Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Семихатов, Фьюжн в обвивающей категории модулей Йеттера–Дринфельда над алгеброй Николса ранга 1, *ТМФ*, 2012, том 173, номер 1, 3–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf8314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 11:08:36

© 2012 г.

А. М. Семихатов*

ФЬЮЖН В ОБВИВАЮЩЕЙ КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ ЙЕТТЕРА–ДРИНФЕЛЬДА НАД АЛГЕБРОЙ НИКОЛСА РАНГА 1

Популярная неполупростая фьюжн-алгебра выведена из алгебры Николса в сплетенном (braided) контексте. Вместе с разложением, найденным для произведения простых модулей Йеттера–Дринфельда, это является веским аргументом в пользу того, что с соответствующей алгеброй Николса связана категория, эквивалентная категории представлений триплетной W -алгебры в $(p, 1)$ -логарифмических моделях конформной теории поля. Для этого категорию модулей Йеттера–Дринфельда следует рассматривать как обвивающую категорию (т. е. категорию с монодромией, но без сплетения).

Ключевые слова: логарифмическая конформная теория поля, фьюжн, алгебра Николса, модуль Йеттера–Дринфельда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея построения “чисто алгебраических” аналогов вертекс-операторных алгебр (конформных теорий поля) имеет достаточно длительную историю [1]–[6]. В работах [7]–[14] эта идея была развита для неполупростых – логарифмических – моделей конформной теории поля, которые интенсивно изучались в последнее время (см. работы [15]–[27] и приведенную в них библиографию). В работе [28] был предложен сплетенный и, по-видимому, “более фундаментальный” алгебраический аналог логарифмической конформной теории поля. Он дается алгеброй Николса [29]–[33]; в последнее время в теории алгебр Николса были достигнуты впечатляющие успехи (см. работы [34]–[44] и приведенную в них библиографию), что стало замечательным “побочным продуктом” программы Андрускевича и Шнайдера по классификации “точечных” (pointed) алгебр Хопфа.

Наличие соответствия между алгебрами Николса и моделями конформной теории поля предполагает, что некоторые структуры конформных моделей должны быть воспроизводимы из (некоторых) алгебр Николса. В настоящей работе мы рассматриваем простейшую алгебру Николса $\mathfrak{B}_p$ ранга 1 размерности $p \geq 2$ и из категории ее модулей Йеттера–Дринфельда (ЙД) извлекаем коммутативную ассоциативную

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: ams@sci.lebedev.ru

$2p$ -мерную алгебру на генераторах $\mathbf{x}(r)_\nu$, $1 \leq r \leq p$, $\nu \in \mathbb{Z}_2$:

$$\mathbf{x}(r_1)_{\nu_1} \mathbf{x}(r_2)_{\nu_2} = \sum_{\substack{s=|r_1-r_2|+1, \\ \text{шаг}=2}}^{p-1-|r_1+r_2-p|} \mathbf{x}(s)_{\nu_1+\nu_2} + \sum_{\substack{s=2p-r_1-r_2+1, \\ \text{шаг}=2}}^p \mathbf{p}(s)_{\nu_1+\nu_2}, \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{p}(r)_\nu = \begin{cases} 2\mathbf{x}(r)_\nu + 2\mathbf{x}(p-r)_{\nu+1}, & r < p, \\ \mathbf{x}(p)_\nu, & r = p. \end{cases}$$

Это фьюжн-алгебра FHST [45] (см. также [12]), которая составляет часть того, что, как известно из работы [11] (см. также [46]), является эквивалентностью категорий – категории представлений *триплетной алгебры* $W(p)$ в $(p, 1)$ -логарифмических конформных моделях [45], [47]–[50] и категории представлений малой квантовой группы sl_2 в $(2p)$ -м корне из единицы. Данная квантовая группа была предложена в этом качестве в работах [7], [8], а затем использовалась и изучалась, в частности, в работах [51]–[55] (она появлялась ранее в работах [56]–[58]).

Тот факт, что фьюжн-алгебра возникает в сплетенном подходе, пропагандируемом в работе [28], вместе с рядом других наблюдений свидетельствует в пользу того, что в отношении логарифмического варианта соответствия Каждана–Люстига (соответствия между вертекс-операторными алгебрами и квантовыми группами) алгебры Николса оказываются во всяком случае ничуть не хуже предложенных ранее квантовых групп [7]–[10], [59]¹⁾.

Алгебра (1.1) возникает в настоящей работе как алгебра в центре категории $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД; элементы $\mathbf{x}(r)_\nu$ являются образами простых $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД $\mathcal{X}(r)_\nu$ ²⁾. Более того, на самом деле верно еще и следующее: из теории представлений алгебры $\mathfrak{B}_p$ следует, что тензорное произведение простых $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД разлагается как

$$\mathcal{X}(r_1)_{\nu_1} \otimes \mathcal{X}(r_2)_{\nu_2} = \left(\bigoplus_{\substack{s=|r_1-r_2|+1, \\ \text{шаг}=2}}^{p-1-|r_1+r_2-p|} \mathcal{X}(s)_{\nu_1+\nu_2} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{s=2p-r_1-r_2+1, \\ \text{шаг}=2}}^p \mathcal{P}[s]_{\nu_1+\nu_2} \right), \quad (1.2)$$

где $\mathcal{P}[p]_\nu = \mathcal{X}(p)_\nu$, а $\mathcal{P}[r]_\nu$, $1 \leq r \leq p-1$, – приводимый $\mathfrak{B}_p$ -модуль ЙД со структурой подфакторов

$$\mathcal{P}[r]_\nu = \begin{array}{ccc} & \mathcal{X}(p-r)_{\nu+1} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{X}(r)_\nu & & \mathcal{X}(r)_{\nu+2} \\ \searrow & \swarrow & \\ & \mathcal{X}(p-r)_{\nu+1} & \end{array} \quad (1.3)$$

Разложения (1.2) были высказаны в качестве гипотезы в работе [28], и мы доказываем их в настоящей работе. Модули $\mathcal{X}(r)_\nu$ и $\mathcal{P}[r]_\nu$ не исчерпывают всю категорию

¹⁾Но истинная мотивировка работы [28], которую еще предстоит проверить на более продвинутых примерах, состояла в том, что алгебры Николса могут в действительности оказаться лучше “старых” квантовых групп.

²⁾Все обозначения полностью объясняются ниже, здесь же заметим, что, например, структура модуля-комодуля $\mathcal{X}(r)_\nu$ зависит только от r , в то время как ν служит для различения изоморфных модулей-комодулей, которые тем не менее имеют различные сплетения.

$\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД, но составляют ее “наиболее важную часть”; из соотношений (1.2) с учетом структуры $\mathcal{P}[r]_\nu$, по-видимому, уже следует, что категория $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД эквивалентна категории $W(p)$ -представлений. Это утверждение, однако, требует важного пояснения.

В сплетенной категории $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД простыми объектами являются $\mathcal{X}(r)_\nu$, пронумерованные числами $1 \leq r \leq p$ и $\nu \in \mathbb{Z}_4$ (и аналогично для $\mathcal{P}[r]_\nu$ и т.д.). Здесь в два раза больше простых объектов, чем в категории $W(p)$ -представлений, [11], [45], [46]. Тем не менее утверждаемая эквивалентность имеет место для *обвивающих* (entwined) категорий [60] – тех, которые наделены только “двойным сплетением” $D_{y,z} = c_{z,y} \circ c_{y,z}$ (монокромия для алгебры $W(p)$). Свойства двойного сплетения можно аксиоматизировать, не прибегая к сплетению как таковому [60]. Этим определяются *обвивающая* (twine) структура и, соответственно, обвивающая категория. Замечательным образом в работе [60] было отмечено, что “многие важные понятия, которые, по-видимому, связаны с c , на самом деле зависят только от D или от [твиста] θ . S -матрица и подкатегория прозрачных объектов, играющие важную роль в построении инвариантов 3-многообразий, полностью определяются в терминах двойного сплетения. Еще более удивительно, что инварианты ленточных зацеплений ... не зависят от конкретного сплетения, а зависят только от D ”.

В обвивающей категории $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД объекты с индексами ν и $\nu + 2$ являются изоморфными, в результате чего оказывается, что $\nu \in \mathbb{Z}_2$ и тем самым решается “проблема удвоенного числа представлений”; все остальное с алгебраической стороны оказывается уже “подогнанным” для обеспечения эквивалентности³⁾.

Полезно также заметить, что мы выводим соотношения (1.1) и (1.2) независимо (разумеется, они следуют из одних и тех же структурных результатов для $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД, но не друг из друга). В частности, (1.1) получено из непосредственной композиции действий элементов $\mathbf{x}(r_1)_{\nu_1}$ и $\mathbf{x}(r_2)_{\nu_2}$ на модули ЙД, причем $\mathbf{x}(r)_\nu: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ задается “пропусканием $\mathcal{X}(r)_\nu$ по петле” в диаграмме (подробности обозначений приведены ниже)

(1.4)

Как таковые, операторы $\mathbf{x}(r)_\nu$ зависят только от $\nu \in \mathbb{Z}_2$ – для них не имеется “ $\mathbb{Z}_4$ -варианта”⁴⁾.

³⁾ В настоящей работе мы не доберемся до модулярных преобразований, однако приведенная выше цитата подсказывает, что рассмотрение обвивающих категорий не является препятствием для того, чтобы вывести модулярные свойства характеров $W(p)$ -представлений из алгебры Николса, т.е. в “сплетенном варианте” анализа, проделанного в работе [7].

⁴⁾ Диаграмма (1.4) включает не только квадрат сплетения B^2 модулей ЙД, но также, “в петле”, само сплетение (и ленточное отображение θ). Это не влияет на утверждение об эквивалентности обвивающих категорий, а скорее мотивирует исследование дополнительной возможности, связанной с тем, что сплетение $\mathfrak{B}_p$ -модуля ЙД с самим собой и со своим дуальным модулем также зависит лишь от $\nu \in \mathbb{Z}_2$, но не от $\nu \in \mathbb{Z}_4$ (и аналогично для ленточного отображения). Некий вариант обвивающей категории может допускать эти сплетения в дополнение к обвиваниям. Это аналогично идее о *твистовой эквивалентности* в теории алгебр Николса [32] (сходство здесь не обязатель-

Работа построена следующим образом. Для удобства читателя в разделе 2 мы напоминаем основные положения работы [28]; кратчайшая сводка того, что там делается, состоит в следующем: для алгебры Николса $\mathfrak{B}(X)$ можно построить категорию ее модулей ЙД, используя еще одно сплетенное векторное пространство Y (элементы которого будем называть “вертексами”, а соответствующие модули ЙД – “мультивертексными” модулями). В разделе 3 вводится дуальность и сопутствующие предположения, позволяющие записывать диаграммы типа (1.4). В разделе 4 все это применяется в частном случае алгебры Николса $\mathfrak{B}_p$ ранга 1 (зависящей от целого $p \geq 2$). В понятие “все это”, прежде всего, входят мультивертексные модули ЙД. Мы даем весьма явную конструкцию для важных классов этих модулей (см. приложение А), что позволяет доказать разложение (1.2), а также установить соотношения дуальности между этими модулями. Кроме того, мы исследуем их сплетения, находим ленточную структуру и, наконец, используем все это, чтобы вывести соотношения (1.1) из (1.4) для алгебры $\mathfrak{B}_p$. В приложении Б мы напоминаем основные свойства модулей ЙД над сплетенной алгеброй Хопфа.

2. АЛГЕБРА НИКОЛСА СКРИНИНГОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В данном разделе дается сводка основных положений работы [28].

Скрининги и $\mathfrak{B}(X)$. Наше рассмотрение основано на идее о том, что нелокальности, связанные со скрининговыми операторами – контуры кратного интегрирования такие, как

$$\begin{aligned} & \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} = \\ & = \iiint_{-\infty < z_1 < z_2 < z_3 < \infty} s_{i_1}(z_1) s_{i_2}(z_2) s_{i_3}(z_3) \end{aligned} \quad (2.1)$$

(где $s_j(z)$ – “скрининговые токи”) – позволяют ввести копроизведение посредством разрезания контура, которое в дальнейшем будем называть *деконкатенацией*:

$$\begin{aligned} \Delta: \text{---} \times \times \times \text{---} & \mapsto \text{---} \times \times \times \text{---} \otimes \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \times \times \text{---} \otimes \text{---} \times \text{---} + \\ & + \text{---} \text{---} \times \text{---} \otimes \times \times \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \otimes \times \times \times \end{aligned} \quad (2.2)$$

(далее символ линии разреза будет пониматься как $\otimes$). Произведение “линий, населенных крестиками”, также определяется как “квантовое” тасующее (shuffle) произведение [61]; оно включает сплетения между любыми двумя скринингами. Хорошо известно, что эти три структуры – копроизведение, произведение и сплетение – удовлетворяют аксиомам сплетенной биабелы [61]. Кроме того, антипод задается посредством обращения контура. Тогда аксиомы сплетенной алгебры Хопфа удовлетворяются для весьма общего сплетения (гораздо более общего, чем это может потребоваться в конформных теориях поля)⁵⁾. Алгебра, порожденная одинарными крестиками, индивидуальными скринингами, есть алгебра Николса $\mathfrak{B}(X)$ сплетенного векторного пространства X , линейно порожденного различными сортами скринингов (число которых называется рангом алгебры Николса).

но чисто формальное, если учесть, что для алгебры $\mathfrak{B}_p$ сплетение “голых вертексных операторов” диагонально).

⁵⁾ Довольно занятно проследить, как аксиомы сплетенной алгебры Хопфа выполняются в терминах слияния и разрезания контурных интегралов [28].

Алгебра Николса. Алгебры Николса (“биалгебры типа один” из работы [29]) представляют собой важнейший элемент в программе классификации обычных алгебр Хопфа определенного типа (см. работы [30]–[32], [37] и приведенную в них библиографию). Алгебры Николса имеют несколько определений, эквивалентность которых установлена в работах [30] и [62]. Алгебру Николса $\mathfrak{B}(X)$ сплетенного линейного пространства X можно охарактеризовать как такую градуированную сплетенную алгебру Хопфа $\mathfrak{B}(X) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{B}(X)^{(n)}$, что $\mathfrak{B}(X)^{(1)} = X$, причем это последнее пространство совпадает с пространством всех примитивных элементов $P(X) = \{x \in \mathfrak{B}(X) \mid \Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$ и порождает как алгебра всю $\mathfrak{B}(X)$. Алгебры Николса появились независимо в работе [63] при построении квантового дифференциального исчисления как “полностью сплетенные обобщения” симметрических алгебр:

$$\mathfrak{B}(X) = k \oplus X \oplus \left(\bigoplus_{r \geq 2} X^{\otimes r} \right) / \ker \mathfrak{S}_r,$$

где $\mathfrak{S}_r$ – полный сплетенный симметризатор (“сплетенный факториал”)⁶⁾.

Пространство вертексов Y . Помимо сплетенного линейного пространства X , линейно порожденного различными сортами скринингов, мы вводим пространство вертексных операторов, взятых в фиксированной точке:

$$Y = \text{Span}(V_\alpha(0)), \quad (2.3)$$

где α пробегает множество различных примарных полей в данной модели конформной теории поля. Из конформной теории извлекаются сплетения $\Psi : X \otimes X \rightarrow X \otimes X$ любых двух скринингов (что всегда применяется к двум скринингам, лежащим на одной линии, как на диаграмме (2.1)), а также сплетения $\Psi : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ и $\Psi : Y \otimes X \rightarrow X \otimes Y$ скрининга и вертекса (также на одной линии, как ниже на диаграмме (2.4)) и, наконец, сплетения $\Psi : Y \otimes Y \rightarrow Y \otimes Y$ двух любых вертексов, однако без последнего в значительной части нашего построения можно обойтись.

Два сплетенных линейных пространства X и Y – это все, что нам понадобится в данном разделе; сплетение Ψ может быть максимально общим.

Одетые вертексные операторы как $\mathfrak{B}(X)$ -модуль. Мы используем сплетенное пространство Y для построения $\mathfrak{B}(X)$ -модулей. В конформной теории поля их элементы иногда называют *одетыми/экранированными вертексными операторами*, например

$$\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \end{array} = \iint_{-\infty < x_1 < x_2 < 0} s_{i_1}(x_1) s_{i_2}(x_2) V_\alpha(0) \int_{0 < x_3 < \infty} s_{i_3}(x_3). \quad (2.4)$$

Можно считать, что $\times$ и $\circ$ снабжены подходящими индексами, определяемыми правой частью; но лучше опустить все эти индексы и считать, что $\times$ и $\circ$ соответственно обозначают пространства X и Y целиком, что мы и будем предполагать ниже.

⁶⁾Важная техническая подробность, отмеченная в [64], [65], заключается в различии между квантовыми симметрическими алгебрами [66] и собственно алгебрами Николса; последние выделяются условием, что сплетение должно быть “жестким” (rigid). В частности, это гарантирует, что дуальные пространства X^* представляют собой объекты в той же сплетенной категории, что и X .

(скобки расставлены, чтобы подчеркнуть структуру, а знак возникает из обращения направлений при интегрировании). Например,

$$S_5 = - \text{[diagram]}. \quad .$$

Бимодули Хопфа, о которых говорилось выше, имеют вид (некоторых подпространств в) $\bigoplus_{r,s \geq 0} X^{\otimes r} \otimes Y \otimes X^{\otimes s}$, причем левое и правое действия алгебры $\mathfrak{B}(X)$ на них также выражаются в терминах квантовых перетасовок следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Ш}_{r,s+1+t} : X^{\otimes r} \otimes (X^{\otimes s} \otimes Y \otimes X^{\otimes t}) &\rightarrow \bigoplus_{i=0}^r X^{\otimes(s+r-i)} \otimes Y \otimes X^{\otimes(t+i)}, \\ \text{Ш}_{s+1+t,r} : (X^{\otimes s} \otimes Y \otimes X^{\otimes t}) \otimes X^{\otimes r} &\rightarrow \bigoplus_{i=0}^r X^{\otimes(s+r-i)} \otimes Y \otimes X^{\otimes(t+i)}. \end{aligned}$$

Диаграммы для алгебр Хопфа. Четыре операции на би(ко)модулях сплетенной алгебры Хопфа $\mathfrak{B}$ стандартным образом изображаются как

$$\text{[diagram 1]}, \quad \text{[diagram 2]}, \quad \text{[diagram 3]}, \quad \text{[diagram 4]};$$

они представляют соответственно структуры левого модуля $\mathfrak{B} \otimes \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$, левого ко-модуля $\mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{B} \otimes \mathcal{Z}$, правого модуля $\mathcal{Z} \otimes \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{Z}$ и правого комодуля $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} \otimes \mathfrak{B}$. Произведение и копроизведение в самой сплетенной алгебре Хопфа изображаются как [diagram 5] и [diagram 6] . Сплетение по-прежнему обозначается как [diagram 7] , но, в отличие от диаграмм для группы кос, каждая линия теперь представляет собой копию алгебры $\mathfrak{B}$ или $\mathfrak{B}$ -(ко)модуль.

Присоединенное действие и модули ЙД. Левое и правое действия сплетенной алгебры Хопфа $\mathfrak{B}$ на ее бимодули Хопфа $\mathcal{Z}$ порождают *левое присоединенное действие* $\mathfrak{B} \otimes \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$:

$$\text{[diagram 8]} = \text{[diagram 9]}. \quad (2.8)$$

Фундаментальный факт состоит в том, что *пространство правых коинвариантов в бимодуле Хопфа инвариантно относительно левого присоединенного действия*; это в действительности приводит к эквивалентности категорий бимодулей Хопфа и модулей ЙД [63], [67], [68], [71]. Мы напоминаем основные сведения о модулях ЙД в приложении Б. В нашем случае, когда модули линейно порождены одетыми вертексными операторами, правые коинварианты (все те y , которые отображаются как

$y \mapsto y \otimes 1$ при правом действии) представляют собой просто вертексные операторы, одетые скринингами только слева, т.е. элементы пространств $X^{\otimes r} \otimes Y$, например $\text{---} \times \text{---} \times \circ \text{---}$. В терминах диаграмм для группы кос (когда линии представляют пространства X и Y) пример левого присоединенного действия на таких пространствах имеет вид

$$\begin{array}{c} \times \otimes \times \times \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagup \quad \diagdown \quad | \quad | \end{array} - \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \end{array} - \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \end{array}, \quad (2.9)$$

где один “новый” крестик может попасть в каждое из трех возможных положений двумя способами, причем в одном случае перед ним стоит знак плюс, а в другом – минус (примерно это и ожидается от “присоединенного” действия). Тот факт, что крестик никогда не остается справа от $\circ$, является проявлением приведенного выше утверждения об инвариантности пространства правых коинвариантов. Это означает, что некоторое число членов, возникающих при выражении (2.8) в терминах диаграмм для группы кос, сокращается. В действительности левое присоединенное действие (2.8) можно выразить более экономно следующим образом.

Определим модифицированное левое действие $\curvearrowleft$ алгебры $\mathfrak{B}(X)$ на ее бимодулях Хопфа, порожденных одетыми вертексными операторами, позволяя “новым” крестикам появляться только слева от $\circ$, например

$$\begin{array}{c} \times \otimes \times \times \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagup \quad \diagdown \quad | \quad | \end{array} \quad (2.10)$$

(дополнительные крестики могут исходно располагаться и справа от вертекса $\circ$; действие их не замечает). В общем случае $\curvearrowleft$ является отображением:

$$\curvearrowleft = \Psi_{r,s} : X^{\otimes r} \otimes (X^{\otimes s} \otimes Y) \rightarrow X^{\otimes(r+s)} \otimes Y. \quad (2.11)$$

Аналогично модифицированное правое действие $\curvearrowright$ на пространстве правых коинвариантов определяется следующим образом. Сначала новые крестики сплетаются с вертексом, а затем располагаются с помощью тасующих перестановок во всех возможных положениях относительно “старых” крестиков:

$$\begin{array}{c} \times \times \circ \times \times \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \quad | \quad | \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \diagup \quad \diagdown \quad | \quad | \end{array},$$

что в общем случае есть

$$\curvearrowright = \Psi_{s,r} \circ (\text{id}^{\otimes s} \otimes \Psi_{1,r}) : (X^{\otimes s} \otimes Y) \otimes X^{\otimes r} \rightarrow X^{\otimes(s+r)} \otimes Y, \quad (2.12)$$

где $\Psi_{s,r}$ – сплетение s -кратного тензорного произведения с r -кратным тензорным произведением.

Действия $\cup$ и $\cap$ сохраняют пространства правых коинвариантов и коммутируют друг с другом. “Экономное” выражение для присоединенного действия (2.8) имеет вид [28]

$$\cup = \text{diagram with cap, crossing, and circle } s$$
(2.13)

Эта диаграмма представляет собой отображение

$$\triangleright_{r,s} \equiv \sum_{i=0}^r \Psi_{r-i,s+i} (\Psi_{s,i} \Psi_{1,i}^s \mathcal{S}_i^{\uparrow(s+1)} \Psi_{i,s+1})^{\uparrow(r-i)} : X^{\otimes r} \otimes (X^{\otimes s} \otimes Y) \rightarrow X^{\otimes(s+r)} \otimes Y.$$
(2.14)

Мультивертексные модули ЙД. Более общим образом можно построить мультивертексные $\mathfrak{B}(X)$ -модули ЙД, помещая два или более вертексов (пространств Y) на одну прямую, например

$$\text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \quad \text{или} \quad \text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \circ \text{---}.$$
(2.15)

Эти диаграммы представляют $X \otimes Y \otimes X^{\otimes 3} \otimes Y$ и $X \otimes Y \otimes X^{\otimes 2} \otimes Y \otimes X \otimes Y$ соответственно (вообще говоря, вместо копий одного и того же пространства Y можно брать различные пространства, однако в данном контексте все они одинаковы). По определению действие и кодействие алгебры $\mathfrak{B}(X)$ на них задаются как “кумулятивное” левое присоединенное действие и деконкатенация до первого $\circ$.

“Кумулятивное” присоединенное действие означает, что все $\circ$, кроме крайнего правого, рассматриваются по отношению к данному действию единообразно со всеми $\times$: присоединенное действие $X^{\otimes r}$ на пространстве $X^{\otimes s} \otimes Y \otimes X^{\otimes t} \otimes Y$ в двухвертексном модуле выражается как $\triangleright_{r,s+1+t}$. Например, левое присоединенное действие $\text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \triangleright \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \circ \text{---}$ определяется диаграммами для группы кос, в точности соответствующими диаграммам в правой части (2.9), если соответствующая нить представляет не $\times = X$, а $\circ = Y$. $\mathfrak{B}(X)$ -кодействие посредством деконкатенации до первого вертекса означает, например, что в каждой из диаграмм в (2.15) можно деконкатенировать самое большее один $\times$.

Для мультивертексных модулей ЙД присоединенное действие (2.13) имеет место, если $\cup$ понимается как “кумулятивное” действие, сохраняющее правые коинварианты; например,

$$\text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \circ \text{---}$$

задается в точности диаграммами для группы кос в правой части (2.10), где вторая нить представляет собой не $\times = X$, а $\circ = Y$.

которые представляют собой морфизмы в категории и удовлетворяют аксиомам

$$\begin{array}{c} \text{hook-left} \\ \text{hook-right} \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{hook-right} \\ \text{hook-left} \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \end{array},$$

где две прямые линии – это $\text{id}_{\vee \mathbb{Z}}$ и $\text{id}_{\mathbb{Z}}$. Отсюда следует, что

$$\text{hook-left} \text{ hook-right} = \text{hook-right} \text{ hook-left},$$

и аналогично для “уничтожения”.

Модуль $\vee \mathbb{Z}$, дуальный к лево-левому $\mathfrak{B}$ -модулю ЙД $\mathbb{Z}$, является лево-левым $\mathfrak{B}$ -модулем ЙД с действием и кодействием, которые мы временно обозначим через $\text{hook-left} \oplus$ и $\text{hook-right} \oplus$ и которые определяются как [68]

$$\begin{array}{c} \text{hook-left} \oplus \\ \text{hook-right} \oplus \end{array} = \begin{array}{c} \text{hook-left} \\ \text{hook-right} \end{array} \text{ и } \begin{array}{c} \text{hook-left} \oplus \\ \text{hook-right} \oplus \end{array} = \begin{array}{c} \text{hook-left} \\ \text{hook-right} \end{array} \text{ с } s \text{ и } s^{-1}. \quad (3.1)$$

Эти определения эквивалентны свойствам (из которых, среди прочего, следует, что “уничтожение” есть морфизм $\mathfrak{B}$ -модулей-комодулей)

$$\begin{array}{c} \text{hook-left} \oplus \\ \text{hook-right} \oplus \end{array} = \begin{array}{c} \text{hook-left} \\ \text{hook-right} \end{array} \text{ и } \begin{array}{c} \text{hook-left} \oplus \\ \text{hook-right} \oplus \end{array} = \begin{array}{c} \text{hook-left} \\ \text{hook-right} \end{array} \text{ с } s \text{ и } s^{-1}. \quad (3.2)$$

Для полноты докажем свойство ЙД для $\text{hook-left} \oplus$ и $\text{hook-right} \oplus$. С учетом соотношения (3.2) проще всего проверить аксиому ЙД, установив, что

$$\begin{array}{c} \text{hook-left} \oplus \\ \text{hook-right} \oplus \end{array} = \begin{array}{c} \text{hook-left} \\ \text{hook-right} \end{array} \text{ с } s \text{ и } s^{-1}. \quad (3.3)$$

“Передвигая” новое действие, а затем кодействие на другую сторону, мы видим, что левая часть (3.3) в силу приведенных выше свойств равна

В первой диаграмме мы вставили $\mathcal{S}$ в месте, указанном верхней галочкой $\checkmark$, и $\mathcal{S}^{-1}$ на той же линии в месте, указанном нижней галочкой, после чего использовали свойства антипода

Отсюда немедленно получается вторая из приведенных выше диаграмм, которая является не чем иным, как правой частью аксиомы ЙД, предполагаемой для модуля. После ее применения (третья диаграмма) и после еще одного применения свойств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^{-1}$ получаем четвертую диаграмму, после чего немедленно замечаем, что она совпадает с правой частью соотношения (3.3), если переписать ее, “передвинув” $\bigoplus$ и $\bigotimes$ на противоположную сторону.

3.2. Предположение о жесткости категории. Будем далее предполагать, что категория n -вертексных $\mathfrak{B}$ -модулей ЙД является жесткой; это означает, что дуальные модули являются модулями в той же категории (в нашем случае мульти-вертексными $\mathfrak{B}$ -модулями ЙД), а действие и кодействие, определенные в (3.1), те же, что и определяемые в (2.16), и, следовательно, что отображение “уничтожения” удовлетворяет свойствам

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \quad (3.4)$$

для любой пары $\mathfrak{B}$ -модулей ЙД. Очевидно, при этом также верны соотношения

$$(3.5)$$

3.3. Если категория ${}^{\mathfrak{B}}\mathcal{UD}$ $\mathfrak{B}$ -модулей ЙД является жесткой, то для каждого $z \in {}^{\mathfrak{B}}\mathcal{UD}$ имеется морфизм $\chi_z : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$, определяемый при любом $\mathcal{Y} \in {}^{\mathfrak{B}}\mathcal{UD}$ как

$$(3.6)$$

где B определено в (Б.3), а ϑ – любой морфизм $\mathfrak{B}$ -модулей-комодулей. На второй диаграмме “квадрат относительного антипода” Беспалова [67]

$$(3.7)$$

возникает в силу (3.4) (см. работы [68], [72] по поводу его свойств и применений).

Отображение, определяемое диаграммой (3.6), является морфизмом $\mathfrak{B}$ -модулей-комодулей, что следует из общих рассуждений: таковыми же являются B , “уничтожение” и “рождение” (и ϑ). Полезно также убедиться в этом путем преобразований

диаграмм (для краткости будем временно использовать запись θ для ϑ):

В первом равенстве мы воспользовались только аксиомой ЙД, применяя первую диаграмму для B^2 из (Б.3); ассоциативность действия используется во втором из приведенных выше равенств; еще одно применение ассоциативности в нижней части третьей диаграммы позволяет распознать левую часть диаграммы (Б.1); затем свойство ЙД применяется в третьем равенстве вместе с первым свойством из (3.5), что приводит к четвертой диаграмме; в этой диаграмме мы пользуемся свойством σ_2 из (3.7) и первым свойством из (3.4) для получения последней, пятой диаграммы, где схлопывается “пузырь с антиподом”, откуда и следует, что в самом деле

$$\text{Diagram (3.6) with loop} = \text{Diagram (3.6) without loop}.$$

Аналогично можно проверить коммутативность (3.6) с кодействием.

3.4. Ленточная структура. Ленточная структура представляет собой такой морфизм $\vartheta : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ для каждого объекта $\mathcal{Y}$, что

$$\begin{array}{c} \vartheta \quad \vartheta \\ \text{---} \quad \text{---} \\ B^2 \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \vartheta \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array}. \quad (3.8)$$

Коль скоро она существует, выбор $\vartheta = \vartheta$ в (3.6) делает χ_Z “мультипликативным” по $\mathbb{Z}$. Чтобы показать это, вычислим $\chi_W(\chi_Z(\mathcal{Y}))$, сдвигая одну из диаграмм вдоль

линии $\mathcal{Y}$ в середину другой, а затем явно выписывая подробности:

(3.9)

В последней диаграмме можно узнать диагональное кодействие (две галочки $\checkmark$) и действие (два левых действия $\blacktriangleright$ ниже соответствующих галочек) на тензорном произведении двух модулей ЙД, как в (Б.2). В нижней правой части диаграммы, вспоминая, что θ дается композицией ϑ и $\otimes$, вычисляем

где первые три равенства представляют собой элементарные (и хорошо известные) перекладывания ниток, четвертое использует свойство (3.4), а равенство с галочкой проверяется путем кратного применения аксиомы ЙД в его правой части. В верхнюю часть шестой диаграммы входит B^2 , а в нижнюю – диагональное действие и

кодействие (Б.2), что дает последнее равенство. Отсюда можно заключить, что если выполнено (3.8), то

Подстановка этого результата в (3.9) показывает, что χ действительно “мультипликативно”: $\chi_W(\chi_Z(\mathcal{Y})) = \chi_{W \otimes Z}(\mathcal{Y})$.

4. АЛГЕБРА НИКОЛСА РАНГА 1

Мы применяем материал из предыдущих разделов к случаю алгебры Николса $\mathfrak{B}_p$ ранга 1, на связь которой с $(p, 1)$ -логарифмическими моделями конформной теории поля было указано в работе [28]. Ниже считается фиксированным целое $p \geq 2$.

Обозначения. Фиксируем примитивный $(2p)$ -й корень из единицы $q = e^{i\pi/p}$ и введем q -биномиальные коэффициенты

$$\left\langle \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\rangle = \frac{\langle r \rangle!}{\langle s \rangle! \langle r-s \rangle!}, \quad \langle r \rangle! = \langle 1 \rangle \dots \langle r \rangle, \quad \langle r \rangle = \frac{q^{2r} - 1}{q^2 - 1},$$

которые предполагаются специализированными к значению $q = q$.

Мы иногда используем обозначение $(a)_N = a \pmod{N}$, $(a)_N \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

4.1. Сплетенная алгебра Хопфа $\mathfrak{B}_p$. Алгебра Николса ранга 1 $\mathfrak{B}_p$ есть алгебра $\mathfrak{B}(X)$ для одномерного сплетенного линейного пространства X . Фиксируем элемент F (единственный скрининг на языке конформной теории поля) в качестве базиса в X . Сплетение, взятое из конформной теории, записывается как

$$\Psi(F(r) \otimes F(s)) = q^{2rs} F(s) \otimes F(r). \quad (4.1)$$

Тогда тасующее произведение (2.6) принимает вид

$$F(r) F(s) = \left\langle \begin{matrix} r+s \\ r \end{matrix} \right\rangle F(r+s),$$

а копроизведение (2.2) – вид $\Delta: F(r) \mapsto \sum_{s=0}^r F(s) \otimes F(r-s)$. Антипод, определенный в (2.7), действует как $\mathcal{S}(F(r)) = (-1)^r q^{r(r-1)} F(r)$.

Алгебра $\mathfrak{B}_p$ есть линейная оболочка элементов $F(r)$, где $0 \leq r \leq p-1$. Ее также можно рассматривать как алгебру, порожденную единственным элементом F таким, что $F(r) = 1/\langle r \rangle! \cdot F^r$, $r \leq p-1$, причем $F^p = 0$. Будем писать $F = F(1)$.

Поскольку пространство X теперь является одномерным, можно считать, что $- \times -$ есть F , и писать

$$F(r) = \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \quad (r \text{ крестиков}).$$

4.2. $\mathfrak{B}_p$ -модули ЙД. Мы переносим построение $\mathfrak{B}(X)$ -модулей ЙД из раздела 2 на случай алгебры $\mathfrak{B}_p$. Нам потребуется еще одно сплетенное векторное пространство Y , линейно порожденное вертексными операторами из соответствующей модели конформной теории поля.

4.2.1. Вертексы. Для $(p, 1)$ -модели, соответствующей алгебре $\mathfrak{B}_p$ (см. [45]), Y является $2p$ -мерным пространством,

$$Y = \text{span}(V^a \mid a \in \mathbb{Z}_{4p}),$$

с диагональным сплетением

$$\Psi(V^a \otimes V^b) = q^{ab/2} V^b \otimes V^a, \quad (4.2)$$

где

$$\Psi(V^a \otimes F(r)) = q^{-ar} F(r) \otimes V^a, \quad \Psi(F(r) \otimes V^a) = q^{-ar} V^a \otimes F(r). \quad (4.3)$$

Этого достаточно для вычисления “кумулятивного” присоединенного $\mathfrak{B}_p$ -действия на мультивертексных модулях ЙД, как описано ниже.

Далее мы полагаем, что целые числа $a, b, \dots$ рассматриваются по модулю $4p$.

4.2.2. Мультивертексные $\mathfrak{B}_p$ -модули ЙД. В разделе 2 мы видели, что мультивертексные модули ЙД (см. (2.15)) можно воспринимать как по существу “комбинаторное” предписание того, как в соответствии с правилами сплетения крестики “заселяют” отрезки прямой, отделенные один от другого вертексными операторами, например $\text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \circ \text{---}$, где $\times = X$ и $\circ = Y$ (для конечномерной алгебры Николса на каждом “отрезке” может находиться только конечное число крестиков). В случае алгебры ранга 1 можно считать, что каждый крестик представляет элемент F , а каждый отрезок полностью описывается лишь количеством элементов F , живущих на нем. Например, всякий двухвертексный модуль ЙД является линейной оболочкой элементов

$$V_{s,t}^{a,b} = \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \overset{a}{\circ} \text{---} \times \text{---} \overset{b}{\circ} \text{---}, \quad (4.4)$$

где s и t не превосходят $p-1$ (на рисунке $s = 2$ и $t = 1$), а обозначения a и b указывают на V^a и V^b . Поскольку сплетение диагонально, имеется $\mathfrak{B}_p$ -модуль-комодуль при каждом фиксированных a и b (и аналогично для мультивертексных модулей).

Одновертексные $\mathfrak{B}_p$ -модули ЙД линейно порождаются элементами

$$V_s^a = \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \overset{a}{\circ} \text{---} \quad (s \text{ крестиков}), \quad (4.5)$$

где s бегает по подмножеству в $[0, \dots, p-1]$. Во всех случаях $\mathfrak{B}_p$ действует согласно “деконкатенации до первого вертекса”, т. е.

$$\delta V_s^a = \sum_{r=0}^s F(r) \otimes V_{s-r}^a, \quad \delta V_{s,t}^{a,b} = \sum_{r=0}^s F(r) \otimes V_{s-r,t}^{a,b}$$

и аналогично для $V_{s,t,u}^{a,b,c}$ и т. д. Тогда действие алгебры $\mathfrak{B}_p$ (которое является левым присоединенным действием (2.8)) вычисляется как

$$F \blacktriangleright V_s^a = \xi \langle s - a \rangle \langle s + 1 \rangle V_{s+1}^a, \quad \xi = 1 - q^2,$$

а кумулятивное присоединенное действие на мультивертексном пространстве вычисляется как

$$\begin{aligned} F \blacktriangleright V_{s,t}^{a,b} &= \xi \langle s + 2t - a - b \rangle \langle s + 1 \rangle V_{s+1,t}^{a,b} + \xi q^{2s-a} \langle t - b \rangle \langle t + 1 \rangle V_{s,t+1}^{a,b}, \\ F \blacktriangleright V_{s,t,u}^{a,b,c} &= \xi \langle s + 2t + 2u - a - b - c \rangle \langle s + 1 \rangle V_{s+1,t,u}^{a,b,c} + \\ &+ q^{2s-a} \xi \langle t + 2u - b - c \rangle \langle t + 1 \rangle V_{s,t+1,u}^{a,b,c} + \\ &+ q^{2s+2t-a-b} \xi \langle u - c \rangle \langle u + 1 \rangle V_{s,t,u+1}^{a,b,c} \end{aligned}$$

и т. д.

Сплетение следует из соотношений (4.1)–(4.3), например

$$\Psi(V_s^a \otimes V_t^b) = q^{(a-2s)(b-2t)/2} V_t^b \otimes V_s^a. \quad (4.6)$$

4.3. Типы модулей и разложение. Рассмотрим теперь категорию $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД более подробно: найдем, как одновертексное и двухвертексное пространства разлагаются на неразложимые $\mathfrak{B}_p$ -модули ЙД. Сначала забудем о сплетении и будем рассматривать только структуру модулей-комодулей; действие и кодействие при этом связаны аксиомой ЙД, но мы будем избегать упоминаний о модулях ЙД до того, как мы перейдем к сплетению.

4.3.1. Модули-комодули, построенные явным образом в приложении А, таковы:

- простые r -мерные модули-комодули $\mathcal{X}(r)$, $1 \leq r \leq p$; при $r = p$ мы иногда будем использовать специальное обозначение $\mathcal{S}(p) = \mathcal{X}(p)$;
- p -мерные расширения

$$\mathcal{V}[r] = \begin{array}{c} \mathcal{X}(p-r) \\ \swarrow \\ \mathcal{X}(r) \end{array}, \quad 1 \leq r \leq p-1, \quad (4.7)$$

где стрелка означает, что $\delta\mathcal{X}(p-r)$ содержится в сумме “очевидной” части $\mathfrak{B}_p \otimes \mathcal{X}(p-r)$ и $\mathfrak{B}_p \otimes \mathcal{X}(r)$;

- $2p$ -мерные неразложимые модули-комодули $\mathcal{P}[r]$ со структурой подфакторов

$$\mathcal{P}[r] = \begin{array}{ccc} & \mathcal{X}(p-r) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{X}(r) & & \mathcal{X}(r) \\ \searrow & \swarrow & \\ & \mathcal{X}(p-r) & \end{array}, \quad 1 \leq r \leq p-1. \quad (4.8)$$

4.3.2. В приложении А также показано, что p^2 -мерное *одновертексное пространство*

$$\mathbb{V}_p(1) \equiv \text{Span}(V_s^a \mid 0 \leq a, s \leq p-1)$$

разлагается на $\mathfrak{B}_p$ -модули-комодули как

$$\mathbb{V}_p(1) = \mathcal{S}(p) \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq r \leq p-1} \mathcal{V}[r] \right), \quad (4.9)$$

а p^4 -мерное *двухвертексное пространство*

$$\mathbb{V}_p(2) \equiv \text{Span}(V_{s,t}^{a,b} \mid 0 \leq a, b, s, t \leq p-1)$$

разлагается как

$$\mathbb{V}_p(2) = p^2 \mathcal{S}(p) \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq r \leq p-1} 2r(p-r) \mathcal{V}[r] \right) \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq r \leq p-1} (p-r)^2 \mathcal{P}[r] \right) \quad (4.10)$$

Мультивертексные пространства порождают “зигзагообразные” модули ЙД, которые мы здесь не рассматриваем.

4.3.3. *Обозначения.* По сравнению с теорией представлений алгебр Ли роль векторов старшего веса в нашем случае играют левые коинварианты V_0^a и $V_{0,t}^{a,b}$. Если модуль-комодуль одного из перечисленных выше типов $\mathcal{A} = \mathcal{X}, \mathcal{V}$ или $\mathcal{P}$ построен исходя из левого коинварианта, мы будем использовать обозначение $\mathcal{A}_0^{\{a\}}$ или $\mathcal{A}_{0,t}^{\{a,b\}}$, явно указывающее этот коинвариант, а иногда будем указывать и размерность, используя запись $\mathcal{A}_{0,t}^{\{a,b\}}(r)$ (хотя размерность и определена единственным образом значениями a, t, b и типом модуля).

4.3.4. Модули-комодули, которые можно построить исходя из одновертексных коинвариантов V_0^a , немедленно классифицируются, как это показано в п. А.1. Модуль-комодуль, *порожденный* из V_0^a посредством $\mathfrak{B}_p$ -действия, изоморфен $\mathcal{X}(r)$, коль скоро $(a)_p = r-1$ (здесь $1 \leq r \leq p$). Если $r \leq p-1$, то мы немедленно получаем расширение (4.7).

4.3.5. Программа классификации двухвертексных $\mathfrak{B}_p$ -модулей-комодулей по их характеристическим левым коинвариантам $V_{0,t}^{a,b}$ состоит в рассмотрении следующих случаев, которые могут иметь место при действии $F(s)$ на левый коинвариант.

1. Элементы $F(s) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b}$ не равны нулю и не являются коинвариантами ни при каком $s, 1 \leq s \leq p-1$. В этом случае имеются следующие возможности:

а) $F(s) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b}$ является коинвариантом, т. е. $F(s) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b} = \text{const} \cdot V_{0,t+s}^{a,b}$, для некоторого $s \leq p-1$;

б) $F(s) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b}$ не является коинвариантом ни при каких $s \leq p-1$.

2. Элемент $F(s) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b} = 0$ при некотором $s \leq p-1$. В этом случае возникают дальнейшие возможности:

а) $F(s') \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b}$ является коинвариантом для некоторого $s' < s$;

б) $F(s') \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b}$ не является коинвариантом ни при каких $s' < s$, тогда мы будем различать два случая:

(1) $V_{0,t}^{a,b}$ лежит в образе F ,

(2) $V_{0,t}^{a,b}$ не лежит в образе F .

В приложении А показано, что эти случаи разрешаются следующим образом в терминах параметров a , t , и $r = (a + b - 2t)_p + 1$.

СЛУЧАЙ 1а: если $1 \leq r \leq p - 1$ и при этом $t \leq (a)_p - r$ или $(a)_p + 1 \leq t \leq p - r - 1$, то данный левый коинвариант является самым левым коинвариантом в (1.3), а порожденный из него модуль ЙД является “левой нижней половиной” $\mathcal{L}(r)$ в модуле $\mathcal{P}[r]$ (см. п. А.2.3).

СЛУЧАЙ 1б: если $r = p$, то $\mathcal{X}(p) \equiv \mathcal{S}(p)$ порождается из левого коинварианта.

СЛУЧАЙ 2а не реализуется.

СЛУЧАЙ 2б(1): если $1 \leq r \leq p - 1$ и при этом $t \geq p - r + (a)_p + 1$ или $p - r \leq t \leq (a)_p$, то из левого коинварианта порождается нижний подмодуль ЙД $\mathcal{B}(r)$ в $\mathcal{P}[p - r]$.

СЛУЧАЙ 2б(2): если $1 \leq r \leq p - 1$ и при этом либо $t \leq (a)_p$ и $(a)_p - r + 1 \leq t \leq p - 1 - r$, либо $t \geq (a)_p + 1$ и $p - r \leq t \leq p - r + (a)_p$, то из левого коинварианта порождается $\mathcal{X}(r)$.

4.4. Секторы сплетения. Модули-комодули $\mathcal{X}(r)$ и другие приведенные выше модули-комодули удовлетворяют аксиоме ЙД. Если мы рассматриваем их как $\mathfrak{B}_p$ -модули ЙД, то изоморфные модули-комодули могут различаться своими сплетениями. Так и происходит: например, сдвиг $a \rightarrow a + p$ в $\mathcal{X}_0^{\{a\}}$ или $\mathcal{X}_{0,t}^{\{a,b\}}$ не оказывает влияния на структуру модуля-комодуля, описанную в приложении А, однако сплетения с элементами алгебры $\mathfrak{B}_p$ могут приобрести дополнительный знак в соответствии с (4.3). Таким образом, мы имеем пары $(\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_{\nu+1})$, $\nu \in \mathbb{Z}_2$, изоморфных модулей-комодулей, которые различаются знаком, возникающим в их сплетениях с элементами $\mathfrak{B}_p$. В частности, имеются $2p$ неизоморфных простых модулей ЙД.

Далее, эти модули ЙД можно рассматривать как элементы сплетенной категории, сплетение в которой (см. диаграмму (Б.3)) включает в себя (4.6). Зависимость от a в (4.6) является зависимостью по модулю $4p$, поэтому мы получаем не пары, а четверки $(\mathcal{A}_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}_4}$, в которых $\mathcal{A}_\nu$ различаются сплетениями с другими подобными модулями. В частности, в данной сплетенной категории $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД имеются $4p$ неизоморфных простых объектов.

Удобно записать $a = (a)_p - \nu p$, $\nu \in \mathbb{Z}_4$ [28], и ввести обозначение $\mathcal{X}(r)_\nu$ для простых модулей ЙД, где

$$\mathcal{X}_0^{\{a\}} \cong \mathcal{X}(r)_\nu \quad \text{при} \quad a = r - 1 - \nu p.$$

Как и ранее, r – размерность, а ν мы будем иногда называть сектором сплетения или индексом сплетения. При $\nu \in \mathbb{Z}_4$ все изоморфизмы рассматриваются в сплетенной категории $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД. “Четверная структура” возникает совершенно аналогично и для других модулей, включая те, которые реализуются в мультивертексных пространствах; например, для любых $a, b \in \mathbb{Z}$ имеем изоморфизмы простых модулей ЙД, реализованных в двухвертексном пространстве (ср. с утверждением (А.10)!): $\mathcal{X}_{0,t}^{\{a,b\}} \cong \mathcal{X}(r)_\nu$, если $a + b - 2t = r - 1 - \nu p$ и выполнено (А.8) или (А.9). Для приводимых расширений, подобных (4.7), два подфактора имеют соседние индексы сплетения, и мы по соглашению используем один из них в обозначении всего приводимого модуля ЙД:

$$\mathcal{V}[r]_\nu = \begin{array}{c} \swarrow \mathcal{X}(p-r)_{\nu+1} \\ \mathcal{X}(r)_\nu \end{array}, \quad (4.11)$$

при этом $\mathcal{V}_{0,t}^{\{a,b\}}[r]_\nu \cong \mathcal{V}[r]_\nu$, коль скоро $a + b - 2t = r - 1 - \nu p$ и выполнено (A.8) или (A.9).

В диаграмме (4.8) индексы сплетения принимают три последовательных значения, и мы будем использовать самое левое из них в обозначении всего приводимого модуля ЙД, что и дает запись (1.3), где $\mathcal{P}_{0,t}^{\{a,b\}}[r]_\nu \cong \mathcal{P}[r]_\nu$, коль скоро $a + b - 2t = r - 1 - \nu p$ и выполнено (A.19).

В приведенных выше формулах и диаграммах $\nu \in \mathbb{Z}_4$, если модули рассматриваются как объекты сплетенной категории $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД. Однако если $\mathfrak{B}_p$ -модули ЙД рассматриваются как обвивающая категория, то секторы сплетения ν и $\nu + 2$ становятся неразличимыми, и потому $\nu \in \mathbb{Z}_2$. В частности, в обвивающей категории $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД имеются $2p$ неизоморфных простых объектов.

4.5. Доказательство разложения (1.2). Разложение (1.2) можно вывести из списка, приведенного в п. 4.3.5, следующим образом. Слияние (2.16) двух одновертексных модулей представляет собой отображение (предполагается, что $a, b \leq p - 1$, чтобы избежать записей типа $(a)_p$ и $(b)_p$)

$$V_s^a \otimes V_t^b \mapsto \sum_{i=0}^b q^{-ai} \left\langle \begin{matrix} s+i \\ s \end{matrix} \right\rangle V_{s+i, t-i}^{a,b}. \quad (4.12)$$

При вычислении $\mathcal{X}_0^{\{a\}}(s) \otimes \mathcal{X}_0^{\{b\}}(t)$ данная формула применяется при $0 \leq s \leq a$ и $0 \leq t \leq b$. Тогда левые коинварианты, возникающие в правой части, суть $V_{0,u}^{a,b}$, где $0 \leq u \leq b$ и $u \leq a$. Однако условия, определяющие различные случаи в списке из п. 4.3.5, обладают тем замечательным свойством, что модуль $\mathcal{A}_{0,u}^{\{a,b\}}$, порожденный из каждого такого коинварианта, имеет следующий вид:

$$\mathcal{A}_{0,u}^{\{a,b\}} = \begin{cases} \mathcal{X}_{0,u}^{\{a,b\}}, & \text{если } a + b \leq p - 1, \\ \mathcal{X}_{0,u}^{\{a,b\}}, & \text{если } a + b \geq p \text{ и } u \geq a + b - p + 2, \\ \mathcal{L}_{0,u}^{\{a,b\}}, & \text{если } a + b \geq p \text{ и } a + b - 2u - p \geq 0, \\ \mathcal{S}_{0,u}^{\{a,b\}}, & \text{если } a + b \geq p \text{ и } a + b - 2u - p = -1, \\ \mathcal{B}_{0,u}^{\{a,b\}}, & \text{если } a + b \geq p \text{ и } a + b - 2u - p \leq -2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Это устанавливается (только при $0 \leq u \leq a, b \leq p - 1$) прямой проверкой в каждом из случаев из списка в конце п. 4.3.5. Модуль $\mathcal{L}_{0,u}^{\{a,b\}}$ представляет собой “нижнюю левую половину” модуля $\mathcal{P}_{0,u}^{\{a,b\}}$, а $\mathcal{B}_{0,u}^{\{a,b\}}$ – нижний под(ко)модуль в другом модуле $\mathcal{P}$; подробности приведены в п. A.2.3. Существенный момент состоит в том, что каждый модуль $\mathcal{L}_{0,u}^{\{a,b\}}$ можно расширить до $\mathcal{P}_{0,u}^{\{a,b\}}$ (в то же время модули $\mathcal{B}$ не интересны, поскольку они являются под(ко)модулями в $\mathcal{L}$, которые уже присутствуют). Мы далее утверждаем, что каждый модуль $\mathcal{L}$ появляется в $\mathcal{X}_0^{\{a\}}(s) \otimes \mathcal{X}_0^{\{b\}}(t)$ одновременно со всем модулем $\mathcal{P}$; это следует из подсчета размерностей и из того факта, что среди $V_{v,w}^{a,b}$, возникающих в правой части (4.12), больше нет левых коинвариантов (и, разумеется, из структуры модулей, которые описаны в приложении A).

Итак, установлено, что каждый модуль $\mathcal{L}$ появляется в (4.13) как под(ко)модуль в соответствующем $\mathcal{P}$, отсюда мы немедленно заключаем, что (4.13) эквивалентно (1.2).

4.6.2. *Двухвертексные модули.* Аналогично п. 4.6.1 для $U_{s,t}^{a,b}$, дуальных к двухвертексному базису,

$$\langle U_{s,t}^{a,b}, V_{u,v}^{c,d} \rangle = \delta_{a+c,0} \delta_{b+d,0} \delta_{s,u} \delta_{t,v},$$

из (3.1) получаем, что

$$F(r)U_{s,t}^{a,b} = \sum_{u=0}^r (-1)^r \mathfrak{q}^{r(r-1)-r(b+2s+2t)} c_{s-r+u, t-u}^{-a, -b}(r, u) U_{s-r+u, t-u}^{a,b}.$$

Сделав замены $s \rightarrow p-1-s$ и $t \rightarrow p-1-t$ и заметив, что коэффициенты $c_{s,t}^{a,b}(r, u)$ в (A.4) обладают симметрией

$$c_{s,t}^{a,b}(r, u) = \mathfrak{q}^{2r(r+2t+2s-a-b)} c_{p-1-s-r+u, p-1-t-u}^{-a-2, -b-2}(r, u), \quad r \geq u,$$

приходим к отождествлению

$$U_{s,t}^{a,b} = (-1)^{t+s} \mathfrak{q}^{(t+s+2)(2a+b+t+s-3)} V_{p-1-s, p-1-t}^{a-2, b-2}.$$

Таким образом, при спаривании

$$\langle V_{s,t}^{a,b}, V_{u,v}^{c,d} \rangle = (-1)^{s+t} \mathfrak{q}^{(s+t)(2a+b+1-s-t)} \delta_{a+c, -2} \delta_{b+d, -2} \delta_{s+u, p-1} \delta_{t+v, p-1}$$

модуль, левый дуальный к $\mathcal{P}_{0,t}^{\{a,b\}}$, можно отождествить с $\mathcal{P}_{0, p-r-t-1}^{\{-a-2, -b-2\}}$ (как и ранее, $a+b-2t = r-1-\nu p$, $1 \leq r \leq p-1$). Модуль, дуальный к (1.3), имеет следующую структуру:

$$\vee (\mathcal{P}_{0,t}^{\{a,b\}}[r]_{\nu}) = \mathcal{P}_{0, p-r-t-1}^{\{-a-2, -b-2\}}[r]_{-2-\nu} = \begin{array}{ccc} & \mathcal{X}(p-r)_{-\nu-1} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{X}(r)_{-2-\nu} & & \mathcal{X}(r)_{-\nu} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathcal{X}(p-r)_{-\nu-1} & \end{array}.$$

4.7. Ленточная структура. Положим

$$\vartheta V_s^a = \mathfrak{q}^{((a+1)^2-1)/2} V_s^a,$$

что, очевидно, коммутирует с $\mathfrak{B}_p$ -действием и кодействием, и

$$\vartheta V_{s,t}^{a,b} = \mathfrak{q}^{((a+b-2t+1)^2-1)/2} \sum_{i=0}^s \mathfrak{q}^{-ia} \xi^i \left\langle \begin{matrix} t+i \\ i \end{matrix} \right\rangle \prod_{j=0}^{i-1} \langle t+j-b \rangle V_{s-i, t+i}^{a,b} \quad (4.14)$$

(напомним, что $\xi = 1 - \mathfrak{q}^2$).

4.8. Получение алгебры (1.1) из (1.4). Теперь с учетом описанной выше ленточной структуры вычислим диаграмму (3.6) в некоторых случаях. Для поддержания графического соответствия с диаграммой будем записывать $\chi_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Y})$ как правое

действие $\mathcal{Y} \leftarrow \mathcal{Z}$. Дальнейшие вычисления основаны на формуле для двойного сплетения: для двух одновертексных модулей последняя диаграмма из (Б.3) вычисляется как

$$\begin{aligned} B^2(V_s^a \otimes V_t^b) &= \sum_{n=0}^{s+t} \sum_{i=n}^{s+t} \sum_{j=0}^{\min(i,t)} q^{ab+2j(j-1)+(i-n-1)(i-n)-2bj+a(n-2i-t)} \times \\ &\times \xi^{i-j} \left\langle \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} s+t-j \\ s \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} s+t-n \\ i-n \end{matrix} \right\rangle \prod_{\ell=0}^{i-j-1} \langle \ell+j-b \rangle V_{s+t-n,n}^{a,b}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.8.1. Если модуль $\mathcal{Y}$ является неприводимым, $\mathcal{Y} \cong \mathcal{X}(r)_\nu$, то $\mathcal{X}(r)_\nu \leftarrow \mathcal{Z}$ может давать только умножение на число; мы находим, что для всех $x \in \mathcal{X}_0^{\{a\}}$ при $(a)_p \neq p-1$ выполнено равенство $x \leftarrow \mathcal{X}_0^{\{b\}} = \lambda(a, b)x$, где

$$\lambda(a, b) = \frac{q^{(a+1)(b+1)} - q^{-(a+1)(b+1)}}{q^{a+1} - q^{-a-1}}.$$

Полезно переписать данное собственное значение, указывая метки представлений, а не соответствующие коинварианты: при $a = r' - 1 - \nu'p$ и $b = r - 1 - \nu p$ получаем, что $\mathcal{X}(r')_{\nu'} \leftarrow \mathcal{X}(r)_\nu$ сводится к умножению на

$$\begin{aligned} \lambda(r', \nu'; r, \nu) &= (-1)^{\nu'(r+1)+\nu r'+p\nu\nu'} \frac{q^{r'r} - q^{-r'r}}{q^{r'} - q^{-r'}} = \\ &= (-1)^{\nu'(r+1)+\nu r'+p\nu\nu'} \sum_{i=1}^r q^{r'(r+1-2i)}. \end{aligned}$$

Последняя форма записи применима и в случае $r' = p$; тогда $\mathcal{S}(p)_{\nu'} \leftarrow \mathcal{X}(r)_\nu$ сводится к умножению на

$$\lambda(p, \nu'; r, \nu) = (-1)^{(\nu'+1)(r-1-\nu p)} r.$$

Если в (4.11) $\mathcal{Y} = \mathcal{V}[r]_\nu$, то полезно отметить, что тождество

$$\lambda(r', \nu'; r, \nu) = \lambda(p - r', \nu' + 1; r, \nu), \quad 1 \leq r' \leq p - 1,$$

явно показывает, что действие одинаково для обоих подфакторов.

4.8.2. Теперь заметим, что действие $\mathcal{P}[r']_{\nu'} \leftarrow \mathcal{X}(r)_\nu$ имеет диагональную часть, которая снова задается умножением на $\lambda(r', \nu'; r, \nu)$, и недиагональную часть, отображающую верхний подфактор в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{X}(p - r')_{\nu'+1} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathcal{P}[r']_{\nu'} & = & \mathcal{X}(r')_{\nu'} & & \mathcal{X}(r')_{\nu'+2} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathcal{X}(p - r')_{\nu'+1} & & \end{array}$$

в нижний подфактор. Конкретно, в терминах “верхних” и “нижних” элементов, определенных в (А.16) и (А.17), имеем

$$u_t^{a,b}(1) \leftarrow \mathcal{X}(r) = \lambda(r', \nu'; r, \nu) u_t^{a,b}(1) + \mu(r', \nu'; r, \nu) v_t^{a,b}(r+1),$$

где

$$\begin{aligned} \mu(r', \nu'; r, \nu) &= (-1)^{1+\nu'r+\nu r'+p\nu'\nu} \frac{q - q^{-1}}{(q^{r'} - q^{-r'})^3} \times \\ &\times ((q^{r'r} - q^{-r'r})(q^{r'} + q^{-r'}) - r(q^{r'r} + q^{-r'r})(q^{r'} - q^{-r'})). \end{aligned}$$

Поскольку $\leftarrow \mathcal{X}(r)$ коммутирует с $\mathfrak{B}_p$ -действием и кодействием и поскольку $\mathcal{P}_{0,t}^{\{a,b\}}$ порождается $\mathfrak{B}_p$ -действием и кодействием из $u_t^{a,b}(1)$, действие всего $\mathcal{X}_0^{\{c\}}$ определено на всем $\mathcal{P}_{0,t}^{\{a,b\}}$.

4.8.3. Пусть $\mathbf{x}(r)_\nu$ и $\mathbf{p}(r)_\nu$ – операции $\leftarrow \mathcal{X}(r)_\nu$ и $\leftarrow \mathcal{P}(r)_\nu$ соответственно. Тогда имеем соотношения (1.1), которые представляют собой фьюжн-алгебру из работы [45].

Из приведенных выше формул явно видно, что $\mathcal{A}_\nu \leftarrow \mathcal{X}(r)_\nu$ зависит как от ν' , так и от ν только по модулю 2.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенные мультивертексные $\mathfrak{B}(X)$ -модули ЙД несут определенный комбинаторный оттенок: элементы сплетенного пространства X живут на отрезках прямой, разделенных “вертексными операторами” – элементами другого сплетенного пространства Y : $\text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \circ \text{---} \times \text{---} \circ \text{---}$. Это построение, а также $\mathfrak{B}(X)$ -действие на подобные объекты являются “универсальными” в том смысле, что они сформулированы на уровне групповой алгебры группы кос и работают для любого сплетения. Однако даже для диагонального сплетения получение такой информации, как фьюжн-алгебра, из алгебры Николса путем прямого вычисления сопряжено со значительными техническими сложностями, за исключением случая алгебры ранга 1 (и, возможно, ранга 2). Более перспективной представляется программа нахождения представления модулярных групп и последующего нахождения фьюжн-алгебры из обобщенной формулы Верлинде аналогично работе [12]. Важно, что те алгебры Николса, которые *связаны* с конформной теорией поля (а некоторые, очевидно, связаны, ср. с работой [73]), должны нести представление $SL(2, \mathbb{Z})$ на центре своей категории ЙД.

Не лишен интереса и выход за рамки алгебр Николса $\mathfrak{B}(X)$, что также имеет смысл с точки зрения конформной теории поля: добавление разделенных степеней, подобных $F(p)$ в случае алгебры $\mathfrak{B}_p$, которые не лежат в $\mathfrak{B}(X)$, но действуют на $\mathfrak{B}(X)$ -модулях, должно привести к сплетенному (и, в некотором смысле, “одностороннему”) аналогу бесконечномерной квантовой группы, дуальной по Каждану–Люстигу логарифмическим конформным моделям, рассматриваемым как теории с симметрией Вирасоро [13], [14].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Конструкция $\mathfrak{B}_p$ -модулей ЙД

А.1. Одновертексные модули. Одновертексные $\mathfrak{B}_p$ -модули ЙД [28] линейно порождены элементами V_s^a (см. (4.5)) при фиксированном $a \in \mathbb{Z}$, где s пробегает подмножество в $\{0, \dots, p-1\}$, а $\mathfrak{B}_p$ -действие и кодействие описаны в п. 4.2.

А.1.1. Простые модули $\mathcal{X}_0^{\{a\}}$. Из каждого левого коинварианта V_0^a действие алгебры $\mathfrak{B}_p$ порождает простой модуль-комодуль размерности $(a)_p + 1$:

$$\mathcal{X}_0^{\{a\}} = \text{Span}(V_s^a \mid 0 \leq s \leq (a)_p)$$

(просто потому, что $F \blacktriangleright V_{(a)_p}^a = 0$ в соответствии с приведенными выше формулами). Структура модуля-комодуля (в частности, матрица оператора $F(r) \blacktriangleright$ в базисе V_s^a , см. формулу (A.2)) зависит от a только по модулю p , поэтому имеются всего p неизоморфных простых одновертексных модулей-комодулей, для которых мы выбираем обозначение $\mathcal{X}(r)$, указывающее размерность $1 \leq r \leq p$; при этом имеют место изоморфизмы $\mathfrak{B}_p$ -модулей-комодулей:

$$\mathcal{X}_0^{\{a\}} \cong \mathcal{X}(r) \quad \text{при} \quad (a)_p = r - 1.$$

Как было отмечено выше, иногда мы используем специальное обозначение $\mathcal{S}(p) = \mathcal{X}(p)$.

А.1.2. Для каждого $1 \leq r \leq p - 1$ модуль $\mathcal{X}_0^{\{a\}}$ расширяется до приводимого модуля-комодуля $\mathcal{V}[r]$, в котором $\mathcal{X}_0^{\{a\}} \cong \mathcal{X}(r)$ является под(ко)модулем, а фактор изоморфен $\mathcal{X}(p - r)$, как показано в (4.7). В терминах базиса этот факт записывается как

$$\begin{array}{c} v^a(1) \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} v^a(r) \quad \swarrow \quad v^a(r+1) \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} v^a(p) \end{array}, \quad (\text{A.1})$$

где $v^a(i) = F^{i-1} \blacktriangleright V_0^a$, $i \leq r$, — базис в $\mathcal{X}_0^{\{a\}}(r)$, при этом последний, r -ый элемент равен $v^a(r) = C(r)V_{r-1}^a$ с ненулевым $C(r)$, а потому верхний уровень начинается с элемента $v^a(r+1) = C(r)V_r^a$. На диаграмме (A.1) смысл стрелки, направленной вниз, можно понимать как $X \mapsto x_1$, коль скоро $\delta X = \sum_s F(s) \otimes x_s$. Это соглашение является оправданной альтернативой представлению тех же диаграмм в виде

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F(r)} \quad \quad \quad \xrightarrow{F(1)} \\ \swarrow \quad \quad \quad \swarrow \\ v^a(1) \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} v^a(r) \end{array} \quad v^a(r+1) \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} v^a(p)$$

для визуализации формулы $\delta v^a(r+1) \in \mathfrak{B}_p \otimes \text{Span}(v^a(j) \mid 1 \leq j \leq r+1)$.

Присоединенное действие на одновертексном пространстве имеет следующий обций вид:

$$F(r) \blacktriangleright V_s^a = \left\langle \begin{matrix} r+s \\ r \end{matrix} \right\rangle \xi^r \prod_{i=s}^{s+r-1} \langle i-a \rangle V_{s+r}^a. \quad (\text{A.2})$$

А.1.3. Проверим, что равенство (4.9) выполнено, подсчитав полную размерность только что построенных модулей:

$$\dim \mathcal{S}(p) + \sum_{r=1}^{p-1} \dim \mathcal{V}[r] = p + (p-1)p = p^2.$$

Наделенный сплетением (4.3), каждый из приведенных модулей-комодулей удовлетворяет аксиоме ЙД.

A.2. Двухвертексные модули. Двухвертексный модуль ЙД представляет собой линейную оболочку некоторых $V_{s,t}^{a,b}$, $0 \leq s, t \leq p-1$, при фиксированных целых a и b (см. (4.4)). Левое присоединенное действие алгебры $\mathfrak{B}_p$ на них имеет вид

$$F(r) \blacktriangleright V_{s,t}^{a,b} = \sum_{u=0}^r c_{s,t}^{a,b}(r, u) V_{s+r-u, t+u}^{a,b}, \quad (\text{A.3})$$

где

$$c_{s,t}^{a,b}(r, u) = \xi^r q^{u(2s-a)} \begin{Bmatrix} s+r-u \\ r-u \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t+u \\ u \end{Bmatrix} \prod_{i=u}^{r-1} \langle s+i+2t-a-b \rangle \prod_{j=0}^{u-1} \langle t+j-b \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Как видно, зависимость от b в (A.4) – это зависимость по модулю p , а от a – по модулю $2p$. Однако $c_{s,t}^{a+p,b}(r, u) = (-1)^u c_{s,t}^{a,b}(r, u)$, так что матрица оператора $F(r) \blacktriangleright$ в базисе $(V_{s,t}^{a+p,b})_{0 \leq s, t \leq p-1}$ такая же, как и в базисе $((-1)^t V_{s,t}^{a,b})_{0 \leq s, t \leq p-1}$; более того, этот дополнительный знак не влияет на кодействие. Поэтому *структура модуля-комодуля зависит как от a , так и от b по модулю p .*

Мы получим разложение (4.10), перечислив сначала все модули-комодули, порожденные из *левых коинвариантов*

$$V_{0,t}^{a,b} = \text{---} \overset{a}{\circ} \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \overset{b}{\circ} \text{---} \quad (t \text{ крестиков}),$$

а затем рассмотрев их расширения.

В соответствии с (A.3) алгебра действует на левые коинварианты как

$$F(r) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b} = \sum_{s=0}^r c_t^{a,b}(r, s) V_{r-s, t+s}^{a,b}$$

с коэффициентами

$$c_t^{a,b}(r, s) = c_{0,t}^{a,b}(r, s) = \xi^r q^{-sa} \begin{Bmatrix} t+s \\ s \end{Bmatrix} \prod_{i=s}^{r-1} \langle i+2t-a-b \rangle \prod_{j=0}^{s-1} \langle t+j-b \rangle. \quad (\text{A.5})$$

С практической точки зрения случаи из п. 4.3.5 удобно организовать следующим образом:

1. Элементы $F(r) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b}$ не равны нулю и не являются коинвариантами ни при каких r , $1 \leq r \leq p-1$.

2. Коинвариант $V_{0,t}^{a,b}$ не лежит в образе F , и $F(r) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b}$ обращается в нуль при некотором $r \leq p-1$, т.е.

$$c_t^{a,b}(r, s) = 0, \quad 1 \leq s \leq r.$$

3. Элемент $F(r) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b}$ является коинвариантом, $F(r) \blacktriangleright V_{0,t}^{a,b} = \text{const} \cdot V_{0, t+r}^{a,b}$ для некоторого $r \leq p-1$, что эквивалентно выполнению двух условий

$$c_t^{a,b}(r, s) = 0, \quad 0 \leq s \leq r-1, \quad c_t^{a,b}(r, r) \neq 0.$$

Пусть $\beta = (a+b-2t)_p + 1$. При $0 \leq b \leq p-1$ это эквивалентно $b = (2t+\beta-1-a)_p$. Действительно, каждую тройку (a, b, t) , $0 \leq a, b, t \leq p-1$, можно единственным образом представить как

$$(a, b, t) = (a, (2t+\beta-1-a)_p, t), \quad 1 \leq \beta \leq p. \quad (\text{A.6})$$

В такой параметризации коэффициенты (A.5) принимают вид

$$c_t^{a,b}(r, s) = \xi^r \mathfrak{q}^{-sa} \left\langle \begin{matrix} t+s \\ s \end{matrix} \right\rangle \prod_{i=s+1}^r \langle i - \beta \rangle \prod_{j=1}^s \langle j - \beta + a - t \rangle,$$

и анализ перечисленных выше случаев становится относительно несложным. Получаем следующие результаты.

A.2.1. Неприводимые модули $\mathcal{S}_{0,t}^{\{a,b\}}(p)$ размерности p (случай 1). Простой модуль-комодуль размерности p , изоморфный $\mathcal{S}(p)$ (напомним, $\mathcal{S}(p) = \mathcal{X}(p)$), порождается $\mathfrak{B}_p$ -действием из коинварианта $V_{0,t}^{a,b}$, если и только если

$$(a + b - 2t)_p + 1 = p. \quad (\text{A.7})$$

Если это условие выполнено, можно использовать обозначение $\mathcal{S}_{0,t}^{\{a,b\}}$ (или даже обозначение $\mathcal{S}_{0,t}^{\{a,b\}}(p)$) для этого модуля-комодуля, изоморфного $\mathcal{S}(p)$ ⁷⁾.

A.2.2. Приводимые модули $\mathcal{V}_{0,t}^{\{a,b\}}[r]$ размерности p (случай 2). Простой модуль-комодуль, изоморфный $\mathcal{X}(r)$ при некотором $1 \leq r \leq p-1$, порождается $\mathfrak{B}_p$ -действием из коинварианта $V_{0,t}^{a,b}$, который сам не лежит в образе F , если и только если $r = (a + b - 2t)_p + 1$ и выполнено одно из двух условий⁸⁾:

$$t \leq (a)_p \quad \text{и} \quad (a)_p - r + 1 \leq t \leq p - 1 - r, \quad (\text{A.8})$$

$$t \geq (a)_p + 1 \quad \text{и} \quad p - r \leq t \leq p - r + (a)_p. \quad (\text{A.9})$$

В этом случае для соответствующего модуля-комодуля можно записать $\mathcal{X}_{0,t}^{\{a,b\}}$ или $\mathcal{X}_{0,t}^{\{a,b\}}(r)$

$$\mathcal{X}_{0,t}^{\{a,b\}} \cong \mathcal{X}(r), \quad \text{если } r = (a + b - 2t)_p + 1 \text{ и выполнено (A.8) или (A.9)}. \quad (\text{A.10})$$

Теперь расширим каждый модуль-комодуль $\mathcal{X}_{0,t}^{\{a,b\}}$ как в (4.7); в терминах базиса это теперь реализуется как

$$V_{0,t}^{a,b} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} \sum_{s=0}^{r-1} \langle r-1 \rangle! c_t^{a,b}(r-1, s) V_{r-1-s, t+s}^{a,b} \xrightarrow{F} \cdots$$

$$V_{0,t}^{a,b} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} \sum_{s=0}^{r-1} \langle r-1 \rangle! c_t^{a,b}(r-1, s) V_{r-1-s, t+s}^{a,b}$$

где стрелка, указывающая вниз, означает то же, что и в п. A.1.2; фактор изоморфен $\mathcal{X}(p-r)$. В обозначении $\mathcal{V}_{0,t}^{\{a,b\}}[r]$ для модуля-комодуля размерности p явно указаны соответствующий левый коинвариант и размерность под(ко)модуля; структура модуля-комодуля зависит только от r : $\mathcal{V}_{0,t}^{\{a,b\}}[r] \cong \mathcal{V}[r]$.

⁷⁾Условие (A.7) разрешается следующим образом: для нечетных p оно выполнено, если и только если или $t \equiv (a+b+1+p)/2 \pmod{p}$ при четном $a+b$, или $t = (a+b+1)/2$ при нечетном $a+b$. При четном p оно выполнено, если и только если или $t \equiv (p+1+a+b)/2 \pmod{p}$, или $t = (a+b+1)/2$ (что выделяет только нечетные $a+b$).

⁸⁾Логика наших рассуждений состоит в том, что мы предполагаем $0 \leq a, b \leq p-1$, и поэтому $(a)_p = a$; однако мы не опускаем операцию взятия вычета по модулю p , потому что на приводимые здесь формулы мы ссылаемся также при рассмотрении случая $a \in \mathbb{Z}$.

А.2.3. *Трехуровневые модули* $\mathcal{P}_{0,t}^{\{a,b\}}[r]$ (случай **3**). Пусть теперь ни одно из приведенных выше условий (A.7), (A.8), (A.9) не выполнено. Показательное упражнение дает следующий ответ: если не выполнено ни одно из условий (A.7), (A.8) или (A.9), то это означает, что выполнено одно из четырех условий

$$t \geq p - r + (a)_p + 1, \quad (\text{A.11})$$

$$p - r \leq t \leq (a)_p, \quad (\text{A.12})$$

$$t \leq (a)_p - r, \quad (\text{A.13})$$

$$(a)_p + 1 \leq t \leq p - r - 1, \quad (\text{A.14})$$

где снова $r = (a + b - 2t)_p + 1$, $1 \leq r \leq p - 1$. Тогда модуль, порожденный из коинварианта $V_{0,t}^{a,b}$, является под(ко)модулем в неразложимом модуле-комодуле со структурой подфакторов

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{X}(p - r') & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{X}(r') & & \mathcal{X}(r') , \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathcal{X}(p - r') & \end{array}$$

где r' – это или r , или $p - r$, как мы сейчас опишем.

СЛУЧАЙ 1. Если $t + r \geq p$ (это означает, что выполнено или (A.11), или (A.12)), то подмодуль, порожденный из $V_{0,t}^{a,b}$, изоморфен $\mathcal{X}(r)$. Обозначим его как $\mathcal{B}_{0,t}^{\{a,b\}}(r)$ (здесь и ниже $\mathcal{B}$ указывает на “bottom”, а $\mathcal{L}$ – на “left”).

СЛУЧАЙ 2. Если $t + r \leq p - 1$ (это означает, что выполнено или (A.13), или (A.14)), то подмодуль, порожденный из $V_{0,t}^{a,b}$ и обозначаемый как $\mathcal{L}_{0,t}^{\{a,b\}}(r)$, является p -мерным приводимым модулем-комодулем, в котором $\mathcal{B}_{0,t+r}^{\{a,b\}}(p - r) \cong \mathcal{X}(p - r)$ есть под(ко)модуль, а фактор изоморфен $\mathcal{X}(r)$:

$$\mathcal{L}_{0,t}^{\{a,b\}}[r] = \begin{array}{ccc} & \mathcal{X}(r) & \\ & \searrow & \\ & \mathcal{X}(p - r) & \end{array} .$$

В терминах базиса данная диаграмма имеет вид

$$\begin{array}{ccc} V_{0,t}^{a,b} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} \sum_{s=0}^{r-1} \langle r-1 \rangle! c_t^{a,b}(r-1, s) V_{r-1-s, t+s}^{a,b} & & \\ & \searrow F & \\ & \langle r \rangle! V_{0, t+r}^{a,b} \xrightarrow{F} \cdots & \end{array} .$$

Набор всех диаграмм данного типа в действительности описывает и случай 1, и случай 2: в зависимости от того, лежит или не лежит заданный коинвариант $V_{0,u}^{a,b}$ в образе F , он появляется или в нижней линии (случай 1), или в верхней линии (случай 2) на последней диаграмме.

Каждая такая диаграмма продолжается далее в силу просто “косвободной” природы кодействия:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} \sum_{s=0}^{r-1} \langle r-1 \rangle! c_t^{a,b}(r-1, s) V_{r-s-1, t+s}^{a,b} \\
 \xrightarrow{F} \dots
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \xleftarrow{\quad} T_{t+r}^{a,b}(r) \\
 \xrightarrow{F} \langle r \rangle! c_t^{a,b}(r, r) V_{0, t+r}^{a,b} \xrightarrow{F} \dots
 \end{array}
 \quad , \quad (A.15)$$

где, очевидно,

$$T_{t+r}^{a,b}(r) = \sum_{s=0}^{r-1} \langle r-1 \rangle! c_t^{a,b}(r-1, s) V_{r-s, t+s}^{a,b}.$$

Полагая

$$u_t^{a,b}(i) = F^{i-1} \blacktriangleright T_{t+r}^{a,b}(r), \quad (A.16)$$

$$v_t^{a,b}(i) = F^{i-1} \blacktriangleright V_{0, t}^{a,b}, \quad (A.17)$$

получаем полную картину расширения (A.15) в виде (индексы $_t^{a,b}$ опущены для краткости)⁹⁾

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 u(1) \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} u(p-r) \\
 \searrow \quad \quad \quad \nearrow \\
 v(1) \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} v(r) \xrightarrow{F} v(r+1) \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} v(p)
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \xrightarrow{F} u(p-r+1) \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} u(p)
 \end{array}$$

Здесь

$$\delta u(1) = 1 \otimes u(1) + \frac{1}{\langle r-1 \rangle!} F(1) \otimes v(r) + \dots$$

и, аналогично,

$$\delta u(p+r-1) = 1 \otimes u(p+r-1) + \frac{q^{-2r}}{\langle r-1 \rangle!} F(1) \otimes v(p) + \dots$$

Мы хотим обозначать каждый такой модуль, указывая его самый левый коинвариант $V_{0, t}^{a, b}$ (хотя весь модуль и не порождается из этого элемента), поэтому будем писать $\mathcal{P}_{0, t}^{\{a, b\}}$, указывая и тип модуля, и характеристический коинвариант. Можно использовать еще более избыточное обозначение $\mathcal{P}_{0, t}^{\{a, b\}}[r]$, указывающее длину r левого крыла (которая, разумеется, равна $r = (a + b - 2t)_p + 1$). Структура модуля-комодуля зависит только от r :

$$\mathcal{P}_{0, t}^{\{a, b\}}[r] \cong \mathcal{P}[r]. \quad (A.18)$$

⁹⁾“Замыкание ромба” на приведенной диаграмме представляет собой прекрасную иллюстрацию применения аксиомы ЙД, которую мы также используем в некоторых других выводах без специальных оговорок. “Относительный множитель” q^{-2r} в следующих двух формулах, в частности, является немедленным следствием условия ЙД.

$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{0,0}^{\{0,0\}}(1)_0 \\ \mathcal{X}_{0,1}^{\{0,0\}}(4)_1 \\ \mathcal{L}_{0,2}^{\{0,0\}}[2]_1 \\ \mathcal{S}_{0,3}^{\{0,0\}}(5)_2 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{0,0\}}(3)_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{0,0}^{\{0,1\}}(2)_0 \\ \mathcal{S}_{0,1}^{\{0,1\}}(5)_1 \\ \mathcal{X}_{0,2}^{\{0,1\}}(3)_1 \\ \mathcal{L}_{0,3}^{\{0,1\}}[1]_1 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{0,1\}}(4)_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{0,0}^{\{0,2\}}(3)_0 \\ \mathcal{L}_{0,1}^{\{0,2\}}[1]_0 \\ \mathcal{B}_{0,2}^{\{0,2\}}(4)_1 \\ \mathcal{X}_{0,3}^{\{0,2\}}(2)_1 \\ \mathcal{S}_{0,4}^{\{0,2\}}(5)_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{0,0}^{\{0,3\}}(4)_0 \\ \mathcal{L}_{0,1}^{\{0,3\}}[2]_0 \\ \mathcal{S}_{0,2}^{\{0,3\}}(5)_1 \\ \mathcal{B}_{0,3}^{\{0,3\}}(3)_1 \\ \mathcal{X}_{0,4}^{\{0,3\}}(1)_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{0,0}^{\{0,4\}}(5)_0 \\ \mathcal{L}_{0,1}^{\{0,4\}}[3]_0 \\ \mathcal{L}_{0,2}^{\{0,4\}}[1]_0 \\ \mathcal{B}_{0,3}^{\{0,4\}}(4)_1 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{0,4\}}(2)_1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{0,0}^{\{1,0\}}(2)_0 \\ \mathcal{S}_{0,1}^{\{1,0\}}(5)_1 \\ \mathcal{X}_{0,2}^{\{1,0\}}(3)_1 \\ \mathcal{L}_{0,3}^{\{1,0\}}[1]_1 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{1,0\}}(4)_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{0,0}^{\{1,1\}}(3)_0 \\ \mathcal{X}_{0,1}^{\{1,1\}}(1)_0 \\ \mathcal{X}_{0,2}^{\{1,1\}}(4)_1 \\ \mathcal{X}_{0,3}^{\{1,1\}}(2)_1 \\ \mathcal{S}_{0,4}^{\{1,1\}}(5)_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{0,0}^{\{1,2\}}(4)_0 \\ \mathcal{X}_{0,1}^{\{1,2\}}(2)_0 \\ \mathcal{S}_{0,2}^{\{1,2\}}(5)_1 \\ \mathcal{X}_{0,3}^{\{1,2\}}(3)_1 \\ \mathcal{X}_{0,4}^{\{1,2\}}(1)_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{0,0}^{\{1,3\}}(5)_0 \\ \mathcal{X}_{0,1}^{\{1,3\}}(3)_0 \\ \mathcal{L}_{0,2}^{\{1,3\}}[1]_0 \\ \mathcal{B}_{0,3}^{\{1,3\}}(4)_1 \\ \mathcal{X}_{0,4}^{\{1,3\}}(2)_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0,0}^{\{1,4\}}[1]_{-1} \\ \mathcal{B}_{0,1}^{\{1,4\}}(4)_0 \\ \mathcal{L}_{0,2}^{\{1,4\}}[2]_0 \\ \mathcal{S}_{0,3}^{\{1,4\}}(5)_1 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{1,4\}}(3)_1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \mathcal{S}_{0,0}^{\{4,0\}}(5)_0 \\ \mathcal{L}_{0,1}^{\{4,0\}}[3]_0 \\ \mathcal{L}_{0,2}^{\{4,0\}}[1]_0 \\ \mathcal{B}_{0,3}^{\{4,0\}}(4)_1 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{4,0\}}(2)_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0,0}^{\{4,1\}}[1]_{-1} \\ \mathcal{B}_{0,1}^{\{4,1\}}(4)_0 \\ \mathcal{L}_{0,2}^{\{4,1\}}[2]_0 \\ \mathcal{S}_{0,3}^{\{4,1\}}(5)_1 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{4,1\}}(3)_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0,0}^{\{4,2\}}[2]_{-1} \\ \mathcal{S}_{0,1}^{\{4,2\}}(5)_0 \\ \mathcal{B}_{0,2}^{\{4,2\}}(3)_0 \\ \mathcal{L}_{0,3}^{\{4,2\}}[1]_0 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{4,2\}}(4)_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0,0}^{\{4,3\}}[3]_{-1} \\ \mathcal{L}_{0,1}^{\{4,3\}}[1]_{-1} \\ \mathcal{B}_{0,2}^{\{4,3\}}(4)_0 \\ \mathcal{B}_{0,3}^{\{4,3\}}(2)_0 \\ \mathcal{S}_{0,4}^{\{4,3\}}(5)_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{0,0}^{\{4,4\}}[4]_{-1} \\ \mathcal{L}_{0,1}^{\{4,4\}}[2]_{-1} \\ \mathcal{S}_{0,2}^{\{4,4\}}(5)_0 \\ \mathcal{B}_{0,3}^{\{4,4\}}(3)_0 \\ \mathcal{B}_{0,4}^{\{4,4\}}(1)_0 \end{pmatrix}$

Рис. 1. Для каждого $0 \leq t \leq p-1$, $0 \leq a \leq p-1$, $0 \leq b \leq p-1$ (где $p = 5$) модуль-комодуль, порожденный из $V_{0,t}^{a,b}(r)$, обозначен как $\mathcal{A}_{0,t}^{a,b}(r)_\nu$, где r – размерность соответствующего подфактора, ν – индекс сплетения, а $\mathcal{A}$ обозначает тип модуля. Из соображений компактности показаны только случаи $a = 0, 1, 4$. В каком бы столбце высотой 5 ни появился модуль $\mathcal{L}_{0,t}^{a,b}[r]$, в том же столбце обязательно присутствует модуль $\mathcal{B}_{0,t+r}^{a,b}(p-r)$. Мы не заменяем отрицательные индексы сплетения -1 их “каноническим” представителем 3 в $\mathbb{Z}_4$ из соображений “непрерывности”.

Подводя итог, можно сказать, что если задан коинвариант $V_{0,t}^{a,b}$, то соотношение (A.18) выполнено, если и только если (при $r = (a + b - 2t)_p + 1$)

$$\begin{aligned} 1 \leq r \leq p-1 \quad \text{и} \\ t \leq (a)_p - r \quad \text{или} \quad (a)_p + 1 \leq t \leq p-r-1. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A.2.4. Полнота. Убедимся в разложении (4.10), вычислив полную размерность построенных модулей. Это даст p^4 (размерность пространства $\mathbb{V}_p(2)$) следующим образом. Имеются p^2 модулей $\mathcal{S}(p)$, построенных в п. A.2.1, и $2r(p-r)$ модулей $\mathcal{X}(r)$, построенных в п. A.2.2 для каждого $1 \leq r \leq p-1$, что в совокупности дает $p(p^2-1)/3$ модулей; наконец, имеются $(p-r)^2$ модулей $\mathcal{L}(r)$, построенных в п. A.2.3 для каждого $1 \leq r \leq p-1$, что в совокупности дает $p(p-1)(2p-1)/6$ модулей. Каждый $\mathcal{S}(p)$ является p -мерным модулем, каждый $\mathcal{X}(r)$ расширяется до p -мерного модуля, а каждый $\mathcal{L}_{0,t}^{a,b}[r]$ расширяется до $(2p)$ -мерного модуля. Тогда полная размерность равна

$$p^2 \cdot p + \frac{1}{3} p(p^2-1) \cdot p + \frac{1}{6} p(p-1)(2p-1) \cdot 2p = p^4.$$

A.2.5. Пример. Разложение (4.10) иллюстрируется на рис. 1 для $p = 5$. На рисунке представлены все модули, порожденные из $V_{0,t}^{a,b}$ при $a = 0, 1, 4$, $b = 0, 1, 2, 3, 4$

и $t = 0, 1, 2, 3, 4$ (два значения a опущены для компактности). Каждый модуль $\mathcal{B}_{0,u}^{\{a,b\}}(r)$ является подмодулем ЙД в модуле $\mathcal{L}_{0,u-r}^{\{a,b\}}[p-r]$ в том же столбце из $p = 5$ модулей. Нижний индекс дополнительно указывает секторы сплетения (см. п. 4.4).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Модули ЙД

В категории лево-левых модулей-комодулей над сплетенной алгеброй Хопфа $\mathfrak{B}$ модуль ЙД [67], [68], [71] есть левый модуль с действием $\curvearrowright : \mathfrak{B} \otimes \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ и левый комодуль с кодействием $\curvearrowleft : \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{B} \otimes \mathcal{Y}$, для которых выполняется аксиома

(B.1)

Категория ${}^{\mathfrak{B}}\mathcal{UD}$ $\mathfrak{B}$ -модулей ЙД является моноидной и сплетенной. Действие и кодействие на тензорном произведении модулей ЙД являются диагональными и задаются соответственно как

(B.2)

Для двух модулей ЙД их сплетение, его обратное и квадрат имеют вид

(B.3)

Благодарности. Содержание раздела 2 и пп. 4.1, 4.2 представляет собой совместную работу автора с И. Типуниным [28]. Автор благодарит Н. Андрускевича, Т. Крейцига, Й. Фейлстада, Ю. Фукса, А. Гайнутдинова, И. Хекенбергера, Д. Ридуа-та, И. Рункеля, К. Швайгерта, И. Типунина, А. Вирелизье и С. Вуда за очень полезные обсуждения. А. Вирелизье также обратил внимание автора на работу [60]. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00408) и РФФИ-CNRS (грант № 09-01-93105).

Список литературы

- [1] D. Kazhdan, G. Lusztig, *J. Amer. Math. Soc.*, **6**:4 (1993), 905–947; 949–1011; **7** (1994), 335–381; 383–453.
- [2] M. Finkelberg, *Geom. Funct. Anal.*, **6**:2 (1996), 249–267.
- [3] V. G. Turaev, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, **18**, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [4] G. Moore, N. Seiberg, “Lectures on RCFT”, *Physics, Geometry, and Topology*, Proceedings of the Summer School in Theoretical Physics and the NATO Advanced Study Institute (Banff, Alberta, August 14–25, 1989), NATO Advanced Science Institutes Ser. B, **238**, ed. H. C. Lee, Plenum, New York, 1990, 263–361.
- [5] J. Fuchs, I. Runkel, C. Schweigert, *Nucl. Phys. B*, **646**:3 (2002), 353–497, arXiv: hep-th/0204148; **678**:3 (2004), 511–637, arXiv: hep-th/0306164; **694**:3 (2004), 277–353, arXiv: hep-th/0403157; **715**:3 (2005), 539–638, arXiv: hep-th/0412290.
- [6] J. Fröhlich, J. Fuchs, I. Runkel, C. Schweigert, *Adv. Math.*, **199**:1 (2006), 192–329, arXiv: math.CT/0309465.
- [7] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Commun. Math. Phys.*, **265**:1 (2006), 47–93, arXiv: hep-th/0504093.
- [8] A. M. Гайнутдинов, А. М. Семихатов, И. Ю. Типунин, Б. Л. Фейгин, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 398–427.
- [9] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **757**:3 (2006), 303–343, arXiv: hep-th/0606196.
- [10] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *J. Math. Phys.*, **48**:3 (2007), 032303, 46 pp., arXiv: math/0606506.
- [11] K. Nagatomo, A. Tsuchiya, *The triplet vertex operator algebra $W(p)$ and the restricted quantum group at root of unity*, arXiv: 0902.4607.
- [12] A. M. Gainutdinov, I. Yu. Tipunin, *J. Phys. A*, **42**:31 (2009), 315207, 30 pp., arXiv: 0711.3430.
- [13] P. V. Bushlanov, B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, I. Yu. Tipunin, *Nucl. Phys. B*, **818**:3 (2009), 179–195, arXiv: 0901.1602.
- [14] P. V. Bushlanov, A. M. Gainutdinov, I. Yu. Tipunin, *Kazhdan–Lusztig equivalence and fusion of Kac modules in Virasoro logarithmic models*, arXiv: 1102.0271.
- [15] T. Abe, Y. Arike, *Intertwining operators and fusion rules for vertex operator algebras arising from symplectic fermions*, arXiv: 1108.1823.
- [16] T. Creutzig, D. Ridout, *Relating the archetypes of logarithmic conformal field theory*, arXiv: 1107.2135.
- [17] Y.-Z. Huang, J. Yang, *Logarithmic intertwining operators and associative algebras*, arXiv: 1104.4679.
- [18] Y. Arike, K. Nagatomo, *Some remarks on pseudo-trace functions for orbifold models associated with symplectic fermions*, arXiv: 1104.0068.
- [19] R. Vasseur, J. L. Jacobsen, H. Saleur, *Nucl. Phys. B*, **851**:2 (2011), 314–345, arXiv: 1103.3134.

- [20] D. Adamović, A. Milas, *J. Algebra*, **344**:1 (2011), 313–332, arXiv: 1101.0803.
- [21] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky, L. Zhang, *Logarithmic tensor category theory for generalized modules for a conformal vertex algebra*, I: Introduction and strongly graded algebras and their generalized modules, arXiv: 1012.4193; II: Logarithmic formal calculus and properties of logarithmic intertwining operators, arXiv: 1012.4196; III: Intertwining maps and tensor product bifunctors arXiv: 1012.4197; IV: Constructions of tensor product bifunctors and the compatibility conditions, arXiv: 1012.4198; V: Convergence condition for intertwining maps and the corresponding compatibility condition, arXiv: 1012.4199; VI: Expansion condition, associativity of logarithmic intertwining operators, and the associativity isomorphisms, arXiv: 1012.4202.
- [22] M. R. Gaberdiel, I. Runkel, S. Wood, *J. Phys. A*, **44**:1 (2011), 015204, 37 pp., arXiv: 1008.0082.
- [23] J. Fuchs, C. Schweigert, C. Stigner, *Modular invariant Frobenius algebras from ribbon Hopf algebra automorphisms*, arXiv: 1106.0210.
- [24] J. Fuchs, C. Schweigert, C. Stigner, *The Cardy–Cartan modular invariant*, arXiv: 1201.4267.
- [25] R. Vasseur, A. M. Gainutdinov, J. L. Jacobsen, H. Saleur, *The puzzle of bulk conformal field theories at central charge $c = 0$* , arXiv: 1110.1327.
- [26] A. M. Gainutdinov, R. Vasseur, *Lattice fusion rules and logarithmic operator product expansions*, arXiv: 1203.6289.
- [27] I. Runkel, M. R. Gaberdiel, S. Wood, *Logarithmic bulk and boundary conformal field theory and the full centre construction*, arXiv: 1201.6273.
- [28] A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *The Nichols algebra of screenings*, arXiv: 1101.5810.
- [29] W. D. Nichols, *Commun. Algebra*, **6**:5 (1978), 1521–1552.
- [30] N. Andruskiewitsch, M. Graña, “Braided Hopf algebras over non abelian finite groups”, *Coloquio de Algebras de Operadores y Grupos Cuánticos [Colloquium on Operator Algebras and Quantum Groups]* (Vaquerias, March 17–21, 1997), Bol. Acad. Nac. Cien. (Córdoba), **63**, Academia Nacional de Ciencias, Córdoba, 1999, 45–78, arXiv: math/9802074.
- [31] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, *Ann. Math.*, **171**:1 (2010), 375–417, arXiv: math/0502157.
- [32] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider, “Pointed Hopf algebras”, *New Directions in Hopf Algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, **43**, eds. S. Montgomery, H.-J. Schneider, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, 1–68.
- [33] N. Andruskiewitsch, “Some remarks on Nichols algebras”, *Hopf Algebras*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **237**, eds. J. Bergen, S. Catoiu, W. Chin, M. Dekker, New York, 2004, 35–45.
- [34] I. Heckenberger, *Adv. Math.*, **220**:1 (2009), 59–124, arXiv: math/0605795.
- [35] I. Heckenberger, *Invent. Math.*, **164**:1 (2006), 175–188, arXiv: math/0411477.
- [36] N. Andruskiewitsch, I. Heckenberger, H.-J. Schneider, *Amer. J. Math.*, **132**:6 (2010), 1493–1547, arXiv: 0803.2430.
- [37] N. Andruskiewitsch, D. Radford, H.-J. Schneider, *J. Algebra*, **324**:11 (2010), 2932–2970, arXiv: 1001.3977.
- [38] M. Graña, I. Heckenberger, L. Vendramin, *Adv. Math.*, **227**:5, 1956–1989, arXiv: 1004.3723.
- [39] M. Graña, I. Heckenberger, *J. Algebra*, **314**:1 (2007), 324–343.
- [40] N. Andruskiewitsch, F. Fantino, G. A. Garcia, L. Vendramin, “On Nichols algebras associated to simple racks”, *Groups, Algebras and Applications*, Papers from the 18th Latin American Algebra Colloquium (São Pedro, August 3–8, 2009), Contemporary Mathematics, **537**, ed. C. P. Milies, AMS, Providence, RI, 2011, 31–56, arXiv: 1006.5727.
- [41] N. Andruskiewitsch, I. Angiono, H. Yamane, “On pointed Hopf superalgebras”, *New Developments in Lie Theory and Its Applications*, Proceedings of the 7th Workshop on Lie Theory and its Applications (Córdoba, November 27–December 1, 2009), Contemporary Mathematics, **544**, eds. C. Boyallian, E. Galina, L. Saal, AMS, Providence, RI, 2011, 123–140, arXiv: 1009.5148.

- [42] I. Angiono, *Algebra Number Theory*, **3**:1 (2009), 35–106, arXiv:0804.0816.
- [43] I. E. Angiono, *A presentation by generators and relations of Nichols algebras of diagonal type and convex orders on root systems*, arXiv:1008.4144.
- [44] I. Angiono, *On Nichols algebras of diagonal type*, arXiv:1104.0268.
- [45] J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Commun. Math. Phys.*, **247**:3 (2004), 713–742, arXiv:hep-th/0306274.
- [46] D. Adamović, A. Milas, *Selecta Math. New Ser.*, **15**:4 (2009), 535–561, arXiv:0902.3417.
- [47] H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **259**:4 (1991), 448–455.
- [48] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **477** (1996), 293–318, arXiv:hep-th/9604026.
- [49] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **386**:1–4 (1996), 131–137, arXiv:hep-th/9606050.
- [50] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **538**:3 (1999), 631–658, arXiv:hep-th/9807091.
- [51] J. Murakami, K. Nagatomo, *Internat. J. Math.*, **19**:10 (2008), 1203–1213, arXiv:0705.3702.
- [52] P. Furlan, L. Hadjiivanov, I. Todorov, *Lett. Math. Phys.*, **82**:2–3 (2007), 117–151, arXiv:0710.1063.
- [53] Y. Arike, *Symmetric linear functions of the restricted quantum group $\bar{U}_q\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$* , arXiv:0706.1113; *Symmetric linear functions on the quantum group $g_{p,q}$* , arXiv:0904.0331.
- [54] H. Kondo, Y. Saito, *J. Algebra*, **330** (2011), 103–129, arXiv:0901.4221.
- [55] A. M. Semikhatov, *Commun. Algebra*, **39**:5 (2011), 1883–1906, arXiv:1001.0733.
- [56] А. Ю. Алексеев, Д. В. Глущенко, А. В. Ляховская, *Алгебра и анализ*, **6**:5 (1994), 88–125.
- [57] R. Suter, *Commun. Math. Phys.*, **163**:2 (1994), 359–393.
- [58] J. Xiao, *Canad. J. Math.*, **49**:4 (1997), 772–787.
- [59] А. М. Семихатов, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 510–535.
- [60] A. Bruguières, *J. Pure Appl. Algebra*, **204**:1 (2006), 170–194.
- [61] M. Rosso, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **320**:2 (1995), 145–148.
- [62] P. Schauenburg, *Commun. Algebra*, **24**:9 (1996), 2811–2823.
- [63] S. L. Woronowicz, *Commun. Math. Phys.*, **122**:1 (1989), 125–170.
- [64] N. Andruskiewitsch, “About finite dimensional Hopf algebras”, *Quantum Symmetries in Theoretical Physics and Mathematics* (Bariloche, Argentina, January 10–21, 2000), *Contemporary Mathematics*, **294**, eds. R. Coquereaux, A. Garcia, R. Trinchero, AMS, Providence, RI, 2002, 1–57.
- [65] M. Graña, *J. Algebra*, **231**:1 (2000), 235–257.
- [66] M. Rosso, *Invent. Math.*, **133**:2 (1998), 399–416.
- [67] Ю. Н. Беспалов, *ТМФ*, **103**:3 (1995), 368–387.
- [68] Yu. N. Bespalov, *Appl. Categ. Structures*, **5**:2 (1997), 155–204, arXiv:q-alg/9510013.
- [69] Yu. N. Bespalov, B. Drabant, *J. Pure Appl. Algebra*, **123**:1–3 (1998), 105–129.
- [70] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [71] P. Schauenburg, *J. Algebra*, **169**:3 (1994), 874–890.
- [72] Yu. N. Bespalov, T. Kerler, V. Lyubashenko, V. Turaev, *J. Pure Appl. Algebra*, **148**:2 (2000), 113–164, arXiv:q-alg/9709020.
- [73] A. M. Semikhatov, *Virasoro central charges for Nichols algebras*, arXiv:1109.1767.