Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, Об основном состоянии свободного и случайного дискретных гамильтонианов, возмущенных оператором ранга один, при критическом значении константы связи, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 1, 94–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 03:24:03

© 1998 г.

С. В. Савченко*

ОБ ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ СВОБОДНОГО
И СЛУЧАЙНОГО ДИСКРЕТНЫХ
ГАМИЛЬТониАнов, ВОЗМУЩЕННЫХ
ОПЕРАТОРОМ РАНГА ОДИН,
ПРИ КРИТИЧЕСКОМ
ЗНАЧЕНИИ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ

Понятие критической константы связи для дискретного свободного гамильтониана, возмущенного диагональным оператором ранга один, было введено А. Г. Голицыной и С. А. Молчановым. В настоящей работе определяется индивидуальная критическая константа связи для возмущения случайного гамильтониана в модели Андерсона. Исследуются свойства локализуемости основного состояния при критическом значении константы связи для обоих гамильтонианов. Показано, что в первом случае ответ существенно зависит от размерности пространства, а во втором – универсален.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно (см., например, [1]), что дифференциальный оператор $\Delta + \epsilon V(x)$, где Δ – лапласиан, $V(x)$ – оператор умножения на бесконечно дифференцируемую неотрицательную функцию с компактным носителем, ϵ – константа связи, в размерностях $d \geq 3$ не имеет дискретного спектра при достаточно малом ϵ , в то время как в размерностях $d = 1, 2$ изолированное положительное собственное значение существует для любого $\epsilon > 0$. Для дискретного оператора $H_d - 2dE + \epsilon P_0$, где H_d – разностный оператор Лапласа, E – тождественный оператор, P_0 – диагональный оператор ранга один, это утверждение было впервые сформулировано в [2] (доказательство дано в [3]). Определим критическую константу связи $\epsilon(d)$ как точную нижнюю грань всех $\epsilon > 0$, при которых максимальная точка спектра оператора $H_d + \epsilon P_0$ является изолированным собственным значением (в работе [2] она обозначена через a_0). При $\epsilon > \epsilon(d)$ соответствующий этому изолированному собственному значению единственный собственный вектор с положительными координатами (основное состояние) является экспоненциально локализованным. Что можно сказать о локализуемости основного состояния оператора $H_d + \epsilon P_0$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская область, Россия. E-mail: savch@icp.ac.ru

при $\epsilon = \epsilon(d)$? Оказывается, ответ не универсален и существенно зависит от размерности пространства d . При $d = 1, 2$ ситуация тривиальна: $\epsilon(d) = 0$ и основное состояние – вектор, все координаты которого равны положительной константе. При $d \geq 3$ справедливо неравенство $\epsilon(d) > 0$ и основное состояние стремится к нулю на бесконечности, оно принадлежит пространству $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ тогда и только тогда, когда $d \geq 5$. В любой размерности основное состояние не содержится в пространстве $\ell_1(\mathbb{Z}^d)$ и, следовательно, не является экспоненциально локализованным.

Индивидуальную критическую константу связи $\epsilon(\omega)$ можно определить и для возмущения оператора $H_d + \mathbf{V}(\omega)$, где $\mathbf{V}(\omega)$ – диагональная матрица, элементы которой являются независимыми случайными величинами, одинаково распределенными на отрезке $[0, b]$ (модель Андерсона). Естественно, интересно сравнить свойства локализуемости основного состояния при критической константе связи для возмущенного гамильтониана в модели Андерсона и возмущенного свободного гамильтониана H_d (или, что то же самое, для $H_d + bE$). В работе показано, что независимо от размерности пространства d индивидуальная критическая константа связи положительна и соответствующее основное состояние экспоненциально локализовано. Таким образом, свойства локализуемости основного состояния для возмущенного случайного оператора Шредингера не зависят от размерности пространства и, следовательно, отличны от аналогичных свойств возмущенного свободного гамильтониана. Однако мы не случайно рассматриваем их вместе: при доказательстве утверждения об экспоненциальной локализуемости основного состояния для возмущенной модели Андерсона существенно используется тот факт, что единственное решение уравнения $(H_d + bE + \epsilon(d)P_0)\psi = (2d + b)\psi$ равномерно ограничено. Он позволяет показать равномерную ограниченность почти на верное решения $\psi(\omega)$ уравнения $(H_d + \mathbf{V}(\omega) + \epsilon(\omega)P_0)\psi = (2d + b)\psi$. В дальнейшем остается только сослаться на известный результат Саймона и Вольфа [4] о том, что почти на верное полиномиальная ограниченность решения последнего уравнения влечет за собой экспоненциальное убывание его на бесконечности.

Как правило, результаты, установленные для возмущенного случайного гамильтониана, позволяют получить полезную информацию и для невозмущенного случая. Например, наличие только точечной компоненты в спектре возмущенного оператора $H_d + \mathbf{V}(\omega) + \epsilon P_0$ при почти всех ω для почти каждого ϵ влечет за собой аналогичное свойство спектра почти на верное для невозмущенного гамильтониана $H_d + \mathbf{V}(\omega)$. Не стала исключением из этого правила и наша работа: в ней получены результаты о конечности некоторых сумм, позволяющие в какой-то степени судить о плотности собственных значений около крайней точки спектра в модели Андерсона с большим беспорядком (см. замечания 1 и 2).

Обычно дискретные уравнения Шредингера исследуются при помощи преобразования Фурье. Мы будем использовать в основном метод производящих функций и спектральную теорию самосопряженных операторов (формула, полученная в [3] преобразованием Фурье, будет применена только для доказательства того факта, что основное состояние $\psi(d)$ не принадлежит пространству $\ell_1(\mathbb{Z}^d)$). Все необходимые определения и тождества собраны в следующем разделе.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛЫ

Пусть $A = (a_{\mathbf{n}\mathbf{m}})$ – конечная или бесконечная матрица с неотрицательными элементами $a_{\mathbf{n}\mathbf{m}}$, где $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. Положим

$$b_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, k) = \sum_{\mathbf{n}_0=\mathbf{n}, \mathbf{n}_k=\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}_0\mathbf{n}_1} \cdots a_{\mathbf{n}_{i-1}\mathbf{n}_i} \cdots a_{\mathbf{n}_{k-1}\mathbf{n}_k},$$

$$a_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, k) = \sum_{\mathbf{n}_0=\mathbf{n}, \mathbf{n}_k=\mathbf{n}; \mathbf{n}_i \neq \mathbf{n} \text{ при } i \neq 0, k} a_{\mathbf{n}_0\mathbf{n}_1} \cdots a_{\mathbf{n}_{i-1}\mathbf{n}_i} \cdots a_{\mathbf{n}_{k-1}\mathbf{n}_k}.$$

При $k = 1$ будем считать, что $b_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, k) = a_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, k) = a_{\mathbf{n}\mathbf{n}}$. Введем производящие функции

$$\Phi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, k) z^k,$$

$$\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, k) z^k.$$

Пусть $R_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$ и $r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$ – радиусы сходимости соответственно рядов $\Phi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z)$ и $\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z)$. Очевидно, что $a_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, k) \leq b_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, k)$ и, следовательно, $R_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A) \leq r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только те матрицы A , для которых $R_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A) > 0$. По теореме Вейерштрасса суммы рядов $\Phi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z)$ и $\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z)$ (они будут обозначаться теми же символами) являются аналитическими функциями соответственно в $|z| < R_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$ и $|z| < r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$.

ЛЕММА 1 [5]. В круге $|z| < R_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$ имеет место тождество

$$\Phi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z) = \varphi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z) (1 - \varphi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z))^{-1}. \quad (1)$$

СЛЕДСТВИЕ 1 [5]. Точка $z = R_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$ – единственное решение уравнения $\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z) = 1$ на интервале $(0, r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A))$, если $\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)) > 1$, и $R_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A) = r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$ в противном случае.

Каждой матрице A сопоставим ориентированный граф $G(A)$, множество вершин которого совпадает с $\mathbb{Z}^d$, а множество ребер определяется по следующему правилу: из $\mathbf{n}$ идет ребро в $\mathbf{m}$ тогда и только тогда, когда $a_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \neq 0$. Если граф $G(A)$ связан, то матрица A называется неразложимой. Пусть L – множество всех неразложимых матриц с неотрицательными элементами. Если $A \in L$, то величина $R_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$ не зависит от $\mathbf{n}$ [5]. Поэтому в дальнейшем мы будем обозначать ее через $R(A)$. Пусть $r(A) = \sup_{\mathbf{n}} r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$. Можно показать, что для любого $\epsilon > 0$ существует лишь конечное число таких $\mathbf{n}$, для которых $r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A) > R(A) + \epsilon$. Поэтому число $\mathbf{n}$ с $r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A) = r(A)$ конечно и единственной предельной точкой последовательности величин $r_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A)$ является точка $z = R(A)$ (см. [6]).

Симметрическая матрица $A \in L$ определяет ограниченный самосопряженный оператор на пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ тогда и только тогда, когда $R(A) > 0$. В этом случае $\|A\| = \rho(A) = R(A)^{-1}$, где $\|A\|$ и $\rho(A)$ – соответственно норма и спектральный радиус оператора A . Пусть L_{sym} – множество всех симметрических матриц A из класса L , удовлетворяющих условию $R(A) > 0$ (множество соответствующих ограниченных самосопряженных операторов обозначим тем же символом).

ЛЕММА 2 [7]. Пусть $E(\cdot)$ – разложение единицы для оператора $A \in L_{\text{sym}}$ и $e_{\mathbf{n}}$ – вектор, $\mathbf{n}$ -я координата которого равна единице, а остальные – нулю. Тогда

$$1 + \Phi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, z) = \int_{\text{Spec}(A)} (1 - \lambda z)^{-1} (E(d\lambda)e_{\mathbf{n}}, e_{\mathbf{n}}), \quad (2)$$

где $\text{Spec}(A)$ – спектр оператора A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [8]. Для оператора $A \in L_{\text{sym}}$ точка $z = \rho(A)$ является собственным значением спектра тогда и только тогда, когда $\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, R(A)) = 1$ и $\varphi'_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(A, R(A)) < \infty$ при некотором, а следовательно, и при любом $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ (в дальнейшем мы будем опускать эту фразу после подобного рода выражений).

3. КРИТИЧЕСКАЯ КОНСТАНТА СВЯЗИ

Пусть H_d – дискретный свободный гамильтониан (разностный симметризованный оператор Лапласа), действующий на векторы $\psi = \{\psi_{\mathbf{n}}\}$, где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, по следующей формуле:

$$H_d \psi_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}': \|\mathbf{n}' - \mathbf{n}\| = 1} \psi_{\mathbf{n}'},$$

где $\|\mathbf{n}\| = \sum_{k=1}^d |n_k|$.

Граф $G(H_d)$ соответствует симметрическому блужданию на квадратной решетке $\mathbb{Z}^d$. Поэтому он связан. Спектр оператора H_d абсолютно непрерывен и совпадает с отрезком $[-2d, 2d]$. При $d = 1$ функция $\varphi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, z)$ равна $2\varphi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d^+, z)$, где H_d^+ – оператор Лапласа на полуоси $\mathbb{Z}^+$ с граничным условием $\psi_{-1} = 0$. Функция $\varphi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d^+, z)$ находится из очевидного тождества $\varphi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d^+, z) = z^2(1 + \Phi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d^+, z))$. Таким образом, $\Phi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, z) = 1/\sqrt{1 - 4z^2}$, и, следовательно, при $d = 1$ имеем

$$(E_d(d\lambda)e_{\mathbf{0}}, e_{\mathbf{0}}) = \frac{1}{\pi\sqrt{4 - \lambda^2}} \chi_{[-2, 2]}(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где E_d – разложение единицы для оператора H_d , $\chi_{[-2, 2]}(\lambda)$ – характеристическая функция интервала $[-2, 2]$. Так как d -мерная квадратная решетка $\mathbb{Z}^d$ получается из одномерной квадратной решетки $\mathbb{Z}$ при помощи d -кратного декартова произведения, то мера $(E_d(d\lambda)e_{\mathbf{0}}, e_{\mathbf{0}})$ является d -кратной сверткой меры (3) (см. [7]). При помощи преобразования Фурье можно получить представление функции $\Phi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, z)$ в виде интеграла, зависящего от параметра z ,

$$\Phi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, z) = \frac{1}{\pi^d} \int_0^d \dots \int_0^d \frac{1}{1 - 2z(\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_d)} d\alpha_1 \dots d\alpha_d. \quad (4)$$

Используя тождество (4) и представление спектральной меры как d -кратной свертки меры (3), можно исследовать аналитическое поведение функции $\Phi_{\mathbf{00}}(H_d, z)$ вблизи ее особенности $z = R(H_d) = 1/2d$.

ЛЕММА 3 [9]. Для любого $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ справедливо тождество

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{nn}}(H_d, z) &= g_d(z)(1 - 2dz)^{(d-2)/2} + h_d(z), & d \text{ нечетное,} \\ \Phi_{\mathbf{nn}}(H_d, z) &= g_d(z)(1 - 2dz)^{(d-2)/2} \log(1 - 2dz) + h_d(z), & d \text{ четное,}\end{aligned}$$

где g_d и h_d – аналитические функции в окрестности точки $z = 1/2d$ с $g_d(1/2d) \neq 0$.

В дальнейшем нам понадобится только знание равномерной ограниченности функции $\Phi_{\mathbf{00}}(H_d, z)$ и ее производной в окрестности точки $z = 1/2d$ (сходимости соответствующих рядов в точке $z = 1/2d$).

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ имеем:

- 1) $\Phi_{\mathbf{nn}}(H_d, 1/2d) = \infty$ при $d = 1, 2$;
- 2) $\Phi_{\mathbf{nn}}(H_d, 1/2d) < \infty$, $\Phi'_{\mathbf{nn}}(H_d, 1/2d) = \infty$ при $d = 3, 4$;
- 3) $\Phi_{\mathbf{nn}}(H_d, 1/2d) < \infty$, $\Phi'_{\mathbf{nn}}(H_d, 1/2d) < \infty$ при $d \geq 5$.

Следующая теорема была доказана в работе [3]. Мы приведем здесь свое доказательство, на наш взгляд, более простое и полное. Оно будет необходимо при доказательстве положительности индивидуальной критической константы связи в возмущенной модели Андерсона.

Обозначим через $L_{\text{i.e.v.}}$ класс операторов A из L_{sym} , для которых точка $z = \rho(A)$ является изолированным собственным значением. Пусть $P_{\mathbf{0}} = (\cdot, e_{\mathbf{0}})e_{\mathbf{0}}$ – диагональный оператор ранга один. По теореме Вейля о существенном спектре (см. [1]) оператор $H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}}$ принадлежит классу $L_{\text{i.e.v.}}$ тогда и только тогда, когда $\rho(H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}}) > 2d$.

ТЕОРЕМА 1 (о критической константе связи для возмущенного свободного гамильтониана).

1. Если $d = 1, 2$, то $H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}} \in L_{\text{i.e.v.}}$ для любого $\epsilon > 0$.
2. Если $d \geq 3$, то существует такое $\epsilon(d) > 0$, которое в дальнейшем будет называться критической константой связи, что

$$\begin{aligned}H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}} &\notin L_{\text{i.e.v.}} & \text{при} & \quad \epsilon \leq \epsilon(d), \\ H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}} &\in L_{\text{i.e.v.}} & \text{при} & \quad \epsilon > \epsilon(d).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого ϵ справедлива следующая формула:

$$\varphi_{\mathbf{00}}(H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}}, z) = \epsilon z + \varphi_{\mathbf{00}}(H_d, z). \quad (5)$$

В силу следствия 2 (пункт 1) и леммы 1 при $d = 1, 2$ имеем $\varphi_{\mathbf{00}}(H_d, 1/2d) = 1$. Поэтому при любом $\epsilon > 0$ справедливо неравенство $\varphi_{\mathbf{00}}(H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}}, 1/2d) > 1$. Оно означает, что $R(H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}}) < 1/2d$, и, следовательно, $\rho(H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}}) > 2d$ при любом $\epsilon > 0$.

В силу следствия 2 (пункты 2, 3) и леммы 1 при $d \geq 3$ имеем $\varphi_{00}(H_d, 1/2d) < 1$. Поэтому при ϵ , не превосходящем величины

$$\epsilon(d) = 2d(1 - \varphi_{00}(H_d, 1/2d)), \quad (6)$$

имеем $\varphi_{00}(H_d + \epsilon P_0, 1/2d) \leq 1$, и, следовательно, $\rho(H_d + \epsilon P_0) = 2d$ при $[0, \epsilon(d)]$. Так как при $\epsilon > \epsilon(d)$ справедливо неравенство $\varphi_{00}(H_d + \epsilon P_0, 1/2d) > 1$, то для таких значений ϵ имеем $\rho(H_d + \epsilon P_0) > 2d$. Теорема доказана.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – пространство с вероятностной мерой P . Будем говорить, что случайная величина $\xi(\omega)$ распределена на отрезке $[a, b]$, если $P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in [a, b]\}) = 1$ и $P(\{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in [h, c]\}) < 1$ в случае, когда хотя бы одно из неравенств $a \leq h$, $c \leq b$ строгое. Пусть $\{V_n(\omega)\}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, – последовательность случайных величин на этом пространстве, распределенных на отрезке $[0, b]$, где $0 < b < \infty$. В дальнейшем мы будем предполагать, что для любого $\epsilon > 0$ и конечного множества $S \subset \mathbb{Z}^d$ справедливы следующие неравенства:

$$P(\{\omega \in \Omega: V_n(\omega) \in [b - \epsilon, b], \mathbf{n} \in S\}) > 0, \quad (7)$$

$$P(\{\omega \in \Omega: V_n(\omega) \in [0, \epsilon], \mathbf{n} \in S\}) > 0. \quad (8)$$

Очевидно, что эти условия выполнены в случае, если случайные величины $\{V_n(\omega)\}$ независимы и одинаково распределены на отрезке $[0, b]$. Однако они перестают быть справедливыми, если $d = 1$, $\Omega = S^1$, P является мерой Лебега на окружности S^1 и $V_n(\omega) = V(n\alpha + \omega)$, где V – непрерывная функция на окружности, не равная константе, и α – произвольное иррациональное число. Определим бесконечную диагональную матрицу $\mathbf{V}(\omega)$ с элементами $v_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(\omega) = V_n(\omega)$, где $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$. Очевидно, что оператор $H_d(\omega) = H_d + \mathbf{V}(\omega)$ является самосопряженным и его спектр содержится в $[-2d, 2d + b]$. Обозначим через Ω_d множество $\{\omega \in \Omega: \rho(H_d(\omega)) = 2d + b, V_n(\omega) < b \text{ при некотором } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d\}$. В случае, когда трансляционно-инвариантная мера P эргодична и выполнено условие (7), имеем $P(\Omega_d) = 1$ (см. [9]). Положим

$$\epsilon(d, b) = (2d + b)(1 - \varphi_{00}(H_d, (2d + b)^{-1})).$$

Если $b = 0$, то вместо $\epsilon(d, 0)$ будем писать $\epsilon(d)$. Заметим, что при $d = 1, 2$ имеем $\epsilon(d) = 0$, а при $d \geq 3$ справедливо неравенство $\epsilon(d) > 0$.

ТЕОРЕМА 2 (о положительности индивидуальной критической константы связи для возмущенного случайного гамильтониана). *Для любого $\omega \in \Omega_d$ найдется такое $\epsilon(\omega) > 0$, которое в дальнейшем мы будем называть индивидуальным критическим параметром для оператора $H_d(\omega)$, что*

$$\begin{aligned} H_d(\omega) + \epsilon P_0 &\notin L_{\text{i.e.v.}} & \text{при} & \quad \epsilon \leq \epsilon(\omega), \\ H_d(\omega) + \epsilon P_0 &\in L_{\text{i.e.v.}} & \text{при} & \quad \epsilon > \epsilon(\omega). \end{aligned}$$

Случайная величина $\epsilon(\omega)$ распределена на отрезке $[\epsilon(d), \epsilon(d, b)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу спектрального представления (2) для функции $\Phi_{00}(H_d, z)$ имеем

$$\frac{2d+b}{2d}(1 + \Phi_{00}(H_d, 1/2d)) = 1 + \Phi_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1}), \quad (9)$$

$$\left(\frac{2d+b}{2d}\right)^2 \Phi'_{00}(H_d, 1/2d) = \Phi'_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1}). \quad (10)$$

Поэтому утверждение следствия 2 останется справедливым, если в нем заменить оператор H_d и величину $1/2d$ соответственно на $H_d + bE$ и $(2d+b)^{-1}$. Очевидно, что для любого $\omega \in \Omega_d$ справедливо неравенство $a_{00}(H_d(\omega), k) < a_{00}(H_d + bE, k)$. Поэтому для любого $\omega \in \Omega_d$ имеем

$$\varphi_{00}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1}) < \varphi_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1}) \leq 1,$$

и, следовательно, $\epsilon(\omega) = (2d+b)(1 - \varphi_{00}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1})) > (2d+b)(1 - \varphi_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1})) = 2d(1 - \varphi_{00}(H_d, 1/2d)) = \epsilon(d)$ (см. (1) и (9)).

Неравенство $P(\{\omega \in \Omega_d: \epsilon(\omega) > h\}) < 1$ для любого $h > \epsilon(d)$ вытекает из равенства $\{\omega \in \Omega_d: \epsilon(\omega) > h\} = \{\omega \in \Omega_d: H_d(\omega) + hP_0 \notin L_{i.e.v.}\}$ и теоремы 2 из [10], которая утверждает, что для компактного диагонального оператора K неравенство $P(\{\omega \in \Omega: H_d(\omega) + K \in L_{i.e.v.}\}) > 0$ равносильно условию $H_d + K \in L_{i.e.v.}$ (в нашем случае $K = hP_0$, где $h > \epsilon(d)$).

Нетрудно проверить, что для любого $\omega \in \Omega_d$ справедливо неравенство $\epsilon(\omega) = (2d+b)(1 - \varphi_{00}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1})) < (2d+b)(1 - \varphi_{00}(H_d, (2d+b)^{-1})) = \epsilon(d, b)$. В силу предложения 1 из [10] имеем $P(\{\omega \in \Omega: H_d(\omega) + cP_0 \in L_{i.e.v.}\}) < 1 \iff \rho(H_d + cP_0) < 2d+b$. Поэтому $P(\{\omega \in \Omega_d: \epsilon(\omega) > c\}) > 0$ при любом c , для которого $\rho(H_d + cP_0) < 2d+b$. Последнее условие равносильно справедливости неравенства $\varphi_{00}(H_d + cP_0, (2d+b)^{-1}) < 1$, что эквивалентно $c < (2d+b)(1 - \varphi_{00}(H_d, (2d+b)^{-1})) = \epsilon(d, b)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для модели Андерсона при достаточно малой плотности распределения случайной величины $V_0(\omega)$ спектр оператора $H_d(\omega)$ почти наверное является чисто точечным (для $d=1$ это справедливо при гораздо более общих условиях), т.е. $\text{Spec}(H_d(\omega)) = \{\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_n(\omega), \dots\}$. Нетрудно проверить, что $\Phi_{00}(H_d, (2d+b)^{-1}) < \Phi_{00}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1}) < \Phi_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1})$ для любого $\omega \in \Omega_d$. Поэтому в силу (2) и (9) почти наверное справедливо неравенство

$$\epsilon(d, b)^{-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \|E_{\omega}(\lambda_n(\omega))e_0\|^2 / (2d+b - \lambda_n(\omega)) < \epsilon(d)^{-1},$$

где $E_{\omega}(\cdot)$ – разложение единицы оператора $H_d(\omega)$ ($\epsilon(d)^{-1} = \infty$ при $d=1, 2$).

4. ОБ ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ ПРИ КРИТИЧЕСКОЙ КОНСТАНТЕ СВЯЗИ

Для любого $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ положим

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{0}}(A, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{n}_0=\mathbf{n}, \mathbf{n}_k=\mathbf{0}; \mathbf{n}_i \neq \mathbf{0} \text{ при } i \neq 0, k} a_{\mathbf{n}_0\mathbf{n}_1} \cdots a_{\mathbf{n}_{i-1}\mathbf{n}_i} \cdots a_{\mathbf{n}_{k-1}\mathbf{n}_k} z^k, \\ \varphi_{\mathbf{0}\mathbf{n}}(A, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{n}_0=\mathbf{0}, \mathbf{n}_k=\mathbf{n}; \mathbf{n}_i \neq \mathbf{0} \text{ при } i \neq 0, k} a_{\mathbf{n}_0\mathbf{n}_1} \cdots a_{\mathbf{n}_{i-1}\mathbf{n}_i} \cdots a_{\mathbf{n}_{k-1}\mathbf{n}_k} z^k.\end{aligned}$$

Очевидно, что если матрица A симметрична, то $\varphi_{\mathbf{0}\mathbf{n}}(A, z) = \varphi_{\mathbf{n}\mathbf{0}}(A, z)$.

Если $A \in L$ и $\varphi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(A, R(A)) = 1$, то уравнение $A\psi = (1/R(A))\psi$ с начальным условием $\psi_{\mathbf{0}} = 1$ имеет единственное решение ψ (необязательно из пространства $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$) с положительными координатами $\psi_{\mathbf{n}}$. Они имеют следующий вид:

$$\psi_{\mathbf{n}} = \varphi_{\mathbf{n}\mathbf{0}}(A, R(A)).$$

Обозначим такое решение уравнения $(H_d + \epsilon(d)P_{\mathbf{0}})\psi = 2d\psi$ через $\psi(d)$. Если $d = 1, 2$, то $\epsilon(d) = 0$ и $\psi_{\mathbf{n}}(d) = 1$ для любого $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$.

ТЕОРЕМА 3 (об основном состоянии для возмущенного свободного гамильтониана). *Для $d \geq 3$ координаты вектора $\psi(d)$ стремятся к нулю при $\|\mathbf{n}\| \rightarrow \infty$, причем $\psi(d) \notin \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ при любом d и $\psi(d) \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, если и только если $d \geq 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ координаты вектора $\psi_{\mathbf{n}}(d)$ равны

$$\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{0}}(H_d + \epsilon(d)P_{\mathbf{0}}, 1/2d) = \varphi_{\mathbf{n}\mathbf{0}}(H_d, 1/2d).$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{n}\mathbf{0}}(H_d, 1/2d)^2 &= \varphi_{\mathbf{n}\mathbf{0}}(H_d, 1/2d)\varphi_{\mathbf{0}\mathbf{n}}(H_d, 1/2d) \leq \\ &\leq \sum_{k=2\|\mathbf{n}\|}^{\infty} b_{\mathbf{n}\mathbf{n}}(H_d, k)(1/2d)^k = \sum_{k=2\|\mathbf{n}\|}^{\infty} b_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, k)(1/2d)^k.\end{aligned}$$

Так как $\Phi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, 1/2d) < \infty$ при $d \geq 3$, то $\psi_{\mathbf{n}}(d) \leq C_d$, где $C_d = \Phi_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, 1/2d) + 1 < \infty$, и $\psi_{\mathbf{n}}(d) \rightarrow 0$ при $\|\mathbf{n}\| \rightarrow \infty$.

Продифференцировав правую и левую части тождества (5) и положив $z = 1/2d$, получим

$$\varphi'_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d + \epsilon P_{\mathbf{0}}, 1/2d) = \epsilon + \varphi'_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, 1/2d). \quad (11)$$

В силу следствия 2 (пункт 2) и формулы (1) при $d = 3, 4$ имеем $\varphi'_{\mathbf{0}\mathbf{0}}(H_d, 1/2d) = \infty$. Поэтому точка $z = \rho(H_d + \epsilon(d)P_{\mathbf{0}}) = 2d$ принадлежит непрерывному спектру оператора $H_d + \epsilon(d)P_{\mathbf{0}}$ (см. (11) и предложение 1). При $d \geq 5$ справедливо неравенство

$\varphi'_{00}(H_d, 1/2d) < \infty$ (см. следствие 2 (пункт 3) и формулу (1)), и, следовательно, точка $z = \rho(H_d + \epsilon(d)P_0) = 2d$ является собственным значением оператора $H_d + \epsilon(d)P_0$ (см. (11) и предложение 1).

Предположим теперь, что $\psi(d) \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ при некотором $d \geq 5$. Тогда сумма

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} \psi_{\mathbf{n}}(d) \exp(i(\mathbf{n}, \boldsymbol{\alpha}))$$

является непрерывной ограниченной функцией $g_1(\boldsymbol{\alpha})$ переменной $\boldsymbol{\alpha}$. В то же время из результатов работы [3] следует, что координаты вектора $\psi(d)$ связаны соотношением

$$\psi_{\mathbf{n}}(d) = \epsilon(d)\psi_0(d)J(2d, \mathbf{n})/(2\pi)^d,$$

где

$$J(2d, \mathbf{n}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(-i \sum_{k=1}^d n_k \alpha_k\right)}{2d - 2 \sum_{k=1}^d \cos \alpha_k} d\alpha_1 \dots d\alpha_d.$$

Другими словами, $\psi_{\mathbf{n}}(d)$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье неограниченной функции

$$g_2(\boldsymbol{\alpha}) = \epsilon(d)\psi_0(d) \left(2d - 2 \sum_{k=1}^d \cos \alpha_k\right)^{-1}$$

из пространства $L_2([-\pi, \pi]^d, d\boldsymbol{\alpha})$. Очевидно, что $g_1 \neq g_2$ в смысле L_2 , а это противоречит исходному предположению. Таким образом, $\psi(d) \notin \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ при любом d . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4 (об основном состоянии для возмущенной модели Андерсона)
Предположим, что распределение случайной величины $V_0(\omega)$ абсолютно непрерывно и норма ее производной в пространстве $L_\infty(dx)$ достаточно мала. Тогда для почти каждого ω точка $z = \rho(H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0) = 2d + b$ является собственным значением оператора $H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0$, причем соответствующий собственный вектор $\psi(\omega)$ экспоненциально локализован, т.е. $\psi_{\mathbf{n}}(\omega) < C(\omega)e^{-\gamma\|\mathbf{n}\|}$ при некоторых $C(\omega) > 0$ и $\gamma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [4, с. 88] при фиксированном λ для почти каждого ω доказана при выполнении условия теоремы справедливость следующего утверждения: если координаты вектора ψ , удовлетворяющего уравнению

$$(H_d(\omega) + \epsilon P_0)\psi = \lambda\psi \tag{12}$$

при каком-то ϵ , растут не быстрее чем полиномиально, то на самом деле они убывают с экспоненциальной скоростью. Таким образом, достаточно показать, что решение уравнения (12) при $\epsilon = \epsilon(\omega)$ и $\lambda = \rho(H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0) = 2d + b$ равномерно ограничено.

В силу теоремы 3 координаты единственного решения $\psi(d)$ уравнения $(H_d + \epsilon(d)P_0)\psi = 2d\psi$, а следовательно, и уравнения $(H_d + bE + \epsilon(d)P_0)\psi =$

$(2d+b)\psi$ с начальным условием $\psi_0 = 1$ равномерно ограничены. Так как $\varphi_{00}(H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0, (2d+b)^{-1}) = 1$, то решение $\psi(\omega)$ уравнения $(H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0)\psi = (2d+b)\psi$ с начальным условием $\psi_0 = 1$ единственно и имеет при $\mathbf{n} \neq 0$ также положительные координаты $\psi_{\mathbf{n}}(\omega) = \varphi_{\mathbf{n}0}(H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0, (2d+b)^{-1}) = \varphi_{\mathbf{n}0}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1})$. Очевидно, что $\varphi_{\mathbf{n}0}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1}) \leq \varphi_{\mathbf{n}0}(H_d + bE, (2d+b)^{-1}) = \varphi_{\mathbf{n}0}(H_d + bE + \epsilon(d)P_0, (2d+b)^{-1}) = \psi_{\mathbf{n}}(d)$ при $\mathbf{n} \neq 0$. Поэтому $\psi_{\mathbf{n}}(\omega) \leq C_d$ при каждом $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ для любого $\omega \in \Omega_d$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. То, что при любом d точка $z = 2d + b$ почти наверное является собственным значением оператора $H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0$, равносильно справедливости с вероятностью один условия $\varphi'_{00}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1}) < \infty$. Очевидно, что $\Phi'_{00}(H_d, (2d+b)^{-1}) < \Phi'_{00}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1}) \leq \Phi'_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1})$ для любого $\omega \in \Omega_d$. Поэтому в силу (1), (2) и (10) почти наверное справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & (2d+b)^{-2}(1 + \Phi_{00}(H_d, (2d+b)^{-1}) + (2d+b)^{-1}\Phi'_{00}(H_d, (2d+b)^{-1})) < \\ & < \sum_{n=1}^{\infty} \|E_{\omega}(\lambda_n(\omega))e_0\|^2 / (2d+b - \lambda_n(\omega))^2 < \\ & < (2d+b)^{-2} \left(1 + \Phi_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1}) + \right. \\ & \quad \left. + (2d+b)^{-1}\Phi'_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1}) \right) = \\ & = \frac{1}{2d(2d+b)} (1 + \Phi_{00}(H_d, 1/2d) + (2d)^{-1}\Phi'_{00}(H_d, 1/2d)). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $d \geq 5$, то $\varphi'_{00}(H_d(\omega), (2d+b)^{-1}) \leq \varphi'_{00}(H_d + bE, (2d+b)^{-1}) < \infty$ (см. следствие 2 (пункт 3) и формулы (10) и (1)), и, следовательно, точка $z = \rho(H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0) = 2d + b$ является собственным значением оператора $H_d(\omega) + \epsilon(\omega)P_0$ при любом $\omega \in \Omega_d$.

Работа поддержана грантом INTAS-RFBR 95-418.

Список литературы

- [1] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Том IV: Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [2] А. Г. Голицына, С. А. Молчанов. ДАН СССР. 1987. Т. 294. № 6. С. 1302–1306.
- [3] А. Г. Голицына. Спектральные свойства редких рассеивателей. Канд. дисс. М.: МГУ, 1988.
- [4] B. Simon, T. Wolff. Commun. Pure Appl. Math. 1986. V. 39. P. 75–90.
- [5] D. Vere-Jones. Quart. J. Math. Oxf. (2). 1962. V. 13. P. 7–28.
- [6] С. В. Савченко. УМН. 1997. Т. 52. № 3. С. 175–176.
- [7] B. Mohar, W. Woess. Bull. London Math. Soc. 1989. V. 21. P. 209–234.
- [8] D. Vere-Jones. Pacific J. Math. 1967. V. 22. P. 361–386.
- [9] L. Pastur, A. Figotin. Spectra of Random and Almost-Periodic Operators. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [10] С. В. Савченко. Теория вероятн. и ее примен. 1997. Т. 43. Вып. 1.

Поступила в редакцию 13.X.1997 г.