Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Киселев, Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения Деви–Стьюартсона-I, *ТМФ*, 1998, том 114, номер 1, 104–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf831>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:31:05

© 1998 г.

О. М. Киселев*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДЕВИ–СТЮАРТСОНА-I

Построено и обосновано асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ решение задачи Коши для уравнения Деви–Стюартсона-I. Решение имеет порядок t^{-1} и быстро осциллирует. Огибающая осцилляций определяется интегральным уравнением.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Деви–Стюартсона-I (ДС-I) [1, 2] интегрируется методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3–6]. В частности, этот метод позволяет подробно исследовать асимптотическую структуру решений интегрируемых уравнений [7–17]. В данной работе МОЗР используется для построения асимптотического при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши

$$i\partial_t Q + (\partial_\xi^2 + \partial_\eta^2)Q + \frac{\epsilon}{2} \left(\int_{-\infty}^{\xi} d\xi' \partial_\eta |Q|^2 + \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \partial_\xi |Q|^2 \right) Q = 0, \quad \epsilon = \pm 1, \quad (1)$$
$$Q|_{t=0} = Q_0(\xi, \eta).$$

При $t \rightarrow \infty$ решение имеет порядок $O(t^{-1})$ и быстро осциллирует. Огибающая осцилляций определяется данными рассеяния и зависит от медленных переменных ξ/t и η/t .

Локальные теоремы о существовании решения задачи Коши для различных вариантов систем уравнений типа уравнений Деви–Стюартсона доказаны в [18, 19]. С точки зрения МОЗР существование и единственность решения задачи Коши для уравнения ДС-I в пространстве функций, непрерывных по t со значениями в L_2 на произвольном промежутке времени, доказаны в [5]. Для близкой к (1) системы уравнений Деви–Стюартсона-2 доказана теорема о глобальном существовании решения задачи Коши с достаточно гладкими начальными условиями и построено ее асимптотическое решение при $t \rightarrow \infty$ [17]. Однако интегрирование с помощью МОЗР уравнения (1) и

*Институт математики с ВЦ, УНЦ РАН, Уфа, Россия

системы Деви–Стюартсона-2 связано с различными вспомогательными линейными задачами. Поэтому построение асимптотического решения для (1) представляет самостоятельный интерес. С точки зрения МОЗР уравнение (1) ближе к уравнению Кадомцева–Петвиашвили-1 (КП-1) [20, 21]. Убывающее по t при $t \rightarrow \infty$ асимптотическое решение уравнения КП-1 с таким же, как здесь, характером зависимости от медленных пространственных переменных построено в [13].

Структура асимптотических решений интегрируемых уравнений размерности $2+1$ (две пространственные переменные и время) отличается от хорошо исследованного $(1+1)$ -мерного случая. С технической стороны особенность уравнения ДС-I по сравнению с $(1+1)$ -мерными интегрируемыми уравнениями заключается в необходимости использования вспомогательной линейной задачи для интегрирования уравнения с помощью МОЗР. Для уравнения (1) обратная задача – нелокальная задача Римана. В работе строится асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ решение системы интегральных уравнений, эквивалентных нелокальной задаче Римана. Затем это решение используется для построения асимптотического решения уравнения (1) при $t \rightarrow \infty$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В работе при решении задачи Коши для (1) используются данные рассеяния в начальный момент времени [4]

$$S(k, l) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \psi_{22}^{-}(\xi, \eta, k, 0) \exp(il\eta) Q_0(\xi, \eta). \quad (2)$$

Функция $\psi_{22}^{-}(\xi, \eta, k, 0)$ – элемент матрицы $\psi^{-}(\xi, \eta, k, t)$, составленной из решений задачи Гурса для системы Дирака

$$\begin{pmatrix} \partial_{\xi} & 0 \\ 0 & \partial_{\eta} \end{pmatrix} \psi = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & Q \\ \epsilon \bar{Q} & 0 \end{pmatrix} \psi, \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi_{11}^{-}|_{\xi \rightarrow -\infty} &= \exp(ik\eta), & \psi_{12}^{-}|_{\xi \rightarrow +\infty} &= 0, \\ \psi_{21}^{-}|_{\eta \rightarrow -\infty} &= 0, & \psi_{22}^{-}|_{\eta \rightarrow -\infty} &= \exp(-ik\xi). \end{aligned}$$

Ниже потребуется еще одна матрица, составленная из решений системы Дирака. Обозначим ее через $\psi^{+}(\xi, \eta, k, t)$. Элементы этой матрицы удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} \psi_{11}^{+}|_{\xi \rightarrow -\infty} &= \exp(ik\eta), & \psi_{12}^{+}|_{\xi \rightarrow -\infty} &= 0, \\ \psi_{21}^{+}|_{\eta \rightarrow \infty} &= 0, & \psi_{22}^{+}|_{\eta \rightarrow -\infty} &= \exp(-ik\xi). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $S(k, l) \in C^1$ и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \|S(l, k)\|_{L_1} + \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} dl |\partial_k S(l, k)| \right\|_C + \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} |S(l, k)| dl \right\|_C + \\ + \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_k S(k, l)| dl \right\|_C + \frac{1}{\pi} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} |S(k, l)| dl \right\|_C < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда при $t \rightarrow \infty$ асимптотическое решение уравнения (1) имеет вид

$$Q(\xi, \eta, t) = \frac{1}{t} \exp\left(\frac{it}{4}(x^2 + y^2)\right) \left(iS\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_1^0\left(x, y, \frac{x}{2}\right) \right) + O(t^{-3/2}). \quad (5)$$

Здесь $x = \xi/t$, $y = \eta/t$; функция $\mu_1^0(\xi, \eta, k, t)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \mu_1^0(x, y, k) &= \int_{-\infty}^{y/2} dl \mu_2^0(x, y, l) S(k, l), \\ \mu_2^0(x, y, k) &= \int_{x/2}^{\infty} dl \epsilon \bar{S}(l, k) S(l, k) + \int_{x/2}^{\infty} dl \mu_1^0(x, y, l) \bar{S}(l, k). \end{aligned} \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если данные рассеяния имеют вид

$$S(k, l) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(k) \tau_j(l), \quad (7)$$

то решение задачи Коши для ДС-I вычисляется явно [3–5]. Это решение имеет асимптотический вид

$$Q = t^{-1} \exp(it(x^2 + y^2)/4) \sum_{j=1}^n \sigma_j\left(\frac{x}{2}\right) \left(\tau_j\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \chi_j^0\left(x, y, \frac{x}{2}\right) \right) + O(t^{-3/2}),$$

функции $\chi_j^0(x, y, k)$ – решения системы линейных алгебраических уравнений (15) (см. ниже).

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

Для построения потенциала $Q(\xi, \eta, t)$ в любой момент времени $t > 0$ по данным рассеяния $S(k, l)$ будем использовать систему уравнений, эквивалентную нелокальной задаче Римана [4]:

$$\begin{bmatrix} \psi_{11}^-(\xi, \eta, k, y) \\ \psi_{12}^+(\xi, \eta, k, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(ik\eta) \\ 0 \end{bmatrix} + F[\psi], \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1[\psi] &= \frac{\exp(ik\eta)}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \exp(-ik'\eta)}{k' - (k - i0)} \times \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dl (\epsilon \bar{S}(l, k') \exp(it(k'^2 + l^2)) \psi_{12}^+(\xi, \eta, l, t)), \\
 F_2[\psi] &= \frac{\exp(-ik\xi)}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \exp(ik'\xi)}{k' - (k + i0)} \times \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dl (S(k', l) \exp(-it(k'^2 + l^2)) \psi_{11}^-(\xi, \eta, l, t)).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Эта система интегральных уравнений позволяет определить функции ψ_{11}^- и ψ_{12}^+ в любой момент времени по данным рассеяния. Потенциал $Q(\xi, \eta, t)$ восстанавливается по формуле [4]

$$Q(\xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk dl S(k, l) \exp(-it(k^2 + l^2)) \exp(ik\xi) \psi_{11}^-(\xi, \eta, l, t). \tag{10}$$

В этом разделе построено асимптотическое решение системы (8) при $t \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $S(k, l) \in C^1$ удовлетворяет условию (4). Тогда решение системы (8) при $t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \psi_{11}^- &= \exp(ik\eta) + t^{-1/2} \exp(ik^2 t + ity^2/4) \varphi_1(x, y, k, t) + O(t^{-1}), \\
 \psi_{12}^+ &= t^{-1/2} \exp(-ik^2 t + ity^2/4) \varphi_2(x, y, k, t) + O(t^{-1}),
 \end{aligned}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$. Функции $\varphi_1(x, y, k, t)$ и $\varphi_2(x, y, k, t)$ – решения системы интегральных уравнений (14) (см. ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ. Зависимость функций φ_1 и φ_2 от параметра t существенна в малой, порядка $O(t^{-1/2})$ окрестности точек $k = y/2$ и $k = x/2$.

Для доказательства теоремы 2 исследуем свойства интегрального оператора $F[\psi]$ в правой части (8). Обозначим через X пространство непрерывных вектор-функций $h(k) = [h_1(k), h_2(k)]^T$ с нормой $\|h(k)\|_X = \|h_1\|_C + \|h_2\|_C$.

ЛЕММА 1. Пусть функция $S(k, l)$ такая, что выполнены условия (4), тогда интегральный оператор $F[\psi]$ является сжимающим в пространстве X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интегральный оператор $F_1[\psi]$. Поменяем порядок интегрирования по k' и l . Интеграл по k' представим в виде суммы интегралов по k' от $-\infty$ до $k-1$, от $k-1$ до $k+1$ и от $k+1$ до ∞ . Сумма интегралов по k' при $k' \in (-\infty, k-1)$ и $k' \in (k+1, \infty)$ легко оценивается через

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk' |S(l, k')|.$$

Оценим интеграл по k' от $k-1$ до $k+1$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{k-1}^{k+1} \frac{dk' \exp(-ik'\eta + itk'^2)}{k' - (k - i0)} \overline{S}(l, k) \right| &\leq \int_{k-1}^{k+1} dk' \left| \frac{\overline{S}(l, k') - \overline{S}(l, k)}{k' - k} \right| + \\ &+ |\overline{S}(l, k)| \left| \int_{k-1}^{k+1} \frac{dk' \exp(-ik'\eta + itk'^2)}{k' - (k - i0)} \right| \leq 2 \max_{k' \in [k-1, k+1]} |\partial_{k'} \overline{S}(l, k')| + 2\pi |\overline{S}(l, k)|. \end{aligned}$$

Тогда для $F_1[\psi]$ имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \max_{k \in \mathbb{R}} |F_1[\psi]| &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \|S(l, k)\|_{L_1} + \max_{k \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dl |\partial_k S(l, k)| \right) + \right. \\ &\quad \left. + \max_{k \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dl |S(l, k)| \right) \right) \|\psi_2\|_C. \end{aligned}$$

Непрерывность $F_1[\psi]$ по параметру k следует из гладкости $S(k, l)$ (см., например, [22, с. 44]).

Такие же утверждения справедливы и для второй компоненты интегрального оператора $F[\psi]$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Построим асимптотическое при $t \rightarrow \infty$ представление интегральных операторов в (8). Представим интеграл по k' в первом интегральном операторе в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \exp(it(k'^2 - k'y))}{k' - (k - i0)} \overline{S}(l, k') &= \overline{S}(l, k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \exp(it(k'^2 - k'y))}{k' - (k - i0)} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\overline{S}(l, k') - \overline{S}(l, k)}{k' - (k - i0)} \exp(it(k'^2 - k'y)). \end{aligned} \quad (11)$$

Первый из этих интегралов запишем как разность интеграла в смысле главного значения и половины вычета подынтегральной функции в точке k . Интеграл в смысле главного значения можно выразить через интеграл Френеля [23, с. 334]. В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi(k, y, t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \exp(it(k'^2 - k'y))}{k' - (k - i0)} = \\ &= \sqrt{2\pi} (1 - i) \exp \left(it(k^2 - ky) \phi \left(t^{1/2} \left(\frac{y}{2} - k \right) \right) \right) - i\pi \exp(it(k^2 - ky)), \end{aligned}$$

где

$$\phi(z) = \int_0^z dz' \exp(iz'^2)$$

— интеграл Френеля.

Для второго интеграла в правой части формулы (11) при $t \rightarrow \infty$, пользуясь методом стационарной фазы [24], можно получить асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\overline{S}(l, k') - \overline{S}(l, k)}{k' - (k - i0)} \exp(it(k'^2 - k'y)) = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp(-ity^2/4 + i\pi/4) \frac{\overline{S}(l, y/2) - \overline{S}(l, k)}{y/2 - k} + O(t^{-1}). \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\exp(ik\eta)}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \exp(it(k'^2 - k'y))}{k' - (k - i0)} \overline{S}(l, k') = \frac{\exp(ik^2 t)}{2i\pi} \overline{S}(l, k) \Phi(k, y, t) + \\ + \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp(-ity^2/4 + i\pi/4) \frac{\overline{S}(l, y/2) - \overline{S}(l, k)}{y/2 - k} + O(t^{-1}). \end{aligned}$$

Похожее представление справедливо для интеграла по k' во второй компоненте интегрального оператора $F[\psi]$. Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ систему интегральных уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{11}^-(\xi, \eta, k, y) &= \exp(ik\eta) + \frac{\exp(ik^2 t)}{2i\pi} \Phi(k, y, t) \times \\ &\times \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dl \overline{S}(l, k) \exp(itl^2) \psi_{12}^+(\xi, \eta, l, t) + \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{\exp(ik^2 t)}{2i\pi} \exp(-ity^2/4 + i\pi/4) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{\overline{S}(l, y/2) - \overline{S}(l, k)}{y/2 - k} \exp(itl^2) \psi_{12}^+(\xi, \eta, l, t) + O(t^{-1}), \\ \psi_{12}^+(\xi, \eta, k, y) &= \frac{\exp(-ik^2 t)}{2i\pi} \overline{\Phi(k, x, t)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dl S(k, l) \exp(-itl^2) \psi_{11}^-(\xi, \eta, l, t) + \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{\exp(-itkx)}{2i\pi} \exp(itx^2/4 - i\pi/4) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{S(x/2, l) - S(k, l)}{x/2 - k} \exp(-itl^2) \psi_{11}^-(\xi, \eta, l, t) + O(t^{-1}). \end{aligned} \tag{12}$$

Решение системы (8) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{11}^- &= \exp(ik\eta) + t^{-1/2} \exp(ik^2 t + ity^2/4) \varphi_1(x, y, k, t) + t^{-1} \Psi_1(\xi, \eta, t, k), \\ \psi_{12}^+ &= t^{-1/2} \exp(-ik^2 t + ity^2/4) \varphi_2(x, y, k, t) + t^{-1} \Psi_2(\xi, \eta, k, t). \end{aligned} \tag{13}$$

Подставим (13) в (12). Асимптотическое значение интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dl S(k, l) \exp(-it(l^2 + ly))$$

вычислим методом стационарной фазы. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра t . Для φ_1 и φ_2 получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, k, t) &= \frac{1}{2i\pi} \Phi(k, y, t) \int_{-\infty}^{\infty} dl \, \epsilon \bar{S}(l, k) \varphi_2(x, y, l, t), \\ \varphi_2(x, y, k, t) &= \frac{1}{2i\pi} \overline{\Phi(k, x, t)} \times \\ &\times \left(\sqrt{\pi} S(k, y/2) \exp\left(\frac{-i\pi}{4}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} dl S(k, l) \varphi_1(x, y, l, t) \right).\end{aligned}\quad (14)$$

Для разрешимости этих интегральных уравнений в пространстве X достаточно, чтобы выполнялось условие (4). В этом случае ряд Неймана для системы (14) сходится абсолютно и равномерно при $x, y \in \mathbb{R}$.

Покажем, что вектор-функция $\Psi(\xi, \eta, k, t)$ в формуле (13) имеет порядок $O(1)$. Для этого выпишем интегральное уравнение для $\Psi(\xi, \eta, k, t)$:

$$\Psi(\xi, \eta, k, t) = f(x, y, k, t) + F[\Psi],$$

где компоненты вектора f вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}f_1(x, y, k, t) &= t^{1/2} F_1[\exp(-ik^2 t + ity^2/4) \varphi_2(x, y, k, t)], \\ f_2(x, y, k, t) &= t^{1/2} \left(t^{1/2} F_2[\exp(ikty)] + F_2[\exp(ik^2 t + ity^2/4) \varphi_1(x, y, k, t)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\overline{\Phi(k, x, t)}}{2i\pi} \left(\sqrt{\pi} S(k, y/2) \exp(-i\pi/4) + \int_{-\infty}^{\infty} dl S(k, l) \varphi(x, y, l, t) \right) \right).\end{aligned}$$

По построению $\|f(x, y, k, t)\|_X = O(1)$ равномерно при $x, y \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Оператор $F[\psi]$ сжимающий, тогда

$$\|\Psi(\xi, \eta, k, t)\|_X = O(1), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Теорема 2 доказана.

4. ВЫРОЖДЕННЫЕ ЯДРА

Нелокальная задача Римана (8) решается явно, если ядра интегральных уравнений вырождены [3–5], т.е. данные рассеяния имеют вид (7).

Явное решение при $t \rightarrow \infty$ выражается через интегралы от быстро осциллирующих функций. Найдем это решение, воспользовавшись асимптотическим представлением (13) и интегральными уравнениями (14). Обозначим

$$\begin{aligned}\chi_j(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dl \, \varphi_1(x, y, l, t) \tau_j(l), \\ \nu_j(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dl \, \varphi_2(x, y, l, t) \bar{\sigma}_j(l).\end{aligned}$$

Для χ_j и ν_j получим систему $2n$ уравнений

$$\begin{aligned}\chi_j(x, y, t) &= \sum_{m=1}^n F_{jm}(y, t) \nu_m(x, y, t), \\ \nu_j(x, y, t) &= g_j(x, y, t) + \sum_{m=1}^n G_{jm}(x, t) \chi_m(x, y, t),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F_{jm}(y, t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tau_j(k) \bar{\tau}_m(k) \Phi(k, y, t), \\ G_{jm}(x, t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sigma_m(k) \bar{\sigma}_j(k) \overline{\Phi(k, x, t)}, \\ g_j(x, y, t) &= \sum_{m=1}^n \tau_m\left(\frac{y}{2}\right) \frac{\exp(-i\pi/4)}{2i\pi} \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sigma_m(k) \bar{\sigma}_j(k) \overline{\Phi(k, x, t)}.\end{aligned}$$

Построим асимптотическое представление для $G_{jm}(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Для этого разобьем интеграл по k на два интеграла по областям $(-\infty, x/2]$ и $(x/2, \infty)$. В первом полуинтервале представим $\Phi(k, x, t)$ в виде

$$\overline{\Phi(k, x, t)} = -(1+i)\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{t^{1/2}(k-x/2)} dz \exp(-iz^2),$$

тогда

$$\begin{aligned}I_{jm}^1 &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x/2} dk \bar{\sigma}_j(k) \sigma_m(k) \overline{\Phi(x, k, t)} = \\ &= -\frac{1}{2i\pi} (1+i)\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{x/2} dk \bar{\sigma}_j(k) \sigma_m(k) \int_{-\infty}^{t^{-1/2}(k-x/2)} dz \exp(-iz^2).\end{aligned}$$

Интегрируя по частям интеграл по k , получаем

$$I_{jm}^1 = -\frac{1+i}{i\sqrt{2\pi}} t^{1/2} \int_{-\infty}^{x/2} dk \exp(it(k-x/2)^2) \int_k^{x/2} dk' \bar{\sigma}_j(k') \sigma_m(k').$$

Воспользовавшись методом стационарной фазы для интеграла по k , замечаем, что I_{jm}^1 оценивается через $O(t^{-1/2})$.

В интеграле по промежутку $(x/2, \infty)$ функцию $\overline{\Phi(x, k, t)}$ представим в виде

$$\overline{\Phi(x, k, t)} = 2i\pi - (1+i)\sqrt{2\pi} \int_{t^{1/2}(k-x/2)}^{\infty} dz \exp(-iz^2),$$

тогда

$$\begin{aligned}I_{jm}^2 &\equiv \frac{1}{2i\pi} \int_{x/2}^{\infty} dk \bar{\sigma}_j(k) \sigma_m(k) \overline{\Phi(k, x, t)} = \int_{x/2}^{\infty} dk \bar{\sigma}_j(k) \sigma_m(k) - \\ &- \frac{1}{2i\pi} (1+i)\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{x/2} dk \bar{\sigma}(k) \sigma_m(k) \int_{t^{1/2}(k-x/2)}^{\infty} dz \exp(-iz^2).\end{aligned}$$

Второе слагаемое в этой формуле оценивается так же, как I_{jm}^1 . В результате получим

$$G_{jm}(x, t) = \int_{x/2}^{\infty} dk \bar{\sigma}_j(k) \sigma_m(k) + O(t^{-1/2}).$$

Аналогично находим

$$F_{jm}(y, t) = - \int_{-\infty}^{y/2} dk \tau_j(k) \bar{\tau}_m(k) + O(t^{-1/2}),$$

$$g_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^n \tau_j(y/2) \exp(-i\pi/4) \int_{x/2}^{\infty} dk \sigma_m(k) \bar{\sigma}_j(k) + O(t^{-1/2}).$$

Асимптотическое решение задачи (8) имеет вид

$$\psi_{11}^- = \exp(itky) + t^{-1/2} \exp(it(k^2 + y^2/4)) \frac{1}{2i\pi} \Phi(y, k, t) \sum_{j=1}^n \epsilon \bar{\tau}_j(k) \nu_j^0(x, y) + O(t^{-1}),$$

$$\psi_{12}^+ = t^{-1/2} \exp(-it(k^2 + y^2/4)) \frac{1}{2i\pi} \bar{\Phi}(x, k, t) \times$$

$$\times \left(\sqrt{\pi} \sum_{j=1}^n \sigma_j(k) \tau_j(y/2) \exp(-i\pi/4) + \sigma_j(k) \chi_j^0(x, y) \right) + O(t^{-1}).$$

Функции $\chi_j^0(x, y)$ и $\nu_j^0(x, y)$ – решения линейной алгебраической системы уравнений

$$\chi_j^0(x, y) = \sum_{m=1}^n F_{jm}^0 \nu_m^0(x, y),$$

$$\chi_2^0(x, y) = g_j^0(x, y) + \sum_{m=1}^n G_{jm}^0 \chi_m^0(x, y),$$
(15)

где

$$F_{jm}^0(x, y) = - \int_{-\infty}^{y/2} \tau_j(k) \bar{\tau}_m(k) dk, \quad G_{jm}^0(x, y) = \int_{x/2}^{\infty} \sigma_j(k) \bar{\sigma}_m(k) dk,$$

$$g_j^0 = \sum_{m=1}^n \tau_j(y/2) \exp(-i\pi/4) \int_{x/2}^{\infty} dk \sigma_m(k) \bar{\sigma}_j(k).$$

5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДС-I

Решение уравнения (1) получается по формуле (10). Для построения решения $Q(\xi, \eta, t)$ при $t \rightarrow \infty$ в формуле (10) вычислим асимптотическое значение интеграла по k , подставим асимптотическое представление функции ψ_{11}^- и воспользуемся методом стационарной фазы [24]. В результате получим выражение для асимптотического решения уравнения (1):

$$Q(\xi, \eta, t) = \frac{1}{t} \exp\left(\frac{it}{4}(x^2 + y^2)\right) \times$$

$$\times \left(-S(x/2, y/2) + \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dl S(x/2, l) \varphi_1(x, y, l, t) \right) + O(t^{-3/2}),$$

где $\varphi_1(x, y, l, t)$ – решение уравнения (14).

В этом выражении функция $\varphi_1(x, y, l, t)$ зависит от быстрой переменной t . Эта зависимость существенна в малых окрестностях точек $l = y/2$ и $l = x/2$. Интегрирование по l сглаживает эту зависимость. Поэтому для функции Q можно получить более точное асимптотическое представление (5), в котором зависимость от параметра t указана явно. Покажем, как сделать переход к (5).

Обозначим

$$\begin{aligned}\mu_1(k, x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dl S(k, l) \varphi_1(x, y, l, t), \\ \mu_2(k, x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dl \epsilon \bar{S}(l, k) \varphi_2(x, y, l, t).\end{aligned}$$

Функции μ_1 и μ_2 удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\mu_1(x, y, k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dm \mu_2(m, x, y, t) S(k, m) \frac{1}{2i\pi} \bar{\Phi}(m, y, t), \\ \mu_2(x, y, k, t) &= H(k, x, y, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dm \mu_1(m, x, y, t) \epsilon \bar{S}(m, k) \frac{1}{2i\pi} \Phi(x, m, t),\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$H(k, x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dm \epsilon \bar{S}(m, k) \frac{1}{2i\pi} \overline{\Phi(m, x, t)} \sqrt{\pi} S(m, y/2) \exp(-i\pi/4).$$

Функция $H(k, x, y, t)$ при $t \rightarrow \infty$ может быть получена так же, как и G_{jm} (см. раздел 4):

$$H(k, x, y, t) = \int_{x/2}^{-\infty} dl \epsilon \bar{S}(l, k) S(l, y/2) + O(t^{-1/2}).$$

Будем искать асимптотическое поведение функций μ_1 и μ_2 в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1 &= \mu_1^0(k, x, y) + t^{-1/2} \mu_1^1(k, x, y, t), \\ \tilde{\mu}_2 &= \mu_2^0(k, x, y) + t^{-1/2} \mu_2^1(k, x, y, t).\end{aligned}$$

Тогда для μ_1^0 и μ_2^0 получим систему интегральных уравнений (6).

Функции $\mu_1^1(k, x, y, t)$ и $\mu_2^1(k, x, y, t)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с тем же интегральным оператором, что и в системе (16). Этот интегральный оператор является сжимающим в пространстве непрерывных вектор-функций X . Можно показать, что функции $\mu_1^1(k, x, y, t)$ и $\mu_2^1(k, x, y, t)$ непрерывные, равномерно ограниченные по $k, x, y \in \mathbb{R}$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема 1 доказана.

Список литературы

- [1] *A. Davey, K. Stewartson.* Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1974. V. 338. P. 101.
- [2] *V. D. Djordjevic, L. G. Redekopp.* J. Fluid Mech. 1977. V. 79. P. 703.
- [3] *A. S. Fokas, M. J. Ablowitz.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 2494.
- [4] *A. S. Fokas, P. M. Santini.* Physica. D. 1990. V. 44. P. 99.
- [5] *Л. П. Ниженник.* Обратные задачи для гиперболических уравнений. Киев: Наукова думка, 1991.
- [6] *A. S. Fokas, L. J. Sung.* Inverse Problems. 1992. V. 8. P. 673.
- [7] *M. J. Ablowitz, A. C. Newell.* J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 1277.
- [8] *А. Б. Шабат.* ДАН СССР. 1973. Т. 211. № 6. С. 1310.
- [9] *С. В. Манаков.* ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 4. С. 1392.
- [10] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков.* ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 203.
- [11] *J. W. Miles.* Stud. Appl. Math. 1979. V. 60. P. 59.
- [12] *В. Ю. Новокшенинов.* ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 4. С. 799.
- [13] *S. V. Manakov, P. M. Santini, L. A. Takhtadzhyan.* Phys. Lett. A. 1980. V. 75. P. 451.
- [14] *В. С. Буслаев.* УМН. 1981. Т. 36. № 4. С. 217.
- [15] *А. Р. Итс.* ДАН СССР. 1981. Т. 261. № 1. С. 14.
- [16] *Е. Ya. Khruslov, V. P. Kotlyarov.* Adv. Sov. Math. 1994. V. 19. P. 129.
- [17] *О. М. Киселев.* Дифф. уравнения. 1997. Т. 33. № 6. С. 812–819.
- [18] *J.-M. Ghidaglia, J.-K. Saut.* Nonlinearity. 1990. V. 3. P. 475.
- [19] *М. М. Шакирьянов.* Разрешимость начально-краевой задачи для системы уравнений типа Деви–Стьюартсона. В кн.: Интегрируемость в динамических системах. Уфа: ИМ с ВЦ РАН, 1994. С. 49–61.
- [20] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 43.
- [21] *В. С. Дрюма.* Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 753.
- [22] *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [23] *Ф. Олвер.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
- [24] *М. В. Федорюк.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 18.VII.1997 г.