Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Арутюнов, С. А. Фролов, Амплитуда Вирасоро из $S^N \mathbf{R}^{24}$ -орбифолдной сигма-модели, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 1, 56–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:11:46

© 1998 г.

Г. Э. Арутюнов*, С. А. Фролов†

АМПЛИТУДА ВИРАСОРО ИЗ $S^N \mathbf{R}^{24}$ -ОРБИФОЛДНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Четырехтахонная амплитуда рассеяния получена из $S^N \mathbf{R}^{24}$ -орбифолдной сигма-модели в пределе больших N . Взаимодействие замкнутых струн описывается вершиной, представляющей собой бозонный аналог суперсимметричной вершины, предложенной недавно Дойкграафом, Г. Верлинде и Э. Верлинде.

1. ВВЕДЕНИЕ

Компактификация М(атричной)-теории [1] на окружность приводит к $\mathcal{N} = 8$ двумерной суперсимметричной $SU(N)$ -модели Янга–Миллса [2]. В недавних работах [3–5] было высказано предположение, что в пределе больших N теория Янга–Миллса описывает непертурбативную динамику струн типа IIA, причем, как было показано, струнная константа связи обратно пропорциональна константе взаимодействия теории Янга–Миллса. Это предположение выглядит вполне естественным, поскольку в инфракрасном пределе калибровочная теория является сильновзаимодействующей и ее инфракрасная фиксированная точка может быть описана $\mathcal{N} = 8$ суперсимметричной конформной теорией со значениями в орбифолдном пространстве $S^N \mathbf{R}^8$. Известно [6], что гильбертово пространство орбифолдной модели совпадает (точнее содержит) в пределе больших N с фоксовским пространством вторично квантованной струнной теории типа IIA. Используя эти факты, Дойкграаф, Э. Верлинде и Г. Верлинде (ДВВ) [5] предположили, что в первом порядке по струнной константе связи пертурбативная струнная динамика может быть описана $S^N \mathbf{R}^8$ -суперсимметричной орбифолдной конформной моделью, возмущенной иррелевантным оператором конформной размерности $(3/2, 3/2)$. Явный вид этого оператора V был определен в [5], и он замечательным образом воспроизводит картину взаимодействия струн в калибровке светового конуса.

По-видимому, описанный подход не ограничивается только суперсимметричным случаем. В частности, можно предположить [7], что формулировка М(атричной)-теории замкнутых бозонных струн дается пределом больших N двумерной теории Янга–Миллса с 24 полями материи в присоединенном представлении $U(N)$ -калибровочной груп-

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; arut@genesis.mi.ras.ru

† Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; Мюнхенский университет, Мюнхен, Германия

пы. В этом случае инфракрасный предел приводит к $S^N \mathbf{R}^{24}$ -орбифолдной конформной модели. Взаимодействия замкнутых бозонных струн описываются посредством возмущения действия конформной теории поля (КТП) бозонным аналогом ДВВ-вершины [7].

Важная задача, вытекающая из описанной выше струнной интерпретации S^N -орбифолдных сигма-моделей заключается в том, чтобы получить обычные струнные амплитуды рассеяния непосредственно из самих моделей. Эта задача представляется нетривиальной в силу неабелева характера S^N -орбифолдных моделей.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы вывести четырехтахсионную амплитуду рассеяния из $S^N \mathbf{R}^{24}$ -орбифолдной конформной теории поля, возмущенной бозонным аналогом ДВВ-вершины взаимодействия.

Ясно, что первый шаг в построении амплитуды рассеяния состоит в определении входящих и выходящих асимптотических состояний $|i\rangle$ и $|f\rangle$. Свободный струнный предел $g_s \rightarrow 0$ предполагает, что асимптотические состояния следует отождествить с некоторыми состояниями в гильбертовом пространстве орбифолдной КТП, которые, следовательно, должны порождаться некоторыми конформными полями. Далее, согласно обычной квантовой теории поля амплитуду рассеяния A порядка g_s^n можно выделить из S -матричного элемента, представляющего собой коррелятор n конформных полей $V(z_i)$, с последующим интегрированием по точкам z_i :

$$\langle f|S|i\rangle \sim \int \prod_i d^2 z_i \langle f|V(z_1) \dots V(z_n)|i\rangle.$$

Построение асимптотических состояний $|i\rangle$ и $|f\rangle$, которые можно отождествить с входящими и выходящими тахионами, и вычисление вышеуказанных корреляторов в $S^N \mathbf{R}^{24}$ -орбифолдной КТП представляют собой основные рассматриваемые в работе вопросы, необходимые для получения четырехтахсионной амплитуды рассеяния.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе напомним описание гильбертова пространства орбифолдной модели. В третьем разделе вводятся твистующие поля, которые рожают состояния гильбертова пространства, а также находятся их конформные размерности. В четвертом разделе вычисляется амплитуда рассеяния и показывается, что она совпадает с амплитудой Вирасоро. В заключении обсуждаются нерешенные вопросы.

2. $S^N \mathbf{R}^D$ -ОРБИФОЛДНАЯ СИГМА-МОДЕЛЬ

Рассмотрим двумерную теорию поля на цилиндре, описываемую действием

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma (\partial_\tau X_I^i \partial_\tau X_I^i - \partial_\sigma X_I^i \partial_\sigma X_I^i), \quad (1)$$

где $0 \leq \sigma < 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, D$, $I = 1, 2, \dots, N$ и поля X принимают значения в $S^N \mathbf{R}^D \equiv (\mathbf{R}^D)^N / S_N$.

Как обычно в орбифолдных моделях [8, 9], поля X^i могут иметь твистованные граничные условия

$$X^i(\sigma + 2\pi) = gX^i(\sigma), \quad (2)$$

где g принадлежит симметрической группе S_N .

Умножая (2) на некоторый элемент $h \in S_N$ и принимая во внимание, что X^i и hX^i описывают одну и ту же конфигурацию, получаем, что всевозможные граничные условия находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности симметрической группы. Следовательно, гильбертово пространство орбифолдной модели разлагается в прямую сумму гильбертовых пространств твистованных секторов, соответствующих классам сопряженности $[g]$ группы S_N [6]:

$$\mathcal{H}(S^N \mathbf{R}^D) = \bigoplus_{[g]} \mathcal{H}_{[g]}.$$

Хорошо известно, что классы сопряженности группы S_N описываются разбиениями $\{N_n\}$ числа N :

$$N = \sum_{n=1}^s nN_n,$$

и могут быть представлены как

$$[g] = (1)^{N_1} (2)^{N_2} \dots (s)^{N_s}, \quad (3)$$

здесь N_n – кратность циклической перестановки (n) n элементов.

В любом классе сопряженности $[g]$ есть единственный элемент g_c , который имеет каноническую блок-диагональную форму

$$g_c = \text{diag}(\underbrace{\omega_1, \dots, \omega_1}_{N_1 \text{ раз}}, \underbrace{\omega_2, \dots, \omega_2}_{N_2 \text{ раз}}, \dots, \underbrace{\omega_s, \dots, \omega_s}_{N_s \text{ раз}}), \quad (4)$$

где ω_n есть $(n \times n)$ -матрица, порождающая циклические перестановки (n) n элементов

$$\omega_n = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i, i+1} + E_{n1},$$

и E_{ij} – матричные единицы.

Нетрудно показать, что ω_n порождают группу $\mathbf{Z}_n$, поскольку $\omega_n^n = 1$, и только матрицы ω_n^k из $\mathbf{Z}_n$ коммутируют с ω_n . Так как централизатор C_g любого элемента $g \in [g]$ изоморфен C_{g_c} , заключаем, что

$$C_g = \prod_{n=1}^s S_{N_n} \times \mathbf{Z}_n^{N_n},$$

где симметрическая группа S_{N_n} переставляет N_n циклов (n) . Ясно, что централизатор C_g содержит $\prod_{n=1}^s N_n! n^{N_n}$ элементов.

Благодаря факторизации (3) класса $[g]$ гильбертово пространство $\mathcal{H}_{[g]} \equiv \mathcal{H}_{\{N_n\}}$ каждого твистованного сектора можно разложить на симметрические тензорные произведения N_n копий гильбертовых пространств $\mathcal{H}_{(n)}$, которые соответствуют циклам длины n ,

$$\mathcal{H}_{\{N_n\}} = \bigotimes_{n=1}^s S^{N_n} \mathcal{H}_{(n)} = \bigotimes_{n=1}^s \left(\underbrace{\mathcal{H}_{(n)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{(n)}}_{N_n \text{ раз}} \right)^{S_{N_n}}.$$

Пространство $\mathcal{H}_{(n)}$ есть $\mathbf{Z}_n$ -инвариантное подпространство гильбертова пространства сигма-модели Dn полей X_I^i с циклическим граничным условием

$$X_I^i(\sigma + 2\pi) = X_{I+1}^i(\sigma), \quad I = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Поля $X_I(\sigma)$ можно склеить в единое поле $X(\sigma)$, которое отождествляется с длинной струной длины n . Состояния пространства $\mathcal{H}_{(n)}$ получаются действием струнных операторов рождения на собственные векторы оператора импульса. Эти векторы имеют стандартную нормировку

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{k} \rangle = \delta^D(\mathbf{q} + \mathbf{k})$$

и могут рассматриваться как состояния, полученные действием оператора $e^{i\mathbf{k}x}$ на вакуумное состояние (которое ненормируемо): $|\mathbf{k}\rangle = e^{i\mathbf{k}x}|0\rangle$, $\langle \mathbf{q}| = \langle 0|e^{i\mathbf{q}x}$.

$\mathbf{Z}_n$ -инвариантное подпространство выделяется путем наложения условия

$$(L_0 - \bar{L}_0)|\Psi\rangle = nm|\Psi\rangle,$$

где m – целое число и L_0 – канонически нормированный L_0 -оператор одной струны.

Если $D = 24$, то пространство Фока вторично квантованной замкнутой бозонной струны восстанавливается в пределе $N \rightarrow \infty$, $n_i/N \rightarrow p_i^+$ [6], где конечное отношение n_i/N отождествляется с p_i^+ импульсом длинной струны. $\mathbf{Z}_n$ -проекция сводится в этом пределе к обычному условию соответствия уровней $L_0^{(i)} - \bar{L}_0^{(i)} = 0$. Индивидуальный импульс p_i^- определяется стандартным условием массовой поверхности $p_i^+ p_i^- = L_0^{(i)}$.

3. ТВИСТУЮЩИЕ ПОЛЯ

Рассмотрим конформную теорию DN свободных скалярных полей, описываемую действием (1). Удобно выполнить виковский поворот $\tau \rightarrow -i\tau$ и отобразить цилиндр на сферу: $z = e^{\tau+i\sigma}$, $\bar{z} = e^{\tau-i\sigma}$.

Вакуумное состояние $|0\rangle$ КТП аннигилируется операторами импульса и операторами уничтожения и должно быть нормируемо. Чтобы отождествить это вакуумное состояние с вакуумным состоянием нетвистованного сектора орбифолдной сигма-модели, выберем следующую нормировку $|0\rangle$:

$$\langle 0|0\rangle = R^{DN}.$$

Здесь R следует считать параметром регуляризации сигма-модели. Мы регуляризуем сигма-модель путем компактификации координат x_I^i на окружности радиуса R . Тогда норма собственных векторов операторов импульса в нетвистованном секторе дается формулой

$$\langle \mathbf{q} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^{-DN} \int_0^{2\pi R} d^{DN} x e^{i(\mathbf{q}+\mathbf{k})x} = \prod_{I=1}^N \delta_R^D(\mathbf{q}_I + \mathbf{k}_I),$$

где $k_I^i = m_I^i/R$ и $q_I^i = n_I^i/R$ – импульсы состояний, m_I^i и n_I^i – целые числа, поскольку мы компактифицировали координаты, и

$$\delta_R^D(\mathbf{k}) = R^D \prod_{i=1}^D \delta_{m^i 0}$$

обозначает регуляризованную δ -функцию. Обычная нормировка собственных векторов восстанавливается в пределе $R \rightarrow \infty$.

Как обычно, поле $X(z, \bar{z})$ можно разложить на моды, движущиеся вправо и влево:

$$2X(z, \bar{z}) = X(z) + \bar{X}(\bar{z}). \quad (6)$$

В дальнейшем мы в основном сконцентрируем наше внимание на левом секторе. Пусть $\sigma_g(z, \bar{z})$ будет примарным полем [10], которое создает вакуум твистованного сектора в точке z , т.е. поля $X^i(z, \bar{z})$ удовлетворяют следующим монодромным условиям:

$$X^i(ze^{2\pi i}, \bar{z}e^{-2\pi i})\sigma_g(0, 0) = gX^i(z, \bar{z})\sigma_g(0, 0).$$

Заметим, что рассматриваемое нами твистующее поле $\sigma_g(z, \bar{z})$ не может быть представлено в виде тензорного произведения голоморфных и антиголоморфных полей $\sigma_g(z)$ и $\bar{\sigma}_g(\bar{z})$, которые можно было бы рассматривать как твистующие поля, рождающие вакуумные состояния левого и правого секторов, соответственно.

Очевидно, что конформная размерность Δ_g зависит только от $[g]$. Чтобы вычислить Δ_g , предположим, что g имеет факторизацию (3). Тогда Δ_g дается следующим уравнением:

$$\Delta_g = \sum_{n=1}^s N_n \Delta_{(n)}, \quad (7)$$

где $\Delta_{(n)}$ обозначает конформную размерность твистующего поля $\sigma_{(n)}$, которое порождает вакуумное состояние пространства $\mathcal{H}_{(n)}$ сигма-модели Dn полей с циклическим граничным условием (5). Пусть твистующее поле $\sigma_{(n)}$ помещено в точку $z = 0$ и пусть соответствующее вакуумное состояние¹⁾ обозначается как $|(n)\rangle = \sigma_{(n)}(0)|0\rangle$. Поскольку твистующее поле $\sigma_{(n)}$ порождает одну длинную струну, мы нормируем вакуумное состояние $|(n)\rangle$ следующим образом:

$$\langle (n) | (n) \rangle = R^D. \quad (8)$$

¹⁾ Это вакуумное состояние – примарное состояние КТП.

Поля $X(z)$ имеют такое разложение в окрестности $z = 0$:

$$\partial X_I^i(z) = -i \frac{1}{n} \sum_m \alpha_m^i \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{n} I m \right\} z^{-\frac{m}{n}-1}, \quad (9)$$

где α_m^i ($m \neq 0$) – это обычные операторы рождения и уничтожения с коммутационными соотношениями

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m \delta^{ij} \delta_{m+n,0} \quad (10)$$

и α_0^i пропорционален оператору импульса²⁾. Вакуумное состояние $|(n)\rangle$ аннигилируется операторами α_m^i с $m \geq 0$.

Поскольку $\sigma_{(n)}$ – примарное поле, конформная размерность $\Delta_{(n)}$ может быть найдена из уравнения

$$\langle (n) | T(z) | (n) \rangle = \frac{\Delta_{(n)}}{z^2} \langle (n) | (n) \rangle,$$

где $T(z)$ – тензор энергии-импульса.

Используя (9) и (10), вычислим коррелятор

$$\langle (n) | \partial X_I^i(z) \partial X_I^j(w) | (n) \rangle = -\delta^{ij} \frac{(zw)^{\frac{1}{n}-1}}{n^2 (z^{\frac{1}{n}} - w^{\frac{1}{n}})^2} \langle (n) | (n) \rangle.$$

Принимая во внимание, что тензор энергии-импульса определен как

$$T(z) = -\frac{1}{2} \lim_{w \rightarrow z} \sum_{i=1}^D \sum_{I=1}^n \left(\partial X_I^i(z) \partial X_I^i(w) + \frac{1}{(z-w)^2} \right),$$

получаем

$$\Delta_{(n)} = \frac{D}{24} \left(n - \frac{1}{n} \right). \quad (11)$$

Возбужденные состояния сигма-модели задаются действием на $|(n)\rangle$ некоторых операторов рождения. В частности, состояние, соответствующее скалярной частице с импульсом $\mathbf{k}$, есть

$$\sigma_{(n)}[\mathbf{k}](0,0)|0\rangle = : \exp \{ i k_I^i X_I^i(0,0) \} : |(n)\rangle, \quad (12)$$

где по индексам i и I предполагается суммирование, $k_I^i = m_I^i / R$ – импульс, переносимый полем $X_I^i(z, \bar{z})$, а $k^i = \sum_{I=1}^n k_I^i$ – полный импульс длинной струны.

Используя определение вакуумного состояния $|(n)\rangle$, уравнение (12) можно переписать в виде

$$\sigma_{(n)}[\mathbf{k}](0,0)|0\rangle = : \exp \left\{ i \frac{k^i}{\sqrt{n}} Y^i(0,0) \right\} : |(n)\rangle, \quad (13)$$

где

$$Y^i(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{I=1}^n X_I^i(z, \bar{z}). \quad (14)$$

²⁾ $\alpha_0^i = p^i / 2$ в струнных единицах $\alpha' = 1/2$.

Поле $Y(z)$ нормировано канонически, т.е. часть тензора энергии-импульса, зависящая от Y , есть $-(1/2):\partial Y(z)\partial Y(z):$, и имеет тривиальную монодромию вокруг $z = 0$.

Из (13) ясно, что конформная размерность примарного поля

$$\sigma_{(n)}[\mathbf{k}](z, \bar{z}) = : \exp \left\{ i \frac{k^i}{\sqrt{n}} Y^i(z, \bar{z}) \right\} : \sigma_{(n)}(z, \bar{z})$$

равна

$$\Delta_{(n)}[\mathbf{k}] = \Delta_{(n)} + \frac{\mathbf{k}^2}{8n} = \frac{D}{24} \left(n - \frac{1}{n} \right) + \frac{\mathbf{k}^2}{8n},$$

где было учтено разложение (6).

В соответствии с (7) и (11) конформная размерность σ_g есть

$$\Delta_g = \sum_{n=1}^s N_n \frac{D}{24} \left(n - \frac{1}{n} \right) = \frac{D}{24} \left(N - \sum_{n=1}^s \frac{N_n}{n} \right).$$

Можно также ввести скалярное поле, которое создает скалярные частицы с импульсами k_α^i , $\alpha = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 + \dots + N_s \equiv N_{\text{str}}$:

$$\sigma_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}](z, \bar{z}) = : \exp \left\{ i \frac{k_\alpha^i}{\sqrt{n_\alpha}} Y_\alpha^i(z, \bar{z}) \right\} : \sigma_g(z, \bar{z}),$$

где $n_1 = n_2 = \dots = n_{N_1} = 1$, $n_{N_1+1} = n_{N_1+2} = \dots = n_{N_1+N_2} = 2$ и т.д., Y_α^i соответствует циклу (n_α) и определяется с помощью (14), а по индексам i и α предполагается суммирование. Конформная размерность поля $\sigma_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}]$ равна

$$\Delta_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}] = \frac{D}{24} \left(N - \sum_{n=1}^s \frac{N_n}{n} \right) + \sum_{\alpha} \frac{\mathbf{k}_\alpha^2}{8n_\alpha}. \quad (15)$$

Ясно, что двухточечная корреляционная функция твистующих полей σ_{g_1} и σ_{g_2} не обращается в нуль, если и только если $g_1 g_2 = 1$. Принимая во внимание нормировку (8), находим³⁾

$$\langle \sigma_{g^{-1}}(\infty) \sigma_g(0) \rangle = R^{DN_{\text{str}}}.$$

Это означает, что поля $\sigma_{g^{-1}}$ и σ_g имеют следующее разложение операторного произведения:

$$\sigma_{g^{-1}}(z, \bar{z}) \sigma_g(0, 0) = \frac{R^{D(N_{\text{str}} - N)}}{|z|^{4\Delta_g}} + \dots$$

Двухточечная корреляционная функция полей $\sigma_{g^{-1}}[\{\mathbf{q}_\alpha\}]$ и $\sigma_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}]$ соответственно равна

$$\langle \sigma_{g^{-1}}[\{\mathbf{q}_\alpha\}](\infty) \sigma_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}](0) \rangle = \prod_{\alpha} \delta_R^D(\mathbf{q}_\alpha + \mathbf{k}_\alpha). \quad (16)$$

³⁾ Очевидно, что $[g^{-1}] = [g]$ и, следовательно, $\Delta_{g^{-1}} = \Delta_g$.

Твистующие поля σ_g не создают твистованных секторов орбифолдной КТП, поскольку они не инвариантны относительно действия симметрической группы. Инвариантное твистующее поле можно определить, суммируя все твистующие поля из одного класса сопряженности:

$$\sigma_{[g]}(z, \bar{z}) = \frac{1}{N!} \sum_{h \in S_N} \sigma_{h^{-1}gh}(z, \bar{z}).$$

Используя это определение, легко вычислить двухточечную корреляционную функцию

$$\langle \sigma_{[g]}(\infty) \sigma_{[g]}(0) \rangle = \frac{R^{D_{N_{\text{str}}}}}{N!} \prod_{n=1}^s N_n! n^{N_n},$$

где $\prod_{n=1}^s N_n! n^{N_n}$ представляет собой число элементов централизатора C_g .

Определение твистующего поля $\sigma_{[g]}[\{\mathbf{k}_\alpha\}]$ не столь прямолинейно. Рассмотрим элемент $g_c \in [g]$, который имеет каноническую блок-диагональную форму (4). Имеется $N_1 + \dots + N_s = N_{\text{str}}$ полей $Y_\alpha(z, \bar{z})$, монодромия которых в окрестности расположения твистующего поля σ_{g_c} тривиальна. В соответствии с (14) они определяются как

$$Y_\alpha(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{n_\alpha}} \sum_{I \in (n_\alpha)} X_I(z, \bar{z}).$$

Рассмотрим теперь поля X , которые имеют монодромию

$$X(ze^{2\pi i}, \bar{z}e^{-2\pi i}) = h^{-1}g_chX(z, \bar{z}). \quad (17)$$

Из (17) можно видеть, что поля $Y_\alpha[h]$:

$$Y_\alpha[h](z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{n_\alpha}} \sum_{I \in (n_\alpha)} (hX)_I(z, \bar{z}),$$

имеют тривиальную монодромию. Тогда инвариантное твистующее поле $\sigma_{[g]}[\{\mathbf{k}_\alpha\}]$ определяется следующим образом:

$$\sigma_{[g]}[\{\mathbf{k}_\alpha\}](z, \bar{z}) = \frac{1}{N!} \sum_{h \in S_N} : \exp \left\{ i \frac{k_\alpha^i}{\sqrt{n_\alpha}} Y_\alpha^i[h](z, \bar{z}) \right\} : \sigma_{h^{-1}g_ch}(z, \bar{z}). \quad (18)$$

Легко проверить, что твистующее поле $\sigma_{[g]}[\{\mathbf{k}_\alpha\}]$ инвариантно по отношению к перестановке импульсов $\mathbf{k}_\alpha$, которые соответствуют циклам (n_α) одинаковой длины.

Вершина взаимодействия, предложенная ЛВВ [5], определяется с помощью твистующего поля σ_{IJ} , которое соответствует групповому элементу $g_{IJ} = 1 - E_{II} - E_{JJ} + E_{IJ} + E_{JI}$, переставляющему поля X_I и X_J .

Твистующие поля σ_g имеют следующее разложение операторного произведения⁴⁾:

$$\sigma_{g_1}(z, \bar{z}) \sigma_{g_2}(0) = \frac{1}{|z|^{2\Delta_{g_1} + 2\Delta_{g_2} - 2\Delta_{g_1 g_2}}} (C_{g_1, g_2}^{g_1 g_2} \sigma_{g_1 g_2}(0) + C_{g_1, g_2}^{g_2 g_1} \sigma_{g_2 g_1}(0)) + \dots, \quad (19)$$

⁴⁾Подчеркнем, что в правой части разложения операторного произведения имеются и другие примарные поля, однако они несущественны для нашего рассмотрения.

здесь — два ведущих члена, поскольку имеются два различных способа обойти точки z и 0 . Нетрудно видеть, что $g_1 g_2$ и $g_2 g_1$ принадлежат одному и тому же классу сопряженности, и, значит, $\Delta_{g_1 g_2} = \Delta_{g_2 g_1}$.

Следовательно, твистующее поле σ_{IJ} , действуя на состояние $\sigma_g(0)|0\rangle$, создает состояния $\sigma_{g_{IJ}g}(0)|0\rangle$ и $\sigma_{gg_{IJ}}(0)|0\rangle$. Произвольный элемент g имеет разложение $(n_1)(n_2)\cdots(n_k)$ и описывает конфигурацию с k струнами. Если индексы I и J принадлежат в разложении по циклам, скажем, циклу (n_1) , то элемент $g_{IJ}g$ имеет разложение $(n_1^{(1)})(n_1^{(2)})(n_2)\cdots(n_k)$ с $n_1^{(1)} + n_1^{(2)} = n_1$ и, значит, описывает конфигурацию с $k+1$ струной. Если же индекс I принадлежит циклу (n_1) , а J — циклу (n_2) , то элемент $g_{IJ}g$ имеет разложение $(n_1 + n_2)(n_3)\cdots(n_k)$ и описывает конфигурацию с $k-1$ струной. Таким образом, твистующее поле σ_{IJ} порождает простейшее объединение или расщепление струн.

Чтобы описать ДВВ-вершину взаимодействия, полезно вернуться в пространство-время Минковского. Тогда взаимодействие описывается трансляционно-инвариантной вершиной

$$V_{\text{int}} = \frac{\lambda N}{2\pi} \sum_{I < J} \int d\tau d\sigma \sigma_{IJ}(\sigma_+, \sigma_-),$$

где λ — константа взаимодействия, пропорциональная струнной константе, и $\sigma_{\pm}$ — координаты светового конуса: $\sigma_{\pm} = \tau \pm \sigma$.

Если $D = 24$, то твистующее поле $\sigma_{IJ}(\sigma_+, \sigma_-)$ является конформным полем веса $(3/2, 3/2)$, а константа λ имеет размерность -1 .

Вновь выполняя виковский поворот и отображение на сферу, получаем следующее выражение для V_{int} (при $D = 24$):

$$V_{\text{int}} = -\frac{\lambda N}{2\pi} \sum_{I < J} \int d^2 z |z| \sigma_{IJ}(z, \bar{z}),$$

где знак минус появился вследствие того, что σ_{IJ} имеет конформную размерность $(3/2, 3/2)$.

Таким образом, действие взаимодействующей $S^N \mathbf{R}^{24}$ -орбифолдной сигма-модели задается суммой

$$S_{\text{int}} = S_0 + V_{\text{int}}.$$

В следующем разделе мы вычислим S -матричный элемент, соответствующий рассеянию четырех тахионов, и покажем, что амплитуда рассеяния совпадает с амплитудой Вирасоро.

4. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ

S -матричный элемент во втором порядке по константе связи λ дается стандартной формулой квантовой теории поля

$$\langle f | S | i \rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda N}{2\pi} \right)^2 \left\langle f \left| \int d^2 z_1 d^2 z_2 |z_1| |z_2| T(\mathcal{L}_{\text{int}}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{L}_{\text{int}}(z_2, \bar{z}_2)) \right| i \right\rangle, \quad (20)$$

где символ T означает временное упорядочение: $|z_1| > |z_2|$ и

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(z, \bar{z}) = \sum_{I < J} \sigma_{IJ}(z, \bar{z}).$$

Начальное состояние $|i\rangle$ описывает два тахиона с импульсами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ и порождается твистующим полем $\sigma_{[g_0]}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]$:

$$|i\rangle = C_0 \sigma_{[g_0]}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](0, 0)|0\rangle.$$

Элемент g_0 берется в канонической блок-диагональной форме

$$g_0 = (n_0)(N - n_0),$$

где $n_0 < N - n_0$.

Конечное состояние $\langle f|$ описывает два тахиона с импульсами $\mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_4$ и дается формулой (см. [10])

$$\langle f| = C_\infty \lim_{z_\infty \rightarrow \infty} |z_\infty|^{4\Delta_\infty} \langle 0| \sigma_{[g_\infty]}[\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4](z_\infty, \bar{z}_\infty).$$

Элемент g_∞ имеет каноническое разложение

$$g_\infty = (n_\infty)(N - n_\infty), \quad n_\infty < N - n_\infty.$$

Константы C_0 и C_∞ выбираются равными

$$C_0 = \sqrt{\frac{N!}{n_0(N - n_0)}}, \quad C_\infty = \sqrt{\frac{N!}{n_\infty(N - n_\infty)}},$$

что обеспечивает стандартную нормировку начальных и конечных состояний.

После конформного преобразования $z \rightarrow z/z_1$ уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda N}{2\pi} \right)^2 \int d^2 z_1 d^2 z_2 |z_1| |z_2| |z_1|^{2\Delta_\infty - 2\Delta_0 - 6} \times \\ &\times \left\langle f \left| T \left(\mathcal{L}_{\text{int}}(1, 1) \mathcal{L}_{\text{int}} \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \right) \right) \right| i \right\rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

где Δ_0 и Δ_∞ – конформные размерности твистующих полей $\sigma_{[g_0]}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]$ и $\sigma_{[g_\infty]}[\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4]$:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= N - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{N - n_0} + \frac{\mathbf{k}_1^2}{8n_0} + \frac{\mathbf{k}_2^2}{8(N - n_0)}, \\ \Delta_\infty &= N - \frac{1}{n_\infty} - \frac{1}{N - n_\infty} + \frac{\mathbf{k}_3^2}{8n_\infty} + \frac{\mathbf{k}_4^2}{8(N - n_\infty)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем импульсы светового конуса тахионов [5], принимая во внимание условие массовой поверхности для тахионных состояний:

$$\begin{aligned} k_1^+ &= \frac{n_0}{N}, & k_1^- k_1^+ - \mathbf{k}_1^2 &\equiv -k_1^2 = -8, \\ k_2^+ &= \frac{N - n_0}{N}, & k_2^- k_2^+ - \mathbf{k}_2^2 &\equiv -k_2^2 = -8, \\ k_3^+ &= -\frac{n_\infty}{N}, & k_3^- k_3^+ - \mathbf{k}_3^2 &\equiv -k_3^2 = -8, \\ k_4^+ &= -\frac{N - n_\infty}{N}, & k_4^- k_4^+ - \mathbf{k}_4^2 &\equiv -k_4^2 = -8. \end{aligned}$$

Используя импульсы светового конуса и условие массовой поверхности, (22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= N + \frac{k_1^- + k_2^-}{8N}, \\ \Delta_\infty &= N - \frac{k_3^- + k_4^-}{8N}. \end{aligned}$$

Выполняя замену переменных $z_2/z_1 = u$, получаем

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda N}{2\pi} \right)^2 \int d^2 z_1 |z_1|^{2\Delta_\infty - 2\Delta_0 - 2} \times \\ &\times \int d^2 u |u| \langle f|T(\mathcal{L}_{\text{int}}(1, 1)\mathcal{L}_{\text{int}}(u, \bar{u}))|i\rangle. \end{aligned}$$

Ясно, что интеграл по z_1 расходится. Чтобы понять смысл этой расходимости, следует вспомнить, что был выполнен виковский поворот. Возвращаясь к координатам σ, τ на цилиндре, для интеграла по z_1 получаем

$$\int d^2 z_1 |z_1|^{2\Delta_\infty - 2\Delta_0 - 2} \rightarrow i \int d\tau d\sigma e^{2i\tau(\Delta_\infty - \Delta_0)}.$$

Интегрирование по σ и τ дает закон сохранения для импульса светового конуса k_i^- :

$$\int d\tau d\sigma e^{2i\tau(\Delta_\infty - \Delta_0)} = 4N(2\pi)^2 \delta(k_1^- + k_2^- + k_3^- + k_4^-).$$

Таким образом, S -матричный элемент равен

$$\langle f|S|i\rangle = -i2\lambda^2 N^3 \delta(k_1^- + k_2^- + k_3^- + k_4^-) \int d^2 u |u| \langle f|T(\mathcal{L}_{\text{int}}(1, 1)\mathcal{L}_{\text{int}}(u, \bar{u}))|i\rangle. \quad (23)$$

Итак, чтобы найти S -матричный элемент, необходимо вычислить коррелятор

$$\begin{aligned} F(u, \bar{u}) &= \langle f|T(\mathcal{L}_{\text{int}}(1, 1)\mathcal{L}_{\text{int}}(u, \bar{u}))|i\rangle = \\ &= C_0 C_\infty \sum_{I < J; K < L} \langle \sigma_{[g_\infty]}[\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4](\infty) T(\sigma_{IJ}(1, 1) \sigma_{KL}(u, \bar{u})) \sigma_{[g_0]}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](0, 0) \rangle. \quad (24) \end{aligned}$$

В дальнейшем для определенности мы предположим, что $n_0 < n_\infty$ и $|u| < 1$.

Используя определение (18) поля $\sigma_{[g]}[\{\mathbf{k}_\alpha\}]$ и принимая во внимание, что вершина взаимодействия S_N -инвариантна и что коррелятор твистующих полей инвариантен относительно глобального действия симметрической группы

$$\langle \sigma_{g_1} \sigma_{g_2} \cdots \sigma_{g_n} \rangle = \langle \sigma_{h^{-1}g_1 h} \sigma_{h^{-1}g_2 h} \cdots \sigma_{h^{-1}g_n h} \rangle, \quad (25)$$

перепишем коррелятор в виде

$$F(u, \bar{u}) = \frac{C_0 C_\infty}{N!} \sum_{h_\infty \in S_N} \sum_{I < J; K < L} \langle \sigma_{h_\infty^{-1} g_\infty h_\infty}[\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4](\infty) \sigma_{IJ}(1, 1) \times \\ \times \sigma_{KL}(u, \bar{u}) \sigma_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](0, 0) \rangle.$$

Отметим, что коррелятор

$$\langle \sigma_{g_1}(\infty) \sigma_{g_2}(1, 1) \sigma_{g_3}(u, \bar{u}) \sigma_{g_4}(0, 0) \rangle \quad (26)$$

не исчезает, только если

$$g_1 g_2 g_3 g_4 = 1 \quad \text{или} \quad g_1 g_4 g_3 g_2 = 1. \quad (27)$$

Это можно увидеть следующим образом. В силу разложения операторного произведения (19) полей σ_g в пределе $u \rightarrow 0$ коррелятор (26) сводится к сумме трехточечных корреляторов $\langle \sigma_{g_1} \sigma_{g_2} \sigma_{g_3 g_4} \rangle$ и $\langle \sigma_{g_1} \sigma_{g_2} \sigma_{g_4 g_3} \rangle$. Эта сумма не исчезает, если выполнено одно из следующих уравнений:

$$g_1 g_2 g_3 g_4 = 1, \quad g_1 g_3 g_4 g_2 = 1, \quad g_1 g_2 g_4 g_3 = 1, \quad g_1 g_4 g_3 g_2 = 1. \quad (28)$$

С другой стороны, в пределе $u \rightarrow 1$ получается сумма корреляторов $\langle \sigma_{g_1} \sigma_{g_2 g_3} \sigma_{g_4} \rangle$ и $\langle \sigma_{g_1} \sigma_{g_3 g_2} \sigma_{g_4} \rangle$. Эта сумма не исчезает, если

$$g_1 g_2 g_3 g_4 = 1, \quad g_1 g_4 g_2 g_3 = 1, \quad g_1 g_3 g_2 g_4 = 1, \quad g_1 g_4 g_3 g_2 = 1. \quad (29)$$

Сравнивая (28) и (29), получаем (27).

Однако вклад членов, удовлетворяющих уравнению $h_\infty^{-1} g_\infty h_\infty g_0 g_{KL} g_{IJ} = 1$, совпадает с вкладом членов, удовлетворяющих уравнению $h_\infty^{-1} g_\infty h_\infty g_{IJ} g_{KL} g_0 = 1$. Для доказательства этого утверждения заметим, что инвариантность действия (1) относительно преобразования четности мировой поверхности $z \rightarrow \bar{z}$ (или $\sigma \rightarrow -\sigma$ в пространстве-времени Минковского) приводит к следующему равенству:

$$\langle \sigma_{g_1} \sigma_{g_2} \cdots \sigma_{g_n} \rangle = \langle \sigma_{g_1^{-1}} \sigma_{g_2^{-1}} \cdots \sigma_{g_n^{-1}} \rangle, \quad (30)$$

поскольку твистующие поля σ_g преобразуются в $\sigma_{g^{-1}}$. Теперь принимая во внимание уравнения (25) и (30) и тот факт, что элементы g и g^{-1} принадлежат одному и тому же классу сопряженности, получаем желаемое равенство

$$\begin{aligned} \sum_{I < J; K < L} \langle \sigma_{g_{IJ} g_{KL} g_0^{-1}} \sigma_{IJ} \sigma_{KL} \sigma_{g_0} \rangle &= \sum_{I < J; K < L} \langle \sigma_{g_0 g_{KL} g_{IJ}} \sigma_{IJ} \sigma_{KL} \sigma_{g_0^{-1}} \rangle = \\ &= \sum_{I < J; K < L} \langle \sigma_{g_0^{-1} g_{KL} g_{IJ}} \sigma_{IJ} \sigma_{KL} \sigma_{g_0} \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $F(u, \bar{u})$ дается суммой корреляторов твистующих полей, которую можно схематически представить следующим образом:

$$\mathcal{S} = \sum_{h_\infty \in S_N} \sum_{I < J; K < L} \langle \sigma_{h_\infty^{-1} g_\infty h_\infty} \sigma_{IJ} \sigma_{KL} \sigma_{g_0} \rangle,$$

где элементы h_∞, g_{IJ}, g_{KL} решают уравнение $h_\infty^{-1} g_\infty h_\infty g_{IJ} g_{KL} g_0 = 1$. Значения индексов K и L можно фиксировать, используя стабилизатор элемента g_0 и инвариантность (25) корреляторов

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \sum_{h_\infty \in S_N} \sum_{I < J} (n_0(N - n_0) \langle \sigma_{h_\infty^{-1} g_\infty h_\infty} \sigma_{IJ} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_0} \rangle + \\ &\quad + (N - n_0) \langle \sigma_{h_\infty^{-1} g_\infty h_\infty} \sigma_{IJ} \sigma_{n_\infty N} \sigma_{g_0} \rangle + \\ &\quad + (N - n_0) \langle \sigma_{h_\infty^{-1} g_\infty h_\infty} \sigma_{IJ} \sigma_{n_0 + n_\infty, N} \sigma_{g_0} \rangle). \end{aligned} \quad (31)$$

Первый член в (31) соответствует объединению двух входящих струн, а фактор $n_0(N - n_0)$ появляется благодаря тому, что в этом случае индекс K может принимать n_0 значений, $K = 1, \dots, n_0$, а L соответственно $N - n_0$ значений, $L = n_0 + 1, \dots, N$. Чтобы фиксировать $K = n_0$ и $L = N$, следует использовать все элементы из C_{g_0} . Второй и третий члены соответствуют расщеплению струны длины $N - n_0$ на две струны с длинами $n_\infty - n_0$ и $N - n_\infty$ или же $N - n_0 - n_\infty$ и n_∞ , соответственно. В этих случаях, чтобы зафиксировать значения K и L , следует использовать $N - n_0$ элементов подгруппы $\mathbf{Z}_{N-n_0}$ группы C_{g_0} , которая не действует на цикл (n_0) .

Уравнение (31) может быть далее переписано в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= n_0(N - n_0) n_\infty(N - n_\infty) \left(\sum_{I=1}^{n_\infty} \langle \sigma_{g_\infty(I)} \sigma_{I, I+N-n_\infty} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_0} \rangle + \right. \\ &\quad + \sum_{I=1}^{N-n_\infty} \langle \sigma_{g_\infty(I)} \sigma_{I, I+n_\infty} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_0} \rangle + \sum_{J=n_0+1}^{n_\infty} \langle \sigma_{g_\infty(J)} \sigma_{n_0 J} \sigma_{n_\infty N} \sigma_{g_0} \rangle + \\ &\quad \left. + \sum_{J=n_0+n_\infty+1}^N \langle \sigma_{g_\infty(J)} \sigma_{n_0 J} \sigma_{n_0+n_\infty, N} \sigma_{g_0} \rangle \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где элементы g_∞ должны находиться из уравнения $g_\infty g_{IJ} g_{KL} g_0 = 1$.

Дадим некоторые пояснения. Фактор $n_\infty(N - n_\infty)$ представляет собой объем стабилизатора $\mathbf{Z}_{n_\infty} \times \mathbf{Z}_{N-n_\infty}$ элемента g_∞ . Первые два члена соответствуют расщеплению длинной струны длины N на две струны с длинами n_∞ и $N - n_\infty$. Этого можно достичь, если $J - I = N - n_\infty$ или $J - I = n_\infty$. В третьем и четвертом членах мы фиксируем значение I равным n_0 , используя действие подгруппы $\mathbf{Z}_{n_0}$ группы C_{g_0} . Это дает дополнительный фактор n_0 . Третий (четвертый) член описывает объединение струн с длинами n_0 и $n_\infty - n_0$ ($N - n_0 - n_\infty$) в одну струну длины n_∞ ($N - n_\infty$). Общее число различных корреляторов, следовательно, равняется $2(N - n_0)$. Диаграммы, соответствующие этим четырем членам, изображены на рис. 1.

Рис. 1. Диаграммное представление различных корреляторов в уравнении (32).

Итак, необходимо вычислить корреляторы (и такие же корреляторы с заменой $u \leftrightarrow 1$)

$$G(u, \bar{u}) = \langle \sigma_{g_\infty}[\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4](\infty) \sigma_{IJ}(1, 1) \sigma_{KL}(u, \bar{u}) \sigma_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](0, 0) \rangle, \quad (33)$$

где все возможные элементы $g_\infty, g_{IJ}, g_{KL}, g_0$ перечислены в (32).

Чтобы вычислить коррелятор (33), мы привлечем метод тензора энергии-импульса [11]. Идея метода состоит в следующем. Предположим, что известно отношение

$$f(z, u) = \frac{\langle T(z) \phi_\infty(\infty) \phi_1(1) \phi_2(u) \phi_0(0) \rangle}{\langle \phi_\infty(\infty) \phi_1(1) \phi_2(u) \phi_0(0) \rangle}, \quad (34)$$

где $T(z)$ – тензор энергии-импульса и ϕ – примарные поля. Принимая во внимание, что разложение операторного произведения тензора $T(z)$ с любым примарным полем имеет вид

$$T(z)\phi(0) = \frac{\Delta}{z^2}\phi(0) + \frac{1}{z}\partial\phi(0) + \dots,$$

получаем дифференциальное уравнение на коррелятор $G(u, \bar{u}) = \langle \phi_\infty(\infty)\phi_1(1) \times \phi_2(u)\phi_0(0) \rangle$:

$$\partial_u \log G(u, \bar{u}) = H(u, \bar{u}),$$

где $H(u, \bar{u})$ – второй член в разложении функции $f(z, u)$ в окрестности u :

$$f(z, u) = \frac{\Delta_2}{(z-u)^2} + \frac{1}{z-u}H(u, \bar{u}) + \dots.$$

Тем же способом получаем второе уравнение на $G(u, \bar{u})$, используя тензор энергии-импульса $\bar{T}(\bar{z})$:

$$\partial_{\bar{u}} \log G(u, \bar{u}) = \bar{H}(u, \bar{u}).$$

Решение этих двух уравнений определяет коррелятор $G(u, \bar{u})$ с точностью до константы.

Чтобы вычислить отношение (34), мы сначала найдем следующие функции Грина⁵⁾:

$$\begin{aligned} G_{MS}^{ij}(z, w) &= \frac{\langle \partial X_M^i(z) \partial X_S^j(w) \sigma_{g_\infty}[\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4](\infty) \sigma_{IJ}(1, 1) \sigma_{KL}(u, \bar{u}) \sigma_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](0, 0) \rangle}{\langle \sigma_{g_\infty}[\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4](\infty) \sigma_{IJ}(1, 1) \sigma_{KL}(u, \bar{u}) \sigma_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](0, 0) \rangle} \equiv \\ &\equiv \langle \langle \partial X_M^i(z) \partial X_S^j(w) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Эти функции Грина имеют нетривиальные монодромии вокруг точек $\infty, 1, u$ и 0 и в действительности являются разными ветвями одной многозначной функции. Однако эта функция однозначна на сфере, которая получается склеиванием полей X_I^i в $z = 0$ и $z = \infty$. Таким образом, чтобы построить $G_{MS}^{ij}(z, w)$, мы вводим следующее отображение этой сферы на первоначальную сферу:

$$z = \frac{t^{n_0}(t-t_0)^{N-n_0}}{(t-t_\infty)^{N-n_\infty}} \frac{(t_1-t_\infty)^{N-n_\infty}}{t_1^{n_0}(t_1-t_0)^{N-n_0}} \equiv u(t). \quad (35)$$

Здесь точки $t = 0$ и $t = t_0$ отображаются в точку $z = 0$; $t = \infty$, $t = t_\infty \rightarrow z = \infty$, $t = t_1 \rightarrow z = 1$ и $t = x \rightarrow z = u$ (рис. 2).

Отображение (35) может быть представлено как N -листное накрытие z -плоскости t -сферой, на которой эта функция Грина является однозначной. Более детальное обсуждение уравнения (35) представлено в приложении.

⁵⁾Мы рассматриваем эти корреляторы для общих значений D , имея в виду приложение к случаю суперструн.

Рис. 2. N -листное накрытие z -сферы t -сферой.

Благодаря проективным преобразованиям положения точек t_0, t_∞, t_1 зависят от x , удобно выбрать эту зависимость следующим образом:

$$\begin{aligned} t_0 &= x - 1, \\ t_\infty &= x - \frac{(N - n_\infty)x}{(N - n_0)x + n_0}, \\ t_1 &= \frac{N - n_0 - n_\infty}{n_\infty} + \frac{n_0 x}{n_\infty} - \frac{N(N - n_\infty)x}{n_\infty((N - n_0)x + n_0)}. \end{aligned}$$

Этот выбор приводит к следующему выражению для рациональной функции $u(x)$:

$$\begin{aligned} u = u(x) &= (n_0 - n_\infty)^{n_0 - n_\infty} \frac{n_\infty^{n_\infty}}{n_0^{n_0}} \left(\frac{N - n_0}{N - n_\infty} \right)^{N - n_\infty} \left(\frac{x + \frac{n_0}{N - n_0}}{x - 1} \right)^N \times \\ &\times \left(\frac{x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0}}{x} \right)^{N - n_0 - n_\infty} \left(x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty} \right)^{n_0 - n_\infty}. \end{aligned} \quad (36)$$

Поскольку $n_0 < n_\infty$, отображение $u(x)$ можно рассматривать как $2(N - n_0)$ -листное накрытие u -сферы x -сферой; это означает, что уравнение $u(x) = u$ имеет $2(N - n_0)$ различных решений. Важно отметить, что это число совпадает с числом нетривиальных корреляторов в (32) и, следовательно, разные корни уравнения (36) отвечают разным корреляторам (32). Мы видим, что t -сфера может быть представлена как объединение $2(N - n_0)$ областей и каждая область V_{IJKL} содержит точки x , отвечающие коррелятору (33). Если мы выберем на u -плоскости подходящую систему разрезов, то каждый корень уравнения (36) реализует взаимно однозначное конформное отображение разрезанной u -плоскости на соответствующую область V_{IJKL} .

Теперь выберем некоторый корень уравнения (36). Всегда можно разрезать z -сферу и занумеровать корни $t_R(z)$ уравнения (35) таким образом, чтобы они имели такие же

монодромии, как и поля X . Тогда очевидно, что функции Грина не равны нулю, только если $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$, и имеют вид

$$\begin{aligned}
G_{MS}^{ij}(z, w) = & -\delta^{ij} \frac{t'_M(z)t'_S(w)}{(t_M(z) - t_S(w))^2} - \frac{k_1^i k_1^j t'_M(z)t'_S(w)}{4t_M(z)t_S(w)} - \\
& - \frac{k_1^i k_2^j t'_M(z)t'_S(w)}{4t_M(z)(t_S(w) - t_0)} - \frac{k_2^i k_1^j t'_M(z)t'_S(w)}{4(t_M(z) - t_0)t_S(w)} - \\
& - \frac{k_2^i k_2^j t'_M(z)t'_S(w)}{4(t_M(z) - t_0)(t_S(w) - t_0)} - \frac{k_1^i k_4^j t'_M(z)t'_S(w)}{4t_M(z)(t_S(w) - t_\infty)} - \\
& - \frac{k_2^i k_4^j t'_M(z)t'_S(w)}{4(t_M(z) - t_0)(t_S(w) - t_\infty)} - \frac{k_4^i k_1^j t'_M(z)t'_S(w)}{4(t_M(z) - t_\infty)t_S(w)} - \\
& - \frac{k_4^i k_2^j t'_M(z)t'_S(w)}{4(t_M(z) - t_\infty)(t_S(w) - t_0)} - \frac{k_4^i k_4^j t'_M(z)t'_S(w)}{4(t_M(z) - t_\infty)(t_S(w) - t_\infty)}. \quad (37)
\end{aligned}$$

Можно с легкостью проверить, что эти функции имеют сингулярность $-\delta^{ij}\delta_{MS}/(z-w)^2$ в окрестности $z-w=0$ и надлежащие монодромии в точках $z=\infty, 1, u, 0$.

Напомним, что тензор энергии-импульса определяется как

$$T(z) = -\frac{1}{2} \lim_{w \rightarrow z} \sum_{i=1}^D \sum_{I=1}^N \left(\partial X_I^i(z) \partial X_I^i(w) + \frac{1}{(z-w)^2} \right).$$

Пользуясь этим определением и (37), получаем⁶⁾

$$\begin{aligned}
\langle\langle T(z) \rangle\rangle = & \sum_M \left(\frac{D}{12} \left(\left(\frac{t'_M(z)}{t'_M(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{t'_M(z)}{t'_M(z)} \right)^2 \right) + \frac{\mathbf{k}_1^2 (t'_M(z))^2}{8(t_M(z))^2} + \right. \\
& + \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 (t'_M(z))^2}{4t_M(z)(t_M(z) - t_0)} + \frac{\mathbf{k}_2^2 (t'_M(z))^2}{8(t_M(z) - t_0)^2} + \\
& + \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4 (t'_M(z))^2}{4t_M(z)(t_M(z) - t_\infty)} + \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_4 (t'_M(z))^2}{4(t_M(z) - t_0)(t_M(z) - t_\infty)} + \\
& \left. + \frac{\mathbf{k}_4^2 (t'_M(z))^2}{8(t_M(z) - t_\infty)^2} \right).
\end{aligned}$$

Член

$$\left(\frac{t''}{t'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{t''}{t'} \right)^2 = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2} \left(\frac{t''}{t'} \right)^2$$

⁶⁾Если все $\mathbf{k}_i = 0$, то среднее значение $T(z)$ в присутствии твистующих полей может быть эквивалентно найдено путем отображения тензора энергии-импульса на t -сфере с помощью $t_M(z)$ на z -сферу с последующим суммированием по M (см., например, [11]).

является производной Шварца, как можно было бы ожидать с самого начала. Чтобы получить дифференциальное уравнение на коррелятор (33), следует разложить $\langle\langle T(z) \rangle\rangle$ в окрестности $z = u$. Это разложение дается формулой

$$\begin{aligned} \langle\langle T(z) \rangle\rangle = & \frac{D}{16(z-u)^2} - \frac{D}{16(z-u)u} \left(1 + \frac{2a_2}{a_0^2} - \frac{3a_1^2}{2a_0^3} \right) + \\ & + \frac{1}{4a_0(z-u)u} \left(\frac{\mathbf{k}_1^2}{x^2} + \frac{\mathbf{k}_2^2}{(x-t_0)^2} + \frac{2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}{x(x-t_0)} + \frac{\mathbf{k}_4^2}{(x-t_\infty)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_4}{x(x-t_\infty)} + \frac{2\mathbf{k}_2\mathbf{k}_4}{(x-t_0)(x-t_\infty)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь коэффициенты a_k определяются следующим образом:

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k+2} \left(\frac{n_0}{x^{k+2}} + \frac{N-n_0}{(x-t_0)^{k+2}} - \frac{N-n_\infty}{(x-t_\infty)^{k+2}} \right).$$

Первый член показывает, что конформная размерность твистующего поля σ_{KL} равна $D/16$, как и должно быть, а остальные члены приводят к следующему дифференциальному уравнению на $G(u, \bar{u})$:

$$\begin{aligned} u\partial_u \log G(u, \bar{u}) = & -\frac{D}{16} \left(1 + \frac{2a_2}{a_0^2} - \frac{3a_1^2}{2a_0^3} \right) + \\ & + \frac{1}{4a_0} \left(\frac{\mathbf{k}_1^2}{x^2} + \frac{\mathbf{k}_2^2}{(x-t_0)^2} + \frac{2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}{x(x-t_0)} + \frac{\mathbf{k}_4^2}{(x-t_\infty)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_4}{x(x-t_\infty)} + \frac{2\mathbf{k}_2\mathbf{k}_4}{(x-t_0)(x-t_\infty)} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Полезно сделать замену переменных $u \rightarrow u(x)$. Затем, сделав простые, но утомительные вычисления, набросок которых приведен в приложении, получаем следующее дифференциальное уравнение на $G(u, \bar{u})$:

$$\begin{aligned} \partial_x \log G(u(x), \bar{u}(\bar{x})) = & -\frac{D}{16} \frac{d}{dx} \log u + \frac{d_0}{x} + \frac{d_1}{x-1} + \frac{d_2}{x + \frac{n_0}{N-n_0}} + \\ & + \frac{d_3}{x - \frac{N-n_0-n_\infty}{N-n_0}} + \frac{d_4}{x - \frac{n_0}{n_0-n_\infty}} - \\ & - \frac{D}{24} \left(\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

здесь

$$\alpha_i = \frac{n_0}{n_0 - n_\infty} + (-1)^i \sqrt{\frac{n_0 n_\infty (N - n_\infty)}{(n_0 - n_\infty)^2 (N - n_0)}}$$

являются корнями уравнения $x^2 a_0 = 0$, а коэффициенты d_i даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{D}{24} + \frac{n_0}{8(N-n_\infty)} \left(\mathbf{k}_4^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{N-n_\infty}{8n_0} \left(\mathbf{k}_1^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{1}{4} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4, \\ d_1 &= \frac{D}{24} - \frac{n_\infty}{8(N-n_\infty)} \left(\mathbf{k}_4^2 - \frac{D}{3} \right) - \frac{N-n_\infty}{8n_\infty} \left(\mathbf{k}_3^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{1}{4} \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4, \\ d_2 &= \frac{D}{24} - \frac{n_0}{8(N-n_0)} \left(\mathbf{k}_2^2 - \frac{D}{3} \right) - \frac{N-n_0}{8n_0} \left(\mathbf{k}_1^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{1}{4} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2, \\ d_3 &= \frac{D}{24} + \frac{n_\infty}{8(N-n_0)} \left(\mathbf{k}_2^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{N-n_0}{8n_\infty} \left(\mathbf{k}_3^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{1}{4} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3, \\ d_4 &= \frac{D}{24} + \frac{n_0}{8n_\infty} \left(\mathbf{k}_3^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{n_\infty}{8n_0} \left(\mathbf{k}_1^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{1}{4} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (41)$$

Принимая во внимание, что второе уравнение на $G(u, \bar{u})$ имеет такую же форму с очевидной заменой $u \rightarrow \bar{u}$, $x \rightarrow \bar{x}$, получаем решение уравнения (40):

$$\begin{aligned} G(u, \bar{u}) &= C(g_0, g_\infty) \delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \times \\ &\quad \times |u|^{-\frac{D}{8}} |x - \alpha_1|^{-\frac{D}{12}} |x - \alpha_2|^{-\frac{D}{12}} |x|^{2d_0} |x - 1|^{2d_1} \times \\ &\quad \times \left| x + \frac{n_0}{N - n_0} \right|^{2d_2} \left| x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0} \right|^{2d_3} \left| x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty} \right|^{2d_4}. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь $x = x(u)$ является тем корнем уравнения $u = u(x)$, который отвечает данным значениям индексов I, J, K, L , а $C(g_0, g_\infty)$ – нормировочная константа, которая не зависит от $u, \bar{u}$.

Чтобы определить эту константу, рассмотрим вспомогательный коррелятор

$$G_0(u, \bar{u}) = \langle \sigma_{g_0^{-1}}[-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2](\infty) \sigma_{IJ}(1, 1) \sigma_{IJ}(u, \bar{u}) \sigma_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](0, 0) \rangle, \quad (43)$$

где $I = 1, \dots, n_0$, $J = n_0 + 1, \dots, N$.

Отметим, что, используя действие C_{g_0} , можно зафиксировать $I = n_0$, $J = N$. Этот коррелятор отвечает случаю $n_\infty = n_0$, для которого рациональная функция $u(x)$ равна

$$u(x) = \left(1 + \frac{2n_0 - N}{N - n_0} \frac{1}{x} \right)^{N-2n_0} \left(\frac{1 + \frac{n_0}{N-n_0} \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right)^N. \quad (44)$$

Корень уравнения (44), отвечающий коррелятору (43), имеет разложение

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4n_0} (u - 1) + o(u - 1) \quad \text{при } u \rightarrow 1. \quad (45)$$

Следующее выражение для коррелятора $G_0(u, \bar{u})$ может быть выведено из (42) в пределе $n_\infty \rightarrow n_0$:

$$\begin{aligned} G_0(u, \bar{u}) &= C(g_0) R^D |u|^{-\frac{D}{8}} \left| x - \frac{N - 2n_0}{2(N - n_0)} \right|^{-\frac{D}{12}} \times \\ &\quad \times |x|^{2d_0} |x - 1|^{2d_1} \left| x + \frac{n_0}{N - n_0} \right|^{2d_2} \left| x - \frac{N - 2n_0}{N - n_0} \right|^{2d_3}, \end{aligned} \quad (46)$$

где коэффициенты d_i даются уравнениями (41) с очевидной заменой $n_\infty \rightarrow n_0$, $\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_2$.

Принимая во внимание разложение операторного произведения

$$\sigma_{IJ}(1, 1)\sigma_{IJ}(u, \bar{u}) = \frac{R^{-D}}{|u-1|^{\frac{D}{4}}} + \dots$$

и нормировку (16) двухточечных корреляционных функций, получаем

$$G_0(u, \bar{u}) \rightarrow \frac{R^D}{|u-1|^{\frac{D}{4}}}. \quad (47)$$

С другой стороны, используя (45) и (46), выводим в пределе $u \rightarrow 1$

$$G_0(u, \bar{u}) \rightarrow C(g_0)R^D \left(\frac{1}{4n_0}|u-1| \right)^{-2(d_0+d_1+d_2+d_3-\frac{D}{24})} = \frac{R^D}{|u-1|^{\frac{D}{4}}} C(g_0)(4n_0)^{\frac{D}{4}}. \quad (48)$$

Сравнивая (47) и (48), находим нормировочную константу

$$C(g_0) = (4n_0)^{-\frac{D}{4}}. \quad (49)$$

Теперь рассмотрим предел $u \rightarrow 0$. Используя разложение операторного произведения

$$\begin{aligned} \sigma_{n_0 N}(u, \bar{u})\sigma_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2](0) &= \frac{C_{n_0 N, g_0}^{g_{n_0 N} g_0}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{|u|^{\frac{D}{8}+2\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]-2\Delta_{g_{n_0 N} g_0}[\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2]}} \sigma_{g_{n_0 N} g_0}[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2](0) + \\ &+ \frac{C_{n_0 N, g_0}^{g_0 g_{n_0 N}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{|u|^{\frac{D}{8}+2\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]-2\Delta_{g_{n_0 N} g_0}[\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2]}} \sigma_{g_0 g_{n_0 N}}[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2](0) + \dots, \end{aligned} \quad (50)$$

получаем

$$\begin{aligned} G_0(u, \bar{u}) &\rightarrow \frac{C_{n_0 N, g_0}^{g_{n_0 N} g_0}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{|u|^{\frac{D}{8}+2\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]-2\Delta_{g_{n_0 N} g_0}[\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2]}} \times \\ &\times \langle \sigma_{g_0^{-1}}[-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2](\infty) \sigma_{n_0 N}(1) \sigma_{g_{n_0 N} g_0}[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2](0) \rangle + \\ &+ \frac{C_{n_0 N, g_0}^{g_0 g_{n_0 N}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)}{|u|^{\frac{D}{8}+2\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2]-2\Delta_{g_{n_0 N} g_0}[\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2]}} \times \\ &\times \langle \sigma_{g_0^{-1}}[-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2](\infty) \sigma_{n_0 N}(1) \sigma_{g_0 g_{n_0 N}}[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2](0) \rangle. \end{aligned} \quad (51)$$

Нетрудно показать, что корреляторы $\langle \sigma_{g_0^{-1}} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_{n_0 N} g_0} \rangle$ и $\langle \sigma_{g_0^{-1}} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_0 g_{n_0 N}} \rangle$ равны $C_{n_0 N, g_0}^{g_0 g_{n_0 N}}$ и $C_{n_0 N, g_0}^{g_{n_0 N} g_0}$, соответственно, и более того равны друг другу. Это следует из (25) и (30) и из очевидного свойства симметрии структурной константы $C_{n_0 N, g_0}^{g_{n_0 N} g_0}(-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2) = C_{n_0 N, g_0}^{g_{n_0 N} g_0}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{g_0^{-1}} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_{n_0 N} g_0} \rangle &= \langle \sigma_{g_{n_0 N} g_0} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_0^{-1}} \rangle = \\ &= \begin{cases} \langle \sigma_{g_{n_0 N} g_0^{-1}} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_0} \rangle = R^D C_{n_0 N, g_0}^{g_0 g_{n_0 N}}, \\ \langle \sigma_{g_0^{-1} g_{n_0 N}} \sigma_{n_0 N} \sigma_{g_0} \rangle = R^D C_{n_0 N, g_0}^{g_{n_0 N} g_0}. \end{cases} \end{aligned} \quad (52)$$

Таким образом, коррелятор $G_0(u, \bar{u})$ в пределе $u \rightarrow 0$ выражается через структурную константу

$$C(n_0, \mathbf{k}_1; N - n_0, \mathbf{k}_2) \equiv C_{n_0 N, g_0}^{g_{n_0 N} g_0}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$$

следующим образом:

$$G_0(u, \bar{u}) \rightarrow \frac{2R^D C^2(n_0, \mathbf{k}_1; N - n_0, \mathbf{k}_2)}{|u|^{\frac{D}{8} + 2\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2] - 2\Delta_{g_{n_0 N} g_0}[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2]}}. \quad (53)$$

С другой стороны, принимая во внимание, что в пределе $u \rightarrow 0$ корень $x(u)$ ведет себя как

$$\left| x + \frac{n_0}{N - n_0} \right| \rightarrow N n_0^{\frac{N - 2n_0}{N}} (N - n_0)^{\frac{2n_0 - 2N}{N}} |u|^{\frac{1}{N}},$$

получаем из (46)

$$G_0(u, \bar{u}) \rightarrow \frac{2^{\frac{D}{12}} R^D C(g_0)}{|u|^{\frac{D}{8} - \frac{2}{N} d_2}} N^{-\frac{D}{12} + 4d_2} (N - n_0)^{-\frac{D}{12} + 4\frac{n_0 - N}{N} d_2} n_0^{\frac{D}{6} - 4\frac{n_0}{N} d_2}. \quad (54)$$

Сравнивая (53) и (54), получаем следующее выражение для структурной константы:

$$C(n_0, \mathbf{k}_1; N - n_0, \mathbf{k}_2) = 2^{-\frac{5D+12}{24}} N^{-\frac{D}{24} + 2d_2} (N - n_0)^{-\frac{D}{24} - 2\frac{N - n_0}{N} d_2} n_0^{-\frac{D}{24} - 2\frac{n_0}{N} d_2}, \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} d_2 &\equiv d_2(n_0, \mathbf{k}_1; N - n_0, \mathbf{k}_2) = \\ &= \frac{D}{24} - \frac{n_0}{8(N - n_0)} \left(\mathbf{k}_2^2 - \frac{D}{3} \right) - \frac{N - n_0}{8n_0} \left(\mathbf{k}_1^2 - \frac{D}{3} \right) + \frac{1}{4} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2. \end{aligned} \quad (56)$$

Теперь нетрудно выразить любой трехточечный коррелятор вида $\langle \sigma_{g^{-1}g_{IJ}} \sigma_{IJ} \sigma_g \rangle$ через структурную константу $C(n, \mathbf{k}; m, \mathbf{q})$. Прежде всего заметим, что любое твистующее поле $\sigma_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}]$ имеет следующее разложение в тензорное произведение твистующих полей $\sigma_{(n)}[\mathbf{k}]$:

$$\sigma_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}] = \bigotimes_{\alpha=1}^{N_{\text{str}}} \sigma_{(n_\alpha)}[\mathbf{k}_\alpha], \quad (57)$$

где элемент g имеет разложение $(n_1)(n_2) \cdots (n_{N_{\text{str}}})^7$. С помощью (52) получаем структурную константу $C(n, \mathbf{k}; m, \mathbf{q})$ с произвольными n и m :

$$C(n, \mathbf{k}; m, \mathbf{q}) = R^{-D} \langle \sigma_{(-n-m)}[-\mathbf{k} - \mathbf{q}](\infty) \sigma_{IJ}(1) \sigma_{(n)}[\mathbf{k}] \otimes \sigma_{(m)}[\mathbf{q}](0) \rangle, \quad (58)$$

где $I \in (n)$ и $J \in (m)$.

⁷⁾Мы будем использовать обозначение $(-n_1)(-n_2) \cdots (-n_{N_{\text{str}}})$ для разложения элемента g^{-1} .

Используя (57) и (58), мы можем с легкостью получить следующее выражение для трехточечного коррелятора:

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{g^{-1}g_{IJ}}[\{\mathbf{q}_\alpha\}](\infty) \sigma_{IJ}(1) \sigma_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}](0) \rangle &= \langle \sigma_g[\{\mathbf{k}_\alpha\}](\infty) \sigma_{IJ}(1) \sigma_{g^{-1}g_{IJ}}[\{\mathbf{q}_\alpha\}](0) \rangle = \\
&= \langle \sigma_{(-n_1-n_2)}[\mathbf{q}] \bigotimes_{\alpha=3}^{N_{\text{str}}} \sigma_{(-n_\alpha)}[\mathbf{q}_\alpha](\infty) \sigma_{IJ}(1) \sigma_{(n_1)}[\mathbf{k}_1] \otimes \sigma_{(n_2)}[\mathbf{k}_2] \bigotimes_{\alpha=3}^{N_{\text{str}}} \sigma_{(n_\alpha)}[\mathbf{k}_\alpha](0) \rangle = \\
&= \prod_{\alpha=3}^{N_{\text{str}}} \delta_R^D(\mathbf{q}_\alpha + \mathbf{k}_\alpha) \langle \sigma_{(-n_1-n_2)}[\mathbf{q}](\infty) \sigma_{IJ}(1) \sigma_{(n_1)}[\mathbf{k}_1] \otimes \sigma_{(n_2)}[\mathbf{k}_2](0) \rangle = \\
&= C(n_1, \mathbf{k}_1; n_2, \mathbf{k}_2) \delta_R^D(\mathbf{q} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \prod_{\alpha=3}^{N_{\text{str}}} \delta_R^D(\mathbf{q}_\alpha + \mathbf{k}_\alpha), \tag{59}
\end{aligned}$$

где $I \in (n_1)$ и $J \in (n_2)$.

Теперь ясно, что структурная константа $C_{IJ,g}^{g_{IJ}g}$ в разложении операторного произведения полей σ_{IJ} и σ_g просто равна $C(n_1, \mathbf{k}_1; n_2, \mathbf{k}_2)$ и что структурная константа $C_{IJ,g^{-1}g_{IJ}}^{g^{-1}}$ (которая совпадает с $C_{IJ,g^{-1}g_{IJ}}^{g_{IJ}g^{-1}g_{IJ}}$ в соответствии с (52)) в разложении операторного произведения

$$\begin{aligned}
\sigma_{IJ}(u, \bar{u}) \sigma_{g^{-1}g_{IJ}}[\{\mathbf{q}_\alpha\}](0) &= \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \frac{\delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}, 0}}{|u|^{\frac{D}{8} + 2\Delta_{g^{-1}g_{IJ}}[\{\mathbf{q}_\alpha\}] - 2\Delta_g[\{\mathbf{q}_\alpha\}]}} \times \\
&\times (C_{IJ,g^{-1}g_{IJ}}^{g^{-1}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \sigma_{g^{-1}}[\{\mathbf{q}_\alpha\}](0) + \\
&+ C_{IJ,g^{-1}g_{IJ}}^{g^{-1}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \sigma_{g_{IJ}g^{-1}g_{IJ}}[\{\mathbf{q}_\alpha\}](0)) + \dots \tag{60}
\end{aligned}$$

равна

$$C_{IJ,g^{-1}g_{IJ}}^{g^{-1}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = R^{-D} C(n_1, \mathbf{q}_1; n_2, \mathbf{q}_2).$$

В частности, структурные константы $C_{n_\infty N, g_0}^{g_{n_\infty} N g_0}$ и $C_{n_0 + n_\infty, N; g_0}^{g_{n_0 + n_\infty} N g_0}$, которые будут использованы, чтобы найти нормировочную константу $C(g_0, g_\infty)$, даются формулами

$$\begin{aligned}
C_{n_\infty N, g_0}^{g_{n_\infty} N g_0}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= R^{-D} C(n_\infty - n_0, \mathbf{k}_1; N - n_\infty, \mathbf{k}_2), \\
C_{n_0 + n_\infty, N; g_0}^{g_{n_0 + n_\infty} N g_0}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= R^{-D} C(N - n_\infty - n_0, \mathbf{k}_1; n_\infty, \mathbf{k}_2). \tag{61}
\end{aligned}$$

Теперь мы готовы определить нормировочную константу $C(g_0, g_\infty)$, факторизуя $G(u, \bar{u})$ в пределе $u \rightarrow 0$ на трехточечные функции. В соответствии с (36) $u \rightarrow 0$ в следующих трех случаях:

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow -\frac{n_0}{N - n_0}, \\
x &\rightarrow \infty, \\
x &\rightarrow \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0},
\end{aligned}$$

и, наоборот, любой корень $x_M = x_M(u)$ уравнения (36) стремится к одному из этих значений, когда $u \rightarrow 0$. Очевидно, что эти три возможные асимптотики отвечают трем различным выборам индексов K и L в (32).

Начнем со случая $K = n_0$, $L = N$. Используя разложение операторного произведения (50) и нормировку (16) двухточечных корреляторов, получаем в пределе $u \rightarrow 0$

$$G(u, \bar{u}) \rightarrow \delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \frac{C(n_0, \mathbf{k}_1; N - n_0, \mathbf{k}_2) C(n_\infty, \mathbf{k}_3; N - n_\infty, \mathbf{k}_4)}{|u|^{\frac{D}{8} + 2\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2] - 2\Delta_{g_{n_0 N g_0}}[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2]}}. \quad (62)$$

В этом случае корень $x(u)$ имеет следующее поведение в окрестности $u = 0$:

$$\left| x + \frac{n_0}{N - n_0} \right| \rightarrow N n_0^{\frac{N - n_0}{N}} n_\infty^{-\frac{n_\infty}{N}} (N - n_0)^{\frac{n_0 - 2N}{N}} (N - n_\infty)^{\frac{n_\infty}{N}} |u|^{\frac{1}{N}}. \quad (63)$$

Используя (42) и (63), можно с легкостью найти

$$\begin{aligned} G(u, \bar{u}) &\rightarrow \delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \frac{C(g_0, g_\infty)}{|u|^{\frac{D}{8} - \frac{2}{N} d_2}} \left(\frac{n_0 N (N - n_\infty)}{(N - n_0)^2 (n_0 - n_\infty)} \right)^{-\frac{D}{12}} \times \\ &\times \left(\frac{n_0}{N - n_0} \right)^{2d_0} \left(\frac{N}{N - n_0} \right)^{2d_1} \left(\frac{n_0 (N - n_\infty)}{(N - n_0)(n_0 - n_\infty)} \right)^{2d_4} \left(\frac{N - n_\infty}{N - n_0} \right)^{2d_3} \times \\ &\times \left(N n_0^{\frac{N - n_0}{N}} n_\infty^{-\frac{n_\infty}{N}} (N - n_0)^{\frac{n_0 - 2N}{N}} (N - n_\infty)^{\frac{n_\infty}{N}} \right)^{2d_2}. \end{aligned} \quad (64)$$

Нетрудно проверить, что

$$\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2] - \Delta_{g_{n_0 N g_0}}[\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2] = -\frac{1}{N} d_2,$$

как и следовало ожидать. Сравнивая (62) и (64), можно получить нормировочную константу. Однако для общих значений D соответствующее выражение выглядит довольно сложно и не будет приведено. Для $D = 24$ следует принять во внимание, что коэффициенты d_i даются такими простыми формулами:

$$\begin{aligned} d_0 &= 1 + \frac{1}{4} k_1 k_4, & d_1 &= 1 + \frac{1}{4} k_3 k_4, & d_2 &= 1 + \frac{1}{4} k_1 k_2, \\ d_3 &= 1 + \frac{1}{4} k_2 k_3, & d_4 &= 1 + \frac{1}{4} k_1 k_3, \end{aligned} \quad (65)$$

где $k_i k_j \equiv \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j - (1/2) k_i^+ k_j^- - (1/2) k_i^- k_j^+$.

Используя (65), легко получить

$$C(g_0, g_\infty) = \frac{2^{-11}}{n_0 (N - n_0) n_\infty (N - n_\infty) (n_\infty - n_0)^2} \left(\frac{N - n_0}{n_\infty - n_0} \right)^{2 + \frac{1}{2} (k_1 + k_3) k_4}. \quad (66)$$

Таким образом, мы нашли нормировочную константу для N корреляторов, которые присутствуют в первом и втором членах (32).

Теперь определим нормировочную константу для $n_\infty - n_0$ корреляторов вида $\langle \sigma_{g_\infty(J)} \sigma_{n_0 J} \sigma_{n_\infty N} \sigma_{g_0} \rangle$. Используя (60) и (61), находим в пределе $u \rightarrow 0$

$$G(u, \bar{u}) \rightarrow \delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \times \\ \times \frac{C(n_\infty - n_0, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4; N - n_\infty, -\mathbf{k}_4) C(n_\infty - n_0, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4; n_0, \mathbf{k}_1)}{|u|^{\frac{D}{8} + 2\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2] - 2\Delta_{g_{n_\infty N g_0}}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_4]}}. \quad (67)$$

Принимая во внимание поведение корня $x(u)$ в окрестности $u = 0$:

$$|x| \rightarrow \left((n_\infty - n_0)^{n_0 - n_\infty} \frac{n_\infty^{n_\infty}}{n_0^{n_0}} \left(\frac{N - n_0}{N - n_\infty} \right)^{N - n_\infty} \right)^{\frac{1}{n_\infty - n_0}} |u|^{\frac{1}{n_0 - n_\infty}},$$

получаем из (42)

$$G(u, \bar{u}) \rightarrow \frac{\delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) C(g_0, g_\infty)}{|u|^{\frac{D}{8} + \frac{2(d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - \frac{D}{12})}{n_\infty - n_0}}} \times \\ \times \left((n_\infty - n_0)^{n_0 - n_\infty} \frac{n_\infty^{n_\infty}}{n_0^{n_0}} \left(\frac{N - n_0}{N - n_\infty} \right)^{N - n_\infty} \right)^{\frac{2(d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - \frac{D}{12})}{n_\infty - n_0}}. \quad (68)$$

Простое вычисление показывает, что

$$\Delta_{g_0}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2] - \Delta_{g_{n_\infty N g_0}}[\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4, \mathbf{k}_4] = \frac{d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - \frac{D}{12}}{n_\infty - n_0}.$$

Нормировочная константа $C(g_0, g_\infty)$ может быть теперь найдена из (67) и (68). Для $D = 24$ вычисление значительно упрощается, если заметить, что

$$d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 - 2 = -1 - \frac{1}{4} k_1 k_3, \\ d_2(n_\infty - n_0, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4; N - n_\infty, -\mathbf{k}_4) = -\frac{N - n_0}{n_\infty - n_0} \left(1 + \frac{1}{4} k_1 k_3 \right), \\ d_2(n_\infty - n_0, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_4; n_0, \mathbf{k}_1) = -\frac{n_\infty}{n_\infty - n_0} \left(1 + \frac{1}{4} k_1 k_3 \right).$$

Затем можно с легкостью показать, что $C(g_0, g_\infty)$ снова дается уравнением (66).

Нормировочная константа для оставшихся $N - n_0 - n_\infty$ корреляторов вида $\langle \sigma_{g_\infty(J)} \times \sigma_{n_0 J} \sigma_{n_0 + n_\infty, N} \sigma_{g_0} \rangle$ может быть найдена тем же способом и опять определяется с помощью (66).

До сих пор мы рассматривали корреляторы

$$G_{IJKL}(u, \bar{u}) = \langle \sigma_{g_\infty}(\infty) \sigma_{IJ}(1) \sigma_{KL}(u, \bar{u}) \sigma_{g_0}(0) \rangle$$

с $|u| < 1$. Корреляторы $G_{IJKL}(u, \bar{u})$ с $|u| > 1$ могут быть вычислены тем же способом, и их зависимость от u также определяется уравнением (42). Нормировочную константу

в этом случае можно вывести, анализируя предел $u \rightarrow \infty$, она совпадает с ранее найденной константой (66). Упорядочение по времени, следовательно, может быть опущено, и, чтобы завершить вычисление S -матричного элемента, мы должны проинтегрировать коррелятор $F(u, \bar{u})$, даваемый формулой (24), по комплексной плоскости. С помощью закона сохранения импульса, условия массовой поверхности и (65) уравнение (42) переписывается в следующей форме:

$$G_{IJKL}(u, \bar{u}) = \delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) C(g_0, g_\infty) (n_\infty - n_0)^2 \times \\ \times \left| \frac{du}{dx} \right|^{-2} |u|^{-1} \frac{|x - \alpha_1|^2 |x - \alpha_2|^2}{\left| x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty} \right|^4} \times \\ \times \left| \frac{x(x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0})}{x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}} \right|^{\frac{1}{2} k_1 k_4} \left| \frac{(x - 1)(x + \frac{n_0}{N - n_0})}{x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}} \right|^{\frac{1}{2} k_3 k_4},$$

где было использовано равенство

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{(n_0 - n_\infty)(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2}{x(x - 1) \left(x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0} \right) \left(x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty} \right) \left(x + \frac{n_0}{N - n_0} \right)}.$$

Теперь интеграл $\int d^2 u |u| G_{IJKL}(u, \bar{u})$ может быть с легкостью вычислен путем замены переменных $u \rightarrow x$:

$$\int d^2 u |u| G_{IJKL}(u, \bar{u}) = \delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) C(g_0, g_\infty) (n_\infty - n_0)^2 \times \\ \times \int_{V_{IJKL}} d^2 x \frac{|x - \alpha_1|^2 |x - \alpha_2|^2}{\left| x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty} \right|^4} \times \\ \times \left| \frac{x(x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0})}{x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}} \right|^{\frac{1}{2} k_1 k_4} \left| \frac{(x - 1)(x + \frac{n_0}{N - n_0})}{x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}} \right|^{\frac{1}{2} k_3 k_4}, \quad (69)$$

где мы приняли во внимание, что при этой замене переменных u -сфера отображается на область V_{IJKL} .

Поскольку коррелятор $F(u, \bar{u})$ равен сумме

$$F(u, \bar{u}) = \frac{C_0 C_\infty}{N!} 2n_0(N - n_0)n_\infty(N - n_\infty) \sum_{IJKL} G_{IJKL}(u, \bar{u}),$$

где суммирование идет по набору индексов, перечисленных в (32), имеем

$$\int d^2 u |u| F(u, \bar{u}) = \frac{2^{-10} \delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)}{\sqrt{n_0(N - n_0)n_\infty(N - n_\infty)}} \left(\frac{N - n_0}{n_\infty - n_0} \right)^{2 + \frac{1}{2}(k_1 + k_3)k_4} \times \\ \times \int d^2 x \frac{|x - \alpha_1|^2 |x - \alpha_2|^2}{\left| x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty} \right|^4} \times \\ \times \left| \frac{x(x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0})}{x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}} \right|^{\frac{1}{2} k_1 k_4} \left| \frac{(x - 1)(x + \frac{n_0}{N - n_0})}{x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}} \right|^{\frac{1}{2} k_3 k_4}. \quad (70)$$

Наконец, делая замену переменных

$$\frac{n_\infty - n_0}{N - n_0} z = \frac{x(x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0})}{x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}},$$

получаем следующее выражение для этого интеграла:

$$\int d^2 u |u| F(u, \bar{u}) = \frac{2^{-9} \delta_R^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)}{\sqrt{n_0(N - n_0)n_\infty(N - n_\infty)}} \int d^2 z |z|^{\frac{1}{2}k_1 k_4} |1 - z|^{\frac{1}{2}k_3 k_4}. \quad (71)$$

S -матричный элемент мы можем найти, используя (23) и беря предел $R \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \langle f|S|i \rangle &= -i \frac{\lambda^2 2^{-8} N^3 \delta(k_1^- + k_2^- + k_3^- + k_4^-) \delta^D(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)}{\sqrt{n_0(N - n_0)n_\infty(N - n_\infty)}} \times \\ &\quad \times \int d^2 z |z|^{\frac{1}{2}k_1 k_4} |1 - z|^{\frac{1}{2}k_3 k_4} = \\ &= -i \frac{\lambda^2 2^{-8} N \delta(\sum_i k_i^-) \delta^D(\sum_i \mathbf{k}_i)}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_3^+ k_4^+}} \int d^2 z |z|^{\frac{1}{2}k_1 k_4} |1 - z|^{\frac{1}{2}k_3 k_4}. \end{aligned} \quad (72)$$

Теперь представим импульсы светового конуса k_i^+ в виде $k_i^+ = m_i/N$ и перепишем (72) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \langle f|S|i \rangle &= -i \frac{\lambda^2 2^{-8} N \delta_{m_1+m_2+m_3+m_4,0}(\sum_i k_i^-) \delta^D(\sum_i \mathbf{k}_i)}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_3^+ k_4^+}} \times \\ &\quad \times \int d^2 z |z|^{\frac{1}{2}k_1 k_4} |1 - z|^{\frac{1}{2}k_3 k_4}. \end{aligned} \quad (73)$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ комбинация $N \delta_{m_1+m_2+m_3+m_4,0}$ стремится к $\delta(\sum_i k_i^+)$ и (73) принимает вид

$$\langle f|S|i \rangle = -i \frac{\lambda^2 2^{-9} \delta^{D+2}(\sum_i k_i^\mu)}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_3^+ k_4^+}} \int d^2 z |z|^{\frac{1}{2}k_1 k_4} |1 - z|^{\frac{1}{2}k_3 k_4}. \quad (74)$$

Принимая во внимание, что амплитуда рассеяния A связана с S -матрицей следующим образом (см., например, [12]):

$$\langle f|S|i \rangle = -i \frac{\delta^{D+2}(\sum_i k_i^\mu)}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_3^+ k_4^+}} A(1, 2, 3, 4),$$

окончательно получаем

$$A(1, 2, 3, 4) = \lambda^2 2^{-9} \int d^2 z |z|^{\frac{1}{2}k_1 k_4} |1 - z|^{\frac{1}{2}k_3 k_4},$$

т.е. хорошо известную амплитуду Вирасоро.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы развили технику для вычисления амплитуд рассеяния состояний бозонной струны, используя взаимодействующую $S^N \mathbf{R}^{24}$ -орбифолдную сигма-модель. Оказалось, что амплитуда рассеяния является автоматически лоренц-инвариантной. Это веское свидетельство того, что соответствующая двумерная модель Янга–Миллса должна иметь ту же инвариантность.

Было бы интересно проследить появление петлевых амплитуд в рамках $S^N \mathbf{R}^{24}$ -орбифолдной сигма-модели. Очевидно, что однопетлевая амплитуда требует вычисления коррелятора четырех Z_2 -твистующих полей, расположенных между асимптотическими состояниями; это технически приводит к построению некоммутативных функций Грина в присутствии шести твистующих полей. Мы отметим, что сокращение возможных расходимостей в амплитуде может потребовать дальнейшего возмущения действия КТП контактными членами высшего порядка.

Следующая важная проблема, которую следует решить, – рассмотреть $S^N \mathbf{R}^8$ -суперсимметричную орбифолдную сигма-модель и доказать гипотезу ДВВ. Нетрудно ввести твистующие поля для фермионных переменных и вычислить их конформные размерности. Однако вычисление четырехточечных корреляторов твистующих полей является более сложной проблемой и сейчас рассматривается. Не исключено, что простейший способ решить эту проблему – бозонизовать фермионные поля.

Авторы благодарят И. Я. Арефьеву, Л. О. Чехова, П. Б. Медведева и Н. А. Славнова за ценные обсуждения. Один из авторов (С.Ф.) признателен профессору Ю. Вессу за сердечное гостеприимство и Фонду Александра фон Гумбольта за поддержку. Эта работа была частично поддержана грантами РФФИ N96-01-00608, N96-01-00551 и грантом МФС а96-1516.

Приложение

В этом приложении мы рассматриваем некоторые свойства отображения (35) и приводим набросок вывода дифференциального уравнения (40) для четырехточечных корреляторов (33).

Рассмотрим отображение (35):

$$z = \frac{t^{n_0} (t - t_0)^{N-n_0}}{(t - t_\infty)^{N-n_\infty}} \frac{(t_1 - t_\infty)^{N-n_\infty}}{t_1^{n_0} (t_1 - t_0)^{N-n_0}} \equiv u(t). \quad (\text{П.1})$$

Это отображение является N -листным накрытием z -сферы t -сферой. Очевидно, что оно ветвится в точках $t = 0, t_0, t_\infty$ и ∞ . Чтобы найти другие точки ветвления, мы должны решить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d \log z}{dt} &= \frac{n_0}{t} + \frac{N - n_0}{t - t_0} - \frac{N - n_\infty}{t - t_\infty} = \\ &= \frac{n_\infty t^2 + ((N - n_0 - n_\infty)t_0 - N t_\infty)t + n_0 t_0 t_\infty}{t(t - t_0)(t - t_\infty)}. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

В общем случае существуют два разных решения t_1 и t_2 этого уравнения и отображение (П.1) имеет следующий вид в окрестности этих точек:

$$z - z_i \sim (t - t_i)^2, \quad z_1 = 1 = u(t_1), \quad z_2 = u = u(t_2).$$

Благодаря проективным преобразованиям мы можем наложить три соотношения на положения точек ветвления. Однако мы уже выбрали точки 0 и ∞ в качестве двух точек ветвления, следовательно, остается наложить только одно соотношение. Поскольку дифференциальное уравнение на четырехточечный коррелятор написано по отношению к точке u , удобно не фиксировать положение точки $t_2 \equiv x$. Тогда оставшееся соотношение, которое приводит к рациональной зависимости точек t_0, t_∞ и t_1 от x , выглядит следующим образом:

$$t_0 = x - 1. \quad (\text{П.3})$$

Предполагается, что точка x является решением уравнения (П.2). Следовательно, можно немедленно вывести из (П.2) и (П.3), что t_∞ выражается через точку x :

$$t_\infty = x - \frac{(N - n_\infty)x}{(N - n_0)x + n_0}. \quad (\text{П.4})$$

Второе решение уравнения (П.2) может быть теперь с легкостью найдено:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{N - n_0 - n_\infty}{n_\infty} + \frac{n_0 x}{n_\infty} - \frac{N(N - n_\infty)x}{n_\infty((N - n_0)x + n_0)} = \\ &= \frac{n_0(x - 1)((N - n_0)x + n_0 + n_\infty - N)}{n_\infty((N - n_0)x + n_0)}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Рациональная функция $u(x)$ определяется следующим уравнением:

$$u(x) = \frac{x^{n_0}(x - t_0)^{N - n_0}(t_1 - t_\infty)^{N - n_\infty}}{(x - t_\infty)^{N - n_\infty}t_1^{n_0}(t_1 - t_0)^{N - n_0}}. \quad (\text{П.6})$$

Используя (П.3)–(П.5), можно вывести соотношения

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \frac{(N - n_0)(x - 1)((n_0 - n_\infty)x - n_0)}{n_\infty((N - n_0)x + n_0)}, \\ t_1 - t_\infty &= \frac{((n_0 - n_\infty)x - n_0)((N - n_0)x + n_0 + n_\infty - N)}{n_\infty((N - n_0)x + n_0)}. \end{aligned}$$

Затем находим, что рациональная функция $u(x)$ равна

$$\begin{aligned} u = u(x) &= (n_0 - n_\infty)^{n_0 - n_\infty} \frac{n_\infty^{n_0}}{n_0^{n_0}} \left(\frac{N - n_0}{N - n_\infty} \right)^{N - n_\infty} \left(\frac{x + \frac{n_0}{N - n_0}}{x - 1} \right)^N \times \\ &\times \left(\frac{x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0}}{x} \right)^{N - n_0 - n_\infty} \left(x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty} \right)^{n_0 - n_\infty}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение (40), нам нужно знать разложение корней $t_K(z)$ и $t_L(z)$ в окрестности $z = u$. Логарифмируя обе стороны (П.1), получаем

$$\log \frac{z}{u} = n_0 \log \frac{t}{x} + (N - n_0) \log \frac{t - t_0}{x - t_0} - (N - n_\infty) \log \frac{t - t_\infty}{x - t_\infty}. \quad (\text{П.8})$$

Разложение левой стороны (П.8) в окрестности $z = u$, а правой стороны (П.8) в окрестности $t = x$ дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{z - u}{u} \right)^k = (t - x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - x)^k, \quad (\text{П.9})$$

где

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k+2} \left(\frac{n_0}{x^{k+2}} + \frac{N - n_0}{(x - t_0)^{k+2}} - \frac{N - n_\infty}{(x - t_\infty)^{k+2}} \right). \quad (\text{П.10})$$

Из (П.9) следует, что $t(z)$ имеет следующее разложение:

$$t - x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - u)^{\frac{k}{2}}. \quad (\text{П.11})$$

Подставляя (П.11) в (П.9), находим

$$\begin{aligned} c_1^2 &= \frac{1}{ua_0}, & c_2 &= -\frac{a_1}{2ua_0}, \\ 2a_0c_1c_3 &= -\frac{1}{2u^2} + \frac{5a_1^2}{4u^2a_0^3} - \frac{a_2}{u^2a_0^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Следующие коэффициенты для нас не важны.

Затем, используя разложение (П.11) и уравнение (П.12), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{t''}{t'} \right)' &= \frac{1}{2(z - u)^2} + O(1), \\ \left(\frac{t''}{t'} \right)^2 &= \frac{1}{4(z - u)^2} + \frac{3}{z - u} \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1} \right) + O(1), \\ \frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_3}{c_1} &= \frac{1}{4u} \left(1 + \frac{2a_2}{a_0^2} - \frac{3a_1^2}{2a_0^3} \right). \end{aligned}$$

Наконец, принимая во внимание, что только два корня $t_K(z)$ и $t_L(z)$ из N корней $t_M(z)$ имеют разложение (П.11), мы получаем (38) и (39).

Коэффициенты a_k могут быть переписаны как следующие функции x :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{n_0(n_0 + n_\infty - N)}{2(N - n_\infty)x^2} + \frac{n_0(N - n_0)}{(N - n_\infty)x} + \frac{(N - n_0)(n_\infty - n_0)}{2(N - n_\infty)} = \\
&= \frac{(N - n_0)(n_\infty - n_0)}{2(N - n_\infty)x^2} (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \\
a_1 &= \frac{n_0((N - n_\infty)^2 - n_0^2)}{3(N - n_\infty)^2 x^3} - \frac{n_0^2(N - n_0)}{(N - n_\infty)^2 x^2} - \\
&\quad - \frac{n_0(N - n_0)^2}{(N - n_\infty)^2 x} + \frac{(N - n_0)((N - n_\infty)^2 - (N - n_0)^2)}{3(N - n_\infty)^2}, \\
a_2 &= -\frac{n_0((N - n_\infty)^3 - n_0^3)}{4(N - n_\infty)^3 x^4} + \frac{n_0^3(N - n_0)}{(N - n_\infty)^3 x^3} + \frac{3n_0^2(N - n_0)^2}{2(N - n_\infty)^3 x^2} + \\
&\quad + \frac{n_0(N - n_0)^3}{(N - n_\infty)^3 x} - \frac{(N - n_0)((N - n_\infty)^3 - (N - n_0)^3)}{4(N - n_\infty)^3}. \tag{П.13}
\end{aligned}$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение (40), мы должны использовать следующие важные равенства на $d \log u/dx$, которые могут быть выведены с помощью (П.7) и (П.13):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= \frac{n_0 + n_\infty - N}{x} - \frac{N}{x - 1} + \frac{N}{x + \frac{n_0}{N - n_0}} + \\
&\quad + \frac{N - n_0 - n_\infty}{x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0}} + \frac{n_0 - n_\infty}{x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}}, \\
\frac{1}{u} \frac{du}{dx} &= \frac{4(N - n_\infty)^2 x^4 d_0^2}{(N - n_0)^2 (n_0 - n_\infty) x (x - 1) (x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0}) (x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty}) (x + \frac{n_0}{N - n_0})} = \\
&= \frac{(n_0 - n_\infty)(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2}{x(x - 1)(x - \frac{N - n_0 - n_\infty}{N - n_0})(x - \frac{n_0}{n_0 - n_\infty})(x + \frac{n_0}{N - n_0})}.
\end{aligned}$$

Наконец, чтобы получить (40), следует использовать интерполяционную формулу Лагранжа для отношения двух полиномов

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_i \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \frac{1}{x - x_i},$$

где x_i являются простыми корнями $Q(x)$ и $\deg P < \deg Q$.

Эти равенства значительно упрощают вывод уравнения (40).

Список литературы

- [1] *T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, L. Susskind.* M Theory as a Matrix Model: A Conjecture, hep-th/9610043.
- [2] *W. Taylor.* D-brane Field Theory on Compact Spaces, hep-th/9611042.
- [3] *L. Motl.* Proposals on Nonperturbative Superstring Interactions, hep-th/9701025.
- [4] *T. Banks, N. Seiberg.* Strings from Matrices, hep-th/9702187.
- [5] *R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde.* Matrix String Theory, hep-th/9703030.
- [6] *R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde, H. Verlinde.* Elliptic Genera of Symmetric Products and Second Quantized Strings, hep-th/9608096.
- [7] *S.-J. Rey.* Heterotic M(atr ix) strings and Their Interactions, hep-th/9704158.
- [8] *L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 261. P. 678.
- [9] *L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 274. P. 285.
- [10] *A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333.
- [11] *L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker.* Nucl. Phys. B. 1987. V. 282. P. 13.
- [12] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990.

Поступила в редакцию 11.IX.1997 г.