.

$$yP(S^{-2}): \left\{ \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] e \right\} \Big|_{S=0} = 0, \quad (52)$$

$$y\delta'(S): \left(g S_t + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) g + G_k^C(x, t, u_0, g, e) S_{x_k} \right] \right) \Big|_{S=0} = 0. \quad (53)$$

Для дальнейших преобразований правой части (50) воспользуемся равенствами (45) и равенством

$$b(x, t)P(S^{-2}) = \frac{b(x, t)}{S}P(S^{-1}), \quad (54)$$

справедливым для любой гладкой функции такой, что $b(x, t)|_{S=0} = 0$. Доказательство равенства (54) получим, перейдя к нормальным координатам в окрестности поверхности $S = 0$ и разлагая функцию $b(x, t)$ по формуле Тейлора.

Используя равенства (45), (54), получим из (50) с точностью до $o(y)$, $y \rightarrow +0$, помимо условий (51)–(53), следующие необходимые и достаточные условия того, что u^* есть асимптотическое решение системы (3):

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \left(\left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) + G_k^C(x, t, u_0, g, e) \right] S_{x_k}/S_t \right)_t - \left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) + G_k^C(x, t, u_0, g, e) \right]_{x_k} \right\} \Big|_{S=0} = 0, \quad (55)$$

$$\left\{ \frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0)e \right] \right\} S + \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] e = 0. \quad (56)$$

Из уравнения (52) следует, что вектор $e(x, t)$ – собственный вектор матрицы (5) $A(x, t, u_0, \xi)$ при $\xi = S_{x_k}/\nabla_x S$ и $\lambda = S_t/\nabla_x S$. А т.к. система (3) строго гиперболическая, то все собственные числа матрицы (5) различны. Поэтому, умножив уравнение (53) скалярно на левый собственный вектор $L(x, t, u_0, \xi)|_{S=0}$, соответствующий тому же собственному значению λ , что и вектор e , получим

$$\left(L, \left[S_t E + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial u}(x, t, u_0) S_{x_k} \right] g \right) \Big|_{S=0} = 0$$

и тем самым упростим уравнение (53). Отсюда и из (51)–(53), (55), (56) следует система уравнений (48).

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. Если система (3) состоит из одного уравнения $u_t + F_x = 0$ и $D_u^{2i} F(x, t, 0) = 0$, $D_u^{2i+1} F(x, t, 0) > 0$, $i = 1, 2, \dots$, то решения, содержащие бесконечно узкие солитоны типа $yP(S^{-1})$, $y \rightarrow +0$, при $u_0 = 0$ невозможны. К этому случаю, в частности, относится и уравнение Хопфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае четвертое уравнение системы (48) принимает вид

$$\left\{ \left[S_t E + \frac{\partial F}{\partial u}(x, t, 0) S_x \right] g + G^C(x, t, 0, g, e) S_x \right\} \Big|_{S=0} = 0, \quad (57)$$

где

$$G_k^C(x, t, 0, g, e) = \frac{1}{2!} F_k^{(2)}(x, t, u_0) \left(\frac{1}{2\pi} g^2 + \frac{\pi}{2} e^2 \right) + \frac{1}{4!} F_k^{(4)}(x, t, 0) (C_{4,0} e^4 + C_{2,2} g^2 e^2 + C_{0,4} g^4) + \dots, \quad (58)$$

здесь $C_{i,j} > 0$ – константы из формулы (28).

Предположим, что $e(x, t) \neq 0$. Тогда, используя равенство нулю коэффициента при $yP(S^{-2})$ в (52), получим из (57), что $G_k^C(x, t, 0, g, e)|_{S=0} = 0$. А это в силу (58) невозможно. Из полученного противоречия следует, что $e(x, t) = 0$.

8.4. Как известно [1–6, 25, 27], уравнение Хопфа имеет решение типа $y\delta(S(x, t))$, $y \rightarrow +0$, являющееся бесконечно узким солитоном. Аналогичный тип бесконечно узкого солитона дает (1).

Другой тип бесконечно узкого солитона дает вектор-распределение $yP(S(x, t)^{-1})$, $y \rightarrow +0$, аппроксимация которого $Sy/(S^2 + y^2)$ при всех y имеет максимум и минимум $\pm 1/2$, соответственно, стягивающиеся к оси ординат при $y \rightarrow +0$.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение $u_t + (u^2 + u^3)_x = 0$ типа уравнения Хопфа и покажем, что оно имеет решение в виде бесконечно узкого солитона

$$u^*(x, t) = A + ByP(S(x, t)^{-1}), \quad (59)$$

где $S(x, t) = x - vt$ и A, B – константы.

Действительно,

$$(u^*)^2 = A^2 + 2AByP((x - vt)^{-1}) + B^2 \frac{\pi}{2} y \delta(x - vt) + O_{\mathcal{D}'}(y^2),$$

$$(u^*)^3 = A^3 + 3A^2ByP((x - vt)^{-1}) + 3AB^2 \frac{\pi}{2} y \delta(x - vt) + O_{\mathcal{D}'}(y^2), \quad y \rightarrow +0.$$

Подставляя эти выражения в (59) и приравнявая коэффициенты при $yP((x - vt)^{-2})$ и $y\delta'(x - vt)$ нулю, получим систему уравнений

$$B(v - 2A - 3A^2) = 0, \quad \frac{\pi}{2} B^2(1 + 3A) = 0.$$

Отсюда имеем $A = -1/3$ и $v = -1/3$. Итак, получаем

$$u^*(x, t) = \frac{1}{3} + ByP\left(\left(x + \frac{1}{3}t\right)^{-1}\right),$$

где B – произвольная константа.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS N94-2118 и грантов Российского фонда фундаментальных исследований 96-01-01199а, 97-01-01123.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Ж.-А. Марти, а также С.Ю. Доброхотову и В.В. Жаринову, прочитавшим рукопись статьи и указавшим на некоторые опечатки и неточности. Дискуссии с ними позволили авторам существенно улучшить текст статьи. Особую благодарность авторы выражают В.В. Жаринову, взявшему на себя труд прочитать первоначальный вариант статьи и указавшему авторам на необходимость ее переработки.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. УМН. 1980. Т. 35. № 2. С. 252-253.
- [2] V. P. Maslov. Non-standard characteristics in asymptotical problems. In: Proceeding of the International Congress of Mathematicians, August 16-24, 1983, Warszawa. V.I. Amsterdam-N. Y.-Oxford: North-Holland, 1984. P. 139-185.
- [3] В. Г. Данилов, В. П. Маслов, П. Д. Субочев. Асимптотические по гладкости решения квазилинейных гиперболических и параболических уравнений. Деп. ВИНТИ. 1989. № 3, 02.01.89. С. 1-32.
- [4] В. П. Маслов, В. А. Цупин. ДАН СССР. 1979. Т. 246. № 2. С. 298-300.
- [5] В. П. Маслов, Г. А. Омелянов. УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 63-126.
- [6] В. П. Маслов, Г. А. Омелянов. Сибирский матем. журнал. 1983. Т. 24. № 5. С. 172-182.
- [7] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев. ДАН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011-1014.
- [8] С. Альбеверио, Ф. Гестеци, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [9] Ю. М. Широков. ТМФ. 1979. Т. 39. № 3. С. 291-301.
- [10] Ю. М. Широков. ТМФ. 1979. Т. 41. № 3. С. 291-302.
- [11] Г. К. Толоконников, Ю. М. Широков. ТМФ. 1981. Т. 46. № 3. С. 305-309.
- [12] Ю. Г. Шондин. ТМФ. 1982. Т. 51. № 2. С. 181-191.
- [13] В. С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
- [14] E. E. Rosinger. Generalized solutions of nonlinear partial differential equations. V. 146. North Holland Math. Studies, 1987.
- [15] В. П. Маслов. Распространение ударных волн в изоэнтропическом газе. В кн.: Современные проблемы математики. Т. 8. М.: ВИНТИ АН СССР, 1977. С. 199-272.
- [16] В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров, В. Г. Данилов, С. Ю. Доброхотов. Распространение точечной алгебраической особенности для нелинейных уравнений гидродинамики и моделирование мезомасштабных вихрей в неоднородной атмосфере на основе гипотезы В. П. Маслова. Препринт № 552. М.: Институт проблем механики РАН, 1995. С. 1-39.
- [17] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [18] J. F. Colombeau, A. Y. Le Roux. J. Math. Phys. 1988. V. 29. № 2. P. 315-319.
- [19] В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
- [20] E. Rosinger. Non symmetric Dirac distributions in scattering theory. In: Lect. Notes Math., 1976. V. 564. P. 391-399.
- [21] М. Тейлор. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985.
- [22] Ю. В. Егоров. УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 3-40.
- [23] J. F. Colombeau. Elementary introduction to new generalized functions. New York-Amsterdam: North Holland, 1985.
- [24] M. Oberguggenberger. Monatshefte für Math. 1987. B. 103. S. 133-144.
- [25] M. Oberguggenberger. Multiplication of distributions and applications to partial differential equations. N.-Y., 1992.
- [26] В. М. Шелкович. ДАН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 159-164.
- [27] В. М. Шелкович. Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 600-602.
- [28] В. М. Шелкович. Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 5. С. 765-783.

- [29] Я. Б. Ливчак. К теории обобщенных функций. В кн.: Труды Рижского алгебраического семинара. Рига, 1969. С. 98–164.
- [30] Li Bang-He. Acta Scientia Sinica. 1978. V. 21. № 5. P. 561–585.
- [31] В. К. Иванов. Изв. вузов. Математика. 1981. № 1. С. 19–26.
- [32] В. К. Иванов. Об умножении обобщенных функций, заданных на прямой. В сб.: Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1984. С. 97–105.
- [33] В. К. Иванов. ДАН СССР. 1981. Т. 257. № 1. С. 29–33.
- [34] V. G. Danilov, V. P. Maslov, K. A. Volosov. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1995.
- [35] R. J. Di Perna. Arch. for Rational Mechanics and Analysis. 1975. V. 60. № 1. P. 75–100.
- [36] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1959.
- [37] М. В. Федорюк. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
- [38] Ю. А. Брычков. Матем. заметки. 1972. Т. 12. № 2. С. 131–138.
- [39] Р. Курант. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [40] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [41] В. М. Шелкович, А. П. Южаков. Изв. вузов. Математика. 1991. № 4. P. 70–73.

Поступила в редакцию 29.VII.1997 г.