Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Мурадян, А. Е. Сантана, Структура Хопфа в n -алгебрах Ли–Нambu, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 1, 87–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:08:26

© 1998 г.

Р. Мурадян*, А. Е. Сантана†

СТРУКТУРА ХОПФА В n -АЛГЕБРАХ ЛИ–НАМБУ

Мы определяем и исследуем структуры Хопфа третичных (и n -арных) алгебр Ли–Нambu. Вводятся фундаментальные понятия 3-коалгебры, 3-биалгебры и 3-алгебры Хопфа. Структуры Хопфа анализируются на некоторых примерах.

В работе [1] Намбу предложил обобщение классической гамильтоновой механики, использующее третичные скобки и скобки высших порядков (n -арные скобки, или мульти-скобки). За прошедшие с той поры двадцать лет предложенная Намбу теория исследовалась в целом ряде работ [2–12], и постоянный интерес к этой теме был прежде всего обязан богатству физического содержания и математической красоте, содержащейся в третичных алгебраических системах и системах высших порядков. В последнее время подобная алгебраическая структура была проанализирована и сформулирована Тахтаджяном [7–9] в инвариантной геометрической форме. Он предложил понятие “гебры” Ли–Нambu, которое обобщает алгебры Ли на случай третичных (и общих n -арных) структур. Третичная алгебра, или “гебра”, является линейным пространством, в котором выполнены условия антисимметрии и обобщенного тождества Якоби.

В данной работе мы исследуем некоторые новые стороны гипотезы Намбу, связанные с концепцией алгебры Хопфа. Мы вводим третичные (и n -арные) структуры Хопфа, обобщающие понятие стандартной алгебры Хопфа, и рассматриваем некоторые примеры указанной конструкции.

Начнем с определения третичной (ассоциативной) алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Третичная алгебра с единицей* над коммутативным кольцом $\mathcal{C}$ – это векторное пространство A с заданным законом умножения для трех элементов $a, b, c \in A$,

$$m: A \otimes A \otimes A = A^{\otimes 3} \rightarrow A \quad \text{таких, что} \quad m(a \otimes b \otimes c) = abc. \quad (1)$$

Для единичного элемента алгебры A получим

$$m(1 \otimes 1 \otimes a) = m(1 \otimes a \otimes 1) = m(a \otimes 1 \otimes 1) = a, \quad (2)$$

*Институт физики Федерального университета Бахии, Бразилия. E-mail: muradian@ufba.br

†Институт физики Федерального университета Бахии, Бразилия. E-mail: ademir@ufba.br

в то время как 3-ассоциативность означает, что

$$(abc)de = a(bcd)e = ab(cde). \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. 3-ассоциатор имеет вид

$$I^{(3)} = 2(abc)de - a(bcd)e - ab(cde). \quad (4)$$

Рассмотрим примеры ассоциативных и неассоциативных 3-алгебр.

ПРИМЕР 1 (ассоциативная 3-алгебра). Пусть $A = \{a, b, c, \dots; m\}$ — множество линейных операторов на гильбертовом пространстве таких, что m — обычное ассоциативное произведение, тогда $I^{(3)} = 0$.

ПРИМЕР 2 (неассоциативная 3-алгебра). Пусть $A = \{a, b, c, \dots; m\}$ — множество аналитических функций на $\mathcal{R}^3$ таких, что

$$m(a \otimes b \otimes c)(\mathbf{x}) = \frac{\partial a(\mathbf{x})}{\partial x_1} \frac{\partial b(\mathbf{x})}{\partial x_2} \frac{\partial c(\mathbf{x})}{\partial x_3},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, тогда $I^{(3)} \neq 0$. Действительно, обозначив

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

мы получим следующее ненулевое значение для 3-ассоциатора:

$$\begin{aligned} I^{(3)} = & 2(\partial_1 a \partial_{12} b + \partial_{11} a \partial_2 b) \partial_3 c \partial_2 d \partial_3 e + \partial_1 a \partial_2 b \partial_{13} c \partial_2 d \partial_3 e - \\ & - \partial_1 a \partial_2 b \partial_{1c} \partial_{23} d \partial_3 e - \partial_1 a \partial_1 b \partial_2 c \partial_{23} d \partial_3 e - \\ & - \partial_1 a \partial_{12} b \partial_2 c \partial_3 d \partial_3 e - \partial_1 a \partial_1 b \partial_{22} c \partial_3 d \partial_3 e - \\ & - \partial_1 a \partial_2 b \partial_{1c} \partial_2 d \partial_{33} e. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Единичное отображение задается (как обычно) следующим образом:

$$I: \mathbf{C} \rightarrow A, \quad i(\lambda) = \lambda 1, \quad 1 \in A.$$

В представлении коммутативных диаграмм ассоциативность третичной алгебры A выражается так:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \iota \otimes i} & A \otimes A \otimes A \\ \simeq \downarrow & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{\text{id}} & A \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \otimes A \otimes \mathbf{C} & \xrightarrow{\iota \otimes \text{id} \otimes i} & A \otimes A \otimes A \\ \simeq \downarrow & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{\text{id}} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \otimes A & \xrightarrow{i \otimes i \otimes \text{id}} & A \otimes A \otimes A \\ \simeq \downarrow & & \downarrow m \\ A & \xrightarrow{\text{id}} & A \end{array}.$$

С другой стороны, ассоциативность умножения означает, что

$$m(m \otimes \text{id} \otimes \text{id}) = m(\text{id} \otimes m \otimes \text{id}) = m(\text{id} \otimes \text{id} \otimes m).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Произведение Намбу* (3-коммутатор) имеет вид $\pi = \pi^+ - \pi^-$, где

$$\begin{aligned} \pi^+ : A^{\otimes 3} &\rightarrow A^{\otimes 3}, \\ \pi^+(a, b, c) &= a \otimes b \otimes c + b \otimes c \otimes a + c \otimes a \otimes b, \\ \pi^- : A^{\otimes 3} &\rightarrow A^{\otimes 3}, \\ \pi^-(a, b, c) &= c \otimes b \otimes a + a \otimes c \otimes b + b \otimes a \otimes c, \end{aligned} \tag{5}$$

а π^+ (π^-) — суммы по всем членам с четной (нечетной) перестановкой a, b и $c \in A$.

При таком определении произведения Намбу концепция абелевой алгебры (абелевой 3-алгебры) обобщается с помощью коммутативной диаграммы, описывающей свойство 3-коммутативности:

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes 3} & \xrightarrow{\pi^+} & A^{\otimes 3} \\ \pi^- \downarrow & & \downarrow m \\ A^{\otimes 3} & \xrightarrow{m} & A \end{array}.$$

Отметим, что определения 1–4 непосредственно обобщаются на n -арный случай. Например, в частном случае $n = 2$ мы получим

$$\begin{aligned} m \circ \pi^+(a \otimes b) &= ab, \\ m \circ \pi^-(a \otimes b) &= ba. \end{aligned}$$

В такой (бинарной) ситуации π^+ играет роль тождественного отображения (id), а π^- отвечает операции переворота (τ).

ПРИМЕР 3 (абелева 3-алгебра). Рассмотрим набор функций из примера 2 таких, что

$$m(a \otimes b \otimes c)(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})b(\mathbf{x})c(\mathbf{x}).$$

В этом случае 3-коммутатор $\pi = 0$.

ПРИМЕР 4 (некоммутативная 3-алгебра). Зададим A , как в примере 1. Тогда можно ввести третичные скобки Намбу $[\cdot, \cdot, \cdot] = m \circ \pi$ с помощью линейного оператора

$$[a, b, c] = abc + bca + cab - cba - acb - bac,$$

удовлетворяющего следующим свойствам:

перестановочный закон –

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[a, c, b] = -[c, b, a] = -[b, a, c], \quad (6)$$

закон производной –

$$[a, b, cd] = c[a, b, d] + [a, b, c]d, \quad (7)$$

обобщенное тождество Якоби –

$$[g, h[a, b, c]] = [[g, h, a], b, c] + [a, [g, h, b], c] + [a, b, [g, h, c]]. \quad (8)$$

Такое обобщенное тождество Якоби исследовалось в работах [3, 6, 7, 10] с различных точек зрения, в работе [7] оно именовалось фундаментальным тождеством.

ПРИМЕР 5 (коммутативная 3-алгебра). Зададим алгебру A в соответствии с примером 2 (в этом случае m – неассоциативное произведение). Тогда можно ввести скобку Намбу $\{\cdot, \cdot, \cdot\} = m \circ \pi$ для $\{a, b, c\} = \varepsilon^{ijk} \partial_i a \partial_j b \partial_k c$. Базисом для такой (классической) скобки Намбу служит тройка векторов x_1, x_2, x_3 таких, что $\{x_1, x_2, x_3\} = 1$.

С помощью определения 3-алгебры, заданной в терминах коммутативных диаграмм, мы исследуем структуру дуальной коалгебры и обобщаем понятие алгебры Хопфа [13, 14]. Для этого мы начнем с понятия коалгебры – 3-копроизведения, задаваемого обращением всех стрелок в определении 3-ассоциативной алгебры. В итоге мы получим такие 3-копроизведение Δ и 3-коединицу ϵ :

$$\begin{aligned} \Delta: A &\rightarrow A^{\otimes 3}, \\ \epsilon: A &\rightarrow \mathbf{C}, \end{aligned}$$

при которых следующие диаграммы будут коммутативными:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} & \xleftarrow{\text{id} \otimes \epsilon \otimes \epsilon} & A^{\otimes 3} & \quad & \mathbf{C} \otimes A \otimes \mathbf{C} & \xleftarrow{\epsilon \otimes \text{id} \otimes \epsilon} & A^{\otimes 3} \\ \simeq \uparrow & & \uparrow \Delta & , & \simeq \uparrow & & \uparrow \Delta \\ A & \xleftarrow{\text{id}} & A & & A & \xleftarrow{\text{id}} & A \\ & & \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \otimes A & \xleftarrow{\epsilon \otimes \epsilon \otimes \text{id}} & A^{\otimes 3} & & \\ & & \simeq \uparrow & & \uparrow \Delta & & \\ & & A & \xleftarrow{\text{id}} & A & & \end{array}$$

3-коассоциативность означает, что

$$(\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)\Delta,$$

а 3-кокоммутативность выражается посредством следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes 3} & \xleftarrow{+} & A^{\otimes 3} \\ \pi^- \uparrow & & \uparrow \Delta \\ A^{\otimes 3} & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array}.$$

Понятия 3-алгебры и 3-коалгебры помогают обобщить понятие биалгебры (т.е. построить 3-биалгебру). Чтобы задать 3-алгебру Хопфа, нужно обобщить понятие антипода. Естественным образом 3-антипод S определяется следующими отображениями:

$$m \circ (S \otimes \text{id} \otimes \text{id}) \circ \Delta = i \circ \epsilon, \quad (9)$$

$$m \circ (\text{id} \otimes S \otimes \text{id}) \circ \Delta = i \circ \epsilon, \quad (10)$$

$$m \circ (\text{id} \otimes \text{id} \otimes S) \circ \Delta = i \circ \epsilon. \quad (11)$$

В 4-биалгебрах 4-антипод имеет вид

$$m \circ (S \otimes \text{id} \otimes S \otimes \text{id}) \circ \Delta = i \circ \epsilon, \quad (12)$$

$$m \circ (\text{id} \otimes S \otimes S \otimes \text{id}) \circ \Delta = i \circ \epsilon, \quad (13)$$

$$m \circ (S \otimes \text{id} \otimes \text{id} \otimes S) \circ \Delta = i \circ \epsilon, \quad (14)$$

$$m \circ (\text{id} \otimes S \otimes \text{id} \otimes S) \circ \Delta = i \circ \epsilon. \quad (15)$$

Заметим, что все эти соотношения должны выполняться одновременно.

ПРИМЕР 6 (3-биалгебра из алгебры Ли–Намбу). Выберем A , как в примере 4. Тогда 3-биалгебра получается, если 3-копроизведение вводится следующим образом:

$$\Delta a = a \otimes a \otimes a \equiv a^{\otimes 3}.$$

В самом деле, в этом случае Δ удовлетворяет соотношениям алгебры, т.к.

$$[\Delta a, \Delta b, \Delta c] = \Delta[a, b, c].$$

Заметим, что если попытаться ввести 3-произведение по формуле

$$\Delta a = a \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a, \quad (16)$$

то алгебраическая структура не восстановится, поскольку $\Delta[a, b, c] \neq [\Delta a, \Delta b, \Delta c]$. Это замечание показывает, что мы можем построить структуру биалгебры, ассоциированной с некоторой (если таковая существует) универсальной обертывающей 3-алгеброй алгебры Ли–Намбу, однако задача построения 3-алгебры Хопфа в этом случае нетривиальна.

ПРИМЕР 7 ($SL(n, \mathbf{C})$). Рассмотрим группу $G = SL(n, \mathbf{C})$, где элемент $x = (a_j^i) \in G$ обладает единичным детерминантом, $\det x = 1$. Хорошо известно, что алгебра, порожденная функциями $a_j^i(x)$ с 2-копроизведением

$$\Delta a_j^i = \sum_k a_k^i \otimes a_j^k,$$

представляет собой алгебру Хопфа (см., например, [14]) с коединицей

$$\epsilon(a_j^i) = \delta_j^i \quad (17)$$

и антиподом, задаваемым обратной матрицей

$$S(a_j^i) = (a^{-1})^i_j. \quad (18)$$

Мы исследуем обобщения этой алгебры Хопфа на примере двух случаев – 3- и 4-алгебр. В первом случае 3-копроизведение Δ задается формулами

$$\Delta a_j^i(x, y, z) = a_j^i(x, y, z) = \sum_{k,l} a_k^i(x) a_l^k(y) a_j^l(z) = \sum_{k,l} a_k^i \otimes a_l^k \otimes a_j^l(x, y, z) \quad (19)$$

или

$$\Delta a_j^i = \sum_{k,l} a_k^i \otimes a_l^k \otimes a_j^l. \quad (20)$$

Тем самым 3-биалгебра может быть выведена, если использовать коединицу из уравнения (17). Тогда нетрудно показать, что обычный антипод (формула (18)) не может быть использован для определения подходящего 3-антипода, удовлетворяющего уравнениям (9)–(11).

Тем не менее в случае 4-произведения, если определить

$$\Delta a_j^i = \sum_{k,l,m} a_k^i \otimes a_l^k \otimes a_m^l \otimes a_j^m,$$

то с учетом уравнений (12)–(15), где S задается уравнением (18), мы получим 4-алгебру Хопфа.

Таким образом, мы построили обобщение понятий ассоциативной и коммутативной алгебр. Используя понятие дуальности и следуя в параллель с обычным (бинарным) подходом, мы ввели понятие n -биалгебры и привели примеры: биалгебру, выведенную из алгебры Ли–Намбу, и другую биалгебру, ассоциированную с группой $SL(n, \mathbf{C})$. Мы определили также понятия 3- и 4-антиподов с целью обобщить понятие алгебры Хопфа. В качестве примера была выведена 4-алгебра Хопфа, ассоциированная с группой $SL(n, \mathbf{C})$. Было бы интересно исследовать связь 3-алгебры Хопфа с универсальной обертывающей алгеброй некоммутативной 3-алгебры. Эти вопросы заслуживают дальнейшего исследования.

Мы благодарны А. Матос Нето и Дж. Давиду М. Вианна за ценные обсуждения. Один из авторов (А. Е. С.) благодарен CNPq (Бразильскому агентству научных исследований) за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] *Y. Nambu.* Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 2405–2412.
- [2] *F. Bayen, M. Flato,* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 3049–3052.
- [3] *G. J. Ruggeri.* Lett. Nuovo Cim. 1976. V. 17. P. 169–171.
- [4] *F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerovitz, D. Sternheimer.* Ann. Phys. 1978. V. 110. P. 67–110, 111–151.
- [5] *G. Dito, M. Flato, D. Sternheimer, L. Takhtajan.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 183. P. 1–22.
- [6] *G. Dito, M. Flato.* Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 107–125.
- [7] *L. A. Takhtajan.* Commun. Math. Phys. 1994. V. 160. P. 295–315.
- [8] *Л. А. Тахтаджян.* Алгебра и анализ. 1995. Т. 6. С. 429–438.
- [9] *R. Chatterjee, L. Takhtajan.* Lett. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 475–482.
- [10] *H. Q. Plácido, R. Bunchaft, A. E. Santana.* Hadronic J. 1992. V. 15. P. 225–238.
- [11] *D. Sahoo, M. C. Valsakumar.* Mod. Phys. Lett. 1994. V. 9. P. 2727–2732.
- [12] *P. Gautheron.* Lett. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 103–116.
- [13] *A. E. Santana, T. Kopf, F. C. Khanna.* Hopf algebras, Lie symmetries and thermal field theories. In: Proceedings of Lake Louise International Conference on High Energy Physics. Canada, 1997 (in press).
- [14] *J. Madore.* Introduction to Noncommutative Geometry and its Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

Поступила в редакцию 23.VII.1997 г.